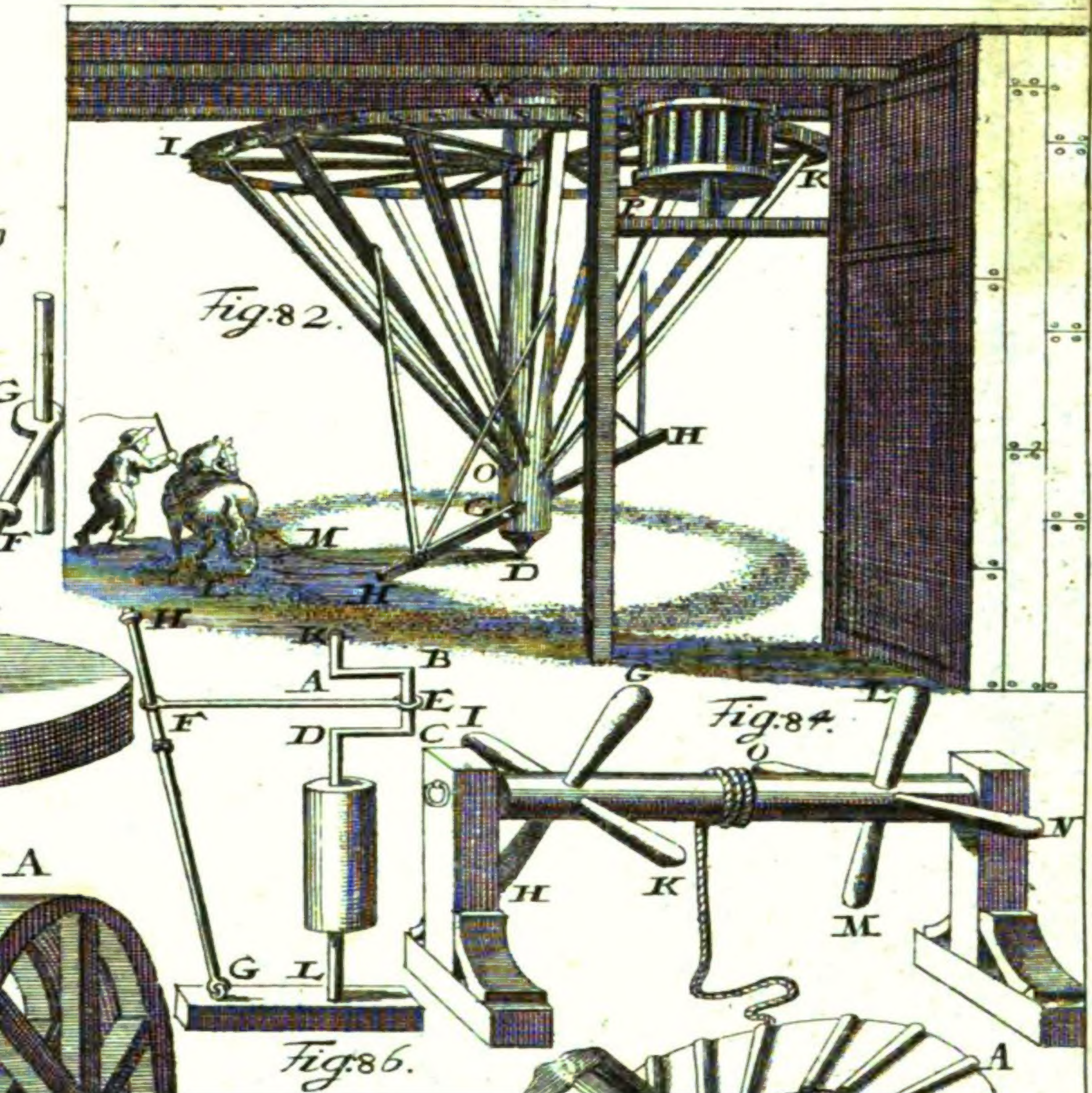


Elementa matheseos universae

Christian Wolff

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM CIRCUMSPICE

Digitized by Google

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS II.

QUI

MECHANICAM CUM STATICA,
HYDROSTATICAM, AËROMETRIAM
ATQUE HYDRAULICAM
COMPLECTITUR.

AUTORE

CHRISTIANO WOLFIO,

POTENT. SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII,
CONSILIARIO AULICO, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ
IN ACADEMIA MARBURGENSI PROFESSORE PRIMARIO, PROFESSORE
PETROPOLITANO HONORARIO, SOCIETATUM REGIARUM
BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ
SODALI.

EDITIO NOVA

PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

CUM PRIVILEGIO SACRÆ CÆSAREÆ MAJESTATIS ET
POLONIARUM REGIS ET SAXONIÆ ELECTORIS.

HALÆ MAGDEBURGICÆ, A. MDCCXXXIII.

PROSTAT IN OFFICINA LIBRARIA RENGERIANA.

PRÆFATIO.

NOva hæc Matheſeos elementa eo fine conſcripſimus, ut Mathematum cultores palmarias Matheſeos univerſæ veritates labore facili intra breve temporis ſpatium ſibi familiares reddere ac methodi verioris ideam lucidam animo comprehendere valeant: ita enim futurum confidimus, ut ad legendos quosvis Autores, qui de rebus mathematicis commentati ſunt, apti efficiantur, & judicio pollentes ad quascunque a Matheſi diverſas ſcientias ſeverius & fructuoſius tractandas accedant. Atque eodem conſilio novæ huic

Digitized by Google

Elementorum editioni plurima adjeci, quæ in priore non leguntur, ut adeo totum opus in duos tomos divisum antea, in quatuor nunc secari opus fuerit. Prodit jam Tomus secundus, qui Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam complectitur, atque adeo motum & æquilibrium solidorum ac fluidorum exponit. Veteres, præeunte ARCHIMEDE in libris de æquiponderantibus & insidentibus humido, ultra æquilibrium gravium non progressi sunt, primusque fuit GALILÆUS, qui eorum inventis aliquid addere ausus motum gravium ad notiones distinctas & fœcundas revocavit, usum curvarum in cognitione Naturæ mathematica clarissimo specimine demonstrans. Patebat jam magis via ad mathematicam Naturæ cognitionem, & Geometria indivisibilium uberius exculta tandemque ad

Ana-

Analysin certam revocata terebatur, ut sublimiora ingenia ad veritates maxime abstrusas atque abditas accederent. Admiranda igitur de motu solidorum ac fluidorum hodie prostant inventa, sed ita ab inventoribus proposita, ut ab iis tangendis arceantur tyrones & quotquot in Mathesi consenescere, omneque tempus suum consumere prohibentur. Nostrum fuit præcipua illa inventa, quibus in Mathesi non datur sublimius, cum primis principiis evidenter connexa proponere, ut, qui sedato animo in elementis nostris tractandis progreditur eo, quo conscripta sunt, ordine, illa eadem facilitate perspiciat, qua quæ facillima erant in anterioribus perspexerat. Ea de causa Mechanica inprimis & Hydraulica plurimis accessionibus in nova hac editione aucta. Ita theoriam de motu gravium effecimus

generalem, ut, cum in priore editione tantummodo cum GALILÆO motum uniformiter acceleratum expoſuerimus, nunc ad accelerationem quacunque lege factam illam extenderimus. Addidimus methodos inveſtigandi centrum gravitatis in ſpatiis mixtilineis & in perimetris figurarum rectilinearum, tendentiamque mediam in motu compoſito, ut alia taceamus. Integrum caput octavum de deſcenſu & aſcenſu corporum in lineis curvis, quod præclara maxime continet ævi hujus inventa, loco convenienti inſeruimus. Theoriam de motu penduli ex ſublimioribus inventis effecimus uberiorem: id quod etiam circa theoriam de centro oſcillationis curæ nobis cordique fuit. Eadem nobis dicenda ſunt de motu projectorum & de motu corporum ex percuſſione. Inprimis autem theoria de viribus centrali-

tralibus uberrime a nobis pertractata, cujus antea primas tantummodo lineas duxeramus. Caput decimum quartum integrum de resistentia medii nunc demum accedit. Non commemoramus ea, quæ passim adspersa a nobis fuere: qua de causa de Hydrostaticæ & Aërometriæ accessionibus specialiora non proferimus. Hydraulicæ tandem theoriam non uno modo reddidimus ampliorem, eamque duobus integris capitibus de cursu fluminum & de percussione fluidorum auximus. Ac hoc pacto finem, quem intendimus, nos consecutos esse speramus. Cur ex intervallo demum prodeat Tomus secundus, causæ in vulgus notæ sunt, ut de iis dicere supervacaneum existimem. Operam daturi sumus, ut Tomus tertius, etsi mole secundum superaturus, celerius sequatur, si Deo ita visum fuerit. Nullus ve-

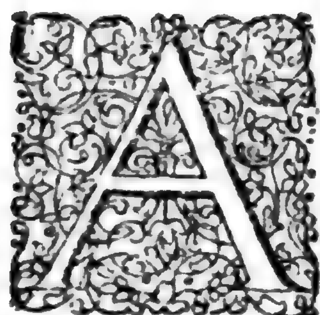
ro

ro dubito non defuturam in hoc ſecundo Tomo materiam, in qua interea induſtriam ſuam exerceant Mathematum cultores, donec tertius comparuerit. Continentur in hoc Tomo, quæ ad Naturæ cognitionem magnum momentum afferunt: utut ingens quoque eorum farrago ſit, quæ ad vitæ non minus jucunditatem, quam neceſſitatem utilia. Quotquot igitur animum habent ſciendi cupidum, ex materiis, de quibus hic inſtituitur tractatio, plurimum voluptatis percipient. Neque ullus dubito fore, ut, qui cum attentione in iis diſcutiendis verſati fuerint, artem inveniendi ipſo uſu ſibi ſint comparaturi, qua deinceps extra Matheſin feliciſſime utentur. Dabam Marburgi Cattorum d. 28. Martii A. 1733.

Digitized by Google

ELEMENTA MECHANICÆ ET STATICÆ.

PRÆFATIO.



A Plerisque Autoribus, qui Mechanicæ elementa in usum tyronum explicarunt, non omnis motus ratio habetur, sed ejus tantum, qui vel virium, vel temporis aliquo compendio ope machinarum perficitur. Nec improbandum est eorum institutum, si quidem plura docere non intendunt, quam quæ in construendis & examinandis machinis usum præbere possunt. Quoniam tamen nobis constitutum est, Matheseos elementa dare non modo ad usum vitæ humanæ sed & ad profectum scientiarum, Physicæ præsertim, sufficientia; ideo consultum duximus, ut de iis quoque tractaremus, quæ ad illustrandam motus doctrinam hactenus inventa. Hæc enim necessaria sunt ad Naturæ cognitionem, ut sine iis certa obtineri nunquam possit, cum in motu plurimorum phænomenorum ratio contineatur. Ipsarum vero etiam machinarum consideratio minime negligenda ab eo, qui cum laude in physicis aliquando versaturus, cum motus corporum organicorum expli-

catio frustra sine his principiis tentetur. Quanta felicitatis humanæ pars motuum scientiæ superstruatur, experientia clarissime loquitur. Huic enim acceptum ferimus, quod pecudes & corpora inanimata peragant, quæ nos necessitatibus vitæ humanæ impulsi non sine maximo sudore perageremus. Eum igitur in finem non solum machinarum simplicium (quod vulgo fieri solet) rationem omnem fideliter exposui; verum etiam hinc inde annotavi, quæ ad earum constructionem scitu necessaria sunt, & desideratam hactenus in istiusmodi elementis tractationem de potentiarum ad machinas applicatione addidi. Quos rerum naturalium cognitio parum juvat, his solis contenti præterire possunt motus regulas: machinarum enim vires sine iis plerumque plene intelligent. Quamvis vero nonnulli Staticam a Mechanica sejungant; consultius tamen visum fuit sororio vinculo utramque connecti, cum ita demonstrationes nexu pulchriori concatenare liceret.

ELE-

ELEMENTA MECHANICÆ.
CAPUT I.
De
MOTU ÆQUABILI.

DEFINITIO 1.

1.

MEchanica est scientia motus. *Staticam* vocant nonnulli ejus partem, quæ de æquilibrio solidorum agit.

DEFINITIO 2.

2. *Quies* est permanentia corporis in eodem loco. *Motus* vero est continua loci mutatio.

SCHOLION.

3. Moveri *nempe dicitur corpus, si successive aliis aliisque corporibus quiescentibus aut ejusdem corporis quiescentis partibus fit contiguum.*

DEFINITIO 3.

4. *Gravitas* est nisus deorsum versus centrum terræ.

DEFINITIO 4.

5. *Gravitatio* est pressura, quam corpus in aliud sibi subjectum vi gravitatis suæ exercet.

DEFINITIO 5.

6. *Massa* corporis est materia ipsi cohærens, hoc est, quæ una cum corpore movetur & gravitat.

DEFINITIO 6.

7. *Moles* seu *volumen* est expansio corporis secundum longitudinem, latitudinem & profunditatem.

COROLLARIUM.

8. Invenitur adeo per regulas Geometriæ.

DEFINITIO 7.

9. *Vis Motrix* seu *vis* simpliciter est principium motus, seu id, unde motus in corpore pendet. Dicitur *viva*, si cum motu actuali conjungitur, qualis est in globo cadente. *Mortua* vero vocatur, si ad motum producendum tendit quidem, verum motum actu nondum producit, seu quæ in solo nisu seu conatu ad motum consistit, qualis est in globo ex filo suspenso & in elatere tenso, quod se restituere nititur.

SCHOLION.

10. *Hanc virium distinctionem dudum agnovere inter homines plebejos molitores nostrates.* Mortuam *enim vocant* aquam *in alveo stagnantem aut segniter*

admodum fluentem; vivam *vero*, *qua impetu concepto rotis molendinorum circumagendis sufficit. Acutissimus* Leibnitius *cum magnum momentum in ea situm esse deprehenderet ad motuum doctrinam rite tradendam, eandem in mechanicam introduxit* (a).

DEFINITIO 8.

11. *Tempus* hic voco eam temporis partem, qua motus durasse supponitur.

DEFINITIO 9.

12. *Spatium* est linea, quam mobile instar puncti consideratum motu suo describere concipitur.

DEFINITIO 10.

13. *Velocitas* seu *Celeritas* est ea vis motricis affectio, qua mobile aptum redditur dato tempore spatium datum percurrendi.

COROLLARIUM.

14. Celeritas adeo dupla est, qua eodem tempore spatium duplum describitur; tripla, qua triplum; quadrupla, qua quadruplum describitur & ita porro in infinitum in quacunque multiplicium vel submultiplicium specie.

SCHOLION. 1.

15. *Nimirum celeritas tanto major censetur ab omnibus, quanto majus spatium eodem tempore percurrit mobile. Ponamus mobile A intervallo unius minuti secundi percurrere intervallum duorum pedum. Sit aliud mobile B, quod intervallo unius secundi percurrat spatium trium pedum. Ultro fatebuntur omnes celeritatem ipsius mobilis B majorem esse celeritate alterius A.*

SCHOLION 2.

16. *Mobile in momento quovis temporis celeritatem habet, cumque omnes corporis partes eadem celeritate progrediantur, quod satis patet attendenti, celeritas quasi per totam mobilis massam diffusa concipitur, ita ut eadem in singulis partibus existat. Proprie loquendo est gradus vis motricis.*

DEFINITIO 11.

17. *Linea directionis* est, juxta quam corpus progredi nititur.

DEFINITIO 12.

18. Velocitas sumta cum directione dicitur *Conatus*.

SCHOLION

19. *Unde conatus censetur major, quo major est celeritas.*

DEFINITIO 13.

20. *Vis resistendi* dicitur, quæ in contrarium seu juxta oppositam directionem vis cujuscunque alterius agit.

SCHOLION.

21. *Opponuntur directiones, quæ in contrarias plagas tendunt.*

DEFINITIO 14.

22. *Quantitas motus*, momentanea scilicet, est factum ex celeritate in massam. *Leibnitius* appellat *Quantitatem motionis*.

SCHO-

(a) Act. Erudit. A. 1695. p. 194.

SCHOLION.

23. *Pendet nimirum quantitas motus & a quantitate massæ, & a quantitate celeritatis, ita ut in eodem corpore motus existimetur major, si major est celeritas, qua movetur, & in duobus corporibus, quorum eadem est celeritas, ejus motus major sit, cujus massa quantitas major est.*

DEFINITIO 15.

24. *Motus æquabilis* est, si mobile continuo eadem celeritate fertur.

AXIOMA 1.

25. *Nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit.*

SCHOLION.

26. *De hoc principio plura diximus in* Ontologia *seu* Philosophia prima *integro capite 2. sect. 1. part. 1. Et in Mechanica idem jam olim tacite supposuit* Archimedes *in libris de æquiponderantibus.*

AXIOMA 2.

27. *Si mobile eadem celeritate movetur, æqualibus temporibus æqualia spatia describit.*

SCHOLION.

28. *Cum enim mobile per celeritatem aptum reddatur ad datum spatium dato tempore percurrendum. (§. 13); nulla sane ratio est, cur temporibus æqualibus, quibus eandem celeritatem habet mobile, diversam celeritatem describere deberet. Describit adeo eandem (§. 25). Axiomatis hujus veritatem apertius stabilimus in Philosophia prima (§. 655 Ontol.), ubi etiam scientiarum mathematicarum principia demonstrativa ratione a priori ex notionibus simplicioribus deduximus.*

AXIOMA 3.

29. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, eodem tempore æqualia spatia describunt.*

SCHOLION.

30. *Patet idem per axioma primum (§. 25). Conferatur de eadem philosophia prima §. 660.*

THEOREMA 1.

31. *In motu æquabili spatia a mobili percursa sunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam motus æquabilis *per hypoth.* mobile continuo eadem celeritate movetur (§. 24). Quare si tempore *T* describit spatium *s*, alio tempore *t* priori æquali describit quoque spatium S priori æquale (§. 27), adeoque tempore bis *T* spatium bis *s*, immo tempore quocunque multiplici seu submultiplici *ut* (=T) spatium *ns* (=S). Sunt igitur spatia s & S ut tempora t & T (§. 194 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 2.

32. *Si duo mobilia eadem celeritate & motu æquabili feruntur, spatia descripta sunt ut tempora.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t percurrit spatium s, etiam mobile B, quod

quod eadem celeritate fertur, *per hypoth.* eodem tempore t percurrit ſpatium ſ priori æquale (§. 29). Sed ſi idem mobile percurrit tempore quocunque alio T ſpatium S, erit hoc ad alterum ſ ut T ad t (§. 31). Quare cum ſpatium ſ ſit idem, quod a mobili A tempore t percurritur *per demonſtrata*; ſpatia ſ & S a mobilibus A & B temporibus t & T deſcripta ſunt ut tempora t & T, quibus deſcribuntur. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

33. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, ſpatia eodem tempore motu æquabili deſcripta ſunt ut celeritates.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobile A tempore t celeritate c ſpatium $ſ$ deſcribit; eodem tempore t celeritate bis c deſcribit ſpatium bis $ſ$ & celeritate quacunque multiplici vel ſubmultiplici nc ſpatium quodcunque multiplex vel ſubmultiplex $nſ$ (§. 31). Erunt adeo ſpatia $ſ$ & S($=nſ$) deſcripta ut celeritates c & C ($=nc$). Quare ſi mobile B eodem tempore t celeritate C deſcribit ſpatium S: erit adhuc ſpatium a mobili A deſcriptum ſ ad ſpatium a mobili B eodem tempore deſcriptum S ut celeritas illius c ad celeritatem hujus C. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

34. *Spatia a duobus mobilibus peracta ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Deſcribat mobile A celeritate c ſpatium $ſ$ tempore t & B celeritate C ſpatium S tempore T. Ponamus idem mobile B celeritate c deſcribere ſpatium q tempore T. Quoniam celeritas c mobilium A & B eadem, erit $q:ſ=T:t$ (§. 32). Et quia ſpatia S & q eodem tempore T deſcribuntur, erit $S:q=C:c$ (§. 33). Ergo $Sq:ſq=TC:tc$ (§. 213 *Arith.*), conſequenter $S:ſ=TC:tc$ (§. 181 *Arithm.*), conſequenter ſpatia ſunt in ratione compoſita temporum & celeritatum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

35. Si $S=ſ$; erit $CT=ct$, adeoque $C:c=t:T$ (§. 199 *Arith.*), hoc eſt, ſi duo corpora motu æquabili æqualia ſpatia deſcribunt; celeritates habent temporum rationem reciprocam.

COROLLARIUM. 2.

36. Si ulterius $t=T$; erit etiam $C=c$, adeoque corpora, quæ motu æquabili tempore æquali ſpatia æqualia percurrunt, æquali celeritate feruntur.

THEOREMA 5.

37. *Duorum corporum motu æquabili latorum celeritates C & c ſunt in ratione compoſita ex direc-*

ex spatiorum S & s & reciproca temporum T & t.

DEMONSTRATIO.

Est enim S:s=CT:ct (.34). Quare cum sit sCT=Sct(§.297) *Arithm.*); erit C:c=St:sT (§.299 *Arithm.*) *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

38. Quoniam C:c=St:sT (§.37); erit $C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}$ (§.181 *Arithm.*). Quare celeritas C analytice exprimitur per $\frac{S}{T}$, hoc est, celeritas est ut spatium per tempus divisum.

THEOREMA 6.

39. *Si duo corpora motu æquabili lata celeritatibus C & c describunt spatia S & s, tempora T & t, quibus describuntur, erunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam S:s=CT:ct (§.34.); erit sCT=Sct (§.297 *Arithm.*). Quare T:t=cS:Cs(§.299 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEOREMA. 7.

40. *Si spatia S & s a duobus mobilibus motu æquabili descripta fuerint ut celeritates C & c, tempora T & t erunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Est enim S:s=CT:ct (§.34). Quare si esse debet S:s=C:c, necesse est ut sit T=t,(§.178 *Arithm.*). Est vero S:s=C:c *per hypoth.* Ergo etiam T=t. *Q.e.d.*

Idem etiam hoc modo ostenditur. S:s=C:c, *per hypoth.* sed S:s=CT:ct (§.34). Ergo C:c=CT:ct (§.167 *Arithm.*), consequenter 1:1=T:t (§.185 *Arithm.*) Quare cum sit 1=1, erit etiam T=t. *Q.e.d.*

THEOREMA 8.

41. *Quantitates motus duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, Q & q, sunt in ratione composita celeritatum C & c & massarum M & m.*

DEMONSTRATIO.

Est enim Q=CM & q=cm (§.22). Quare Q:q=CM:cm, hoc est Q habet ad q rationem compositam ipsius C ad c & ipsius M ad m (§.159 *Arithm.*) *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

42. Si Q=q; erit CM=cm, adeoque C:c=m:M (§.299 *Arithm.*), hoc est, si quantitates motus duorum mobilium motu æquabili latorum fuerint æquales; celeritates habent rationem massarum reciprocam.

COROLLARIUM 2.

43. Quare si ulterius M=m; erit etiam C=c; hoc est, si duorum mobilium ejusdem massæ motu æquabili latorum

torum quantitates motus fuerint æquales; æquali celeritate feruntur.

COROLLARIUM 3.

44. Similiter si $C=c$; erit $M=m$, hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moventur, & fuerint quantitates motus æquales; erunt massæ eorundem æquales.

THEOREMA 9.

45. *Duorum corporum, quæ motu æquabili feruntur, celeritates* C *&* c *sunt in ratione composita ex quantitate motus* Q *&* q *directa & massarum* M *&* m *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q:q=CM:cm$ (§. 41)

erit $Qcm=qCM$ (§. 297 *Arithm.*)

$C:c=Qm:qM$ (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

46. Si $C=c$; erit $Qm=qM$, adeoque $Q:q=M:m$ (§. 269 *Arithm.*), hoc est, si duo mobilia motu æquabili & eadem celeritate feruntur; quantitates motus massarum rationem habent.

COROLLARIUM 2.

47. Quodsi ulterius fuerit $M=m$; erit etiam $Q=q$, adeoque si duo mobilia æqualem massam habentia motu æquabili & eadem velocitate feruntur; quantitates motus æquales sunt.

THEOREMA 10.

48. *In motu æquabili massæ corporum* M *&* m *sunt in ratione composita ex quantitatum motus* Q *&* q *directa & celeritatum* C *&* c *reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Q:q=CM:cm$ (§. 41)

erit $Qcm=qCM$ (§. 297 *Arithm.*)

$M:m=Qc:qC$ (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

49. Si $M=m$; erit $Qc=qC$, adeoque $Q:q=C:c$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum massæ fuerint æquales; quantitates motus sunt ut velocitates.

THEOREMA 11.

50. *In motu æquabili quantitates motus* Q *&* q *sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum* M *&* m *atque spatiorum* S *&* s *& reciproca temporum* T *&* t.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $C:c=St:sT$ (§. 38)

& $Q:q=CM:cm$ (§. 41)

erit $CQ:cq=CMSt:cmsT$ (§. 213 *Arithm.*)

$Q:q=MSt:msT$ (§. 185 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

51. Si $Q=q$; erit $MSt=msT$ adeoque $M:m=sT:St$, $S:s=mT:Mt$ & $T:t=MS:ms$, hoc est, si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus fuerint æquales; massæ eorundem sunt in ratione composita ex [illegible]

directa

directa temporum & reciproca spatiorum: 2. Spatia sunt in ratione composita ex directa temporum & reciproca massarum: 3. Tempora denique sunt in ratione composita massarum & spatiorum.

COROLLARIUM 2.

52. Si præterea M=m; erit ſT=St, adeoque S:ſ=T:t (§. 299 *Arithm.*). Nempe si duorum mobilium motu æquabili latorum quantitates motus ac massæ fuerint æquales; spatia temporum rationem habent.

COROLLARIUM 3.

53. Si ulterius T=t; erit quoque S=ſ. Duo igitur mobilia, quorum massæ ac quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt.

COROLLARIUM. 4.

54. Si præter Q=q fuerit S=ſ; erit mT=Mt (§. 50) adeoque M:m=T:t (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si duo mobilia, quorum quantitates motus æquales sunt, æquabili motu æqualia spatia percurrunt; massæ eorundem sunt temporibus proportionales, vel, quod perinde est, tempora sunt massis proportionalia.

COROLLARIUM. 5.

55. Si ulterius T=t; erit etiam M=m, adeoque corporum, quorum quantitates motus æquales sunt & quæ eodem tempore motu æquabili spatia æqualia describunt, massæ æquales sunt.

COROLLARIUM. 6.

56. Si præter Q=q fuerit T=t; erit MS=mſ (§. 50), adeoque S:ſ=m:M, hoc est, spatia a duobus mobilibus, quorum quantitates motus æquales sunt, eodem tempore motu æquabili descripta sunt in ratione massarum reciproca.

THEOREMA 12.

57. *In motu æquabili spatia* S & ſ *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q & q *atque temporum* T & t & *reciproca massarum* M & m.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Q: q=MSt : mſ T (§ 50) erit QmſT=qMSt (§. 297 *Arithm.*) Unde S:ſ=QTm : qtM (§. 299. *Arithm.*) Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

58. Si S=ſ; erit QTm=qtM, adeoque Q : q=tM : Tm, M : m=QT : qt, T : t=qM : Qm (§. 299 *Arithm.*). Quod si adeo duo mobilia motu æquabili per æqualia spatia feruntur; erunt 1. quantitates motus in ratione composita ex directa massarum & reciproca temporum: 2. massæ in ratione composita quantitatum motus atque temporum: 3. tempora in ratione composita ex directa massarum & quantitatum motus reciproca.

COROLLARIUM 2.

59. Si præter S=ſ fuerit M=m; erit QT=qt, adeoque Q : q=t : T (§. 299 *Arithm.*). Nimirum duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, quantitates motus sunt in ratione temporum reciproca, quibus per æqualia spatia feruntur.

COROLLARIUM 3.

60. Si præter S=ſ fuerit T=t; erit

 qM=Qm

qM=Qm (§. 58), adeoque Q : q=M : m (§. 299 *Arithm.*) Duorum itaque mobilium, quæ per æqualia spatia æquali tempore motu æquabili feruntur, quantitates motus massis proportionales sunt.

THEOREMA 13.

61. *Corporum motu æquabili latorum massæ* M *&* m *sunt in ratione composita ex rationibus directis quantitatum motus* Q *&* q *atque temporum* T *&* t *& reciproca spatiorum* ſ *&* S.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Q : q=MSt : mſT (§. 50): erit QmſT=qMSt (§. 297 *Arithm.*). Unde M : m=QTſ : qtS (§. 299 *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

62. Si M=m; erit QTſ=qtS, adeoque Q : q=tS : Tſ, S : ſ=QT : qt & T : t =qS : Qſ (299 *Arithm.*), hoc est, duorum mobilium æquabili motu latorum, quorum massæ æquales, 1. quantitates motus sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca temporum: 2. spatia sunt in ratione quantitatum motus & temporum composita: 3. tempora sunt in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca quantitatum motus.

COROLLARIUM 2.

63. Si præter M=m fuerit T=t; erit qS=Qſ, adeoque Q : q=S : ſ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, quantitates motus duorum mobilium, quorum massæ æquales sunt, spatiis æquali tempore peractis proportionales sunt.

THEOREMA 14.

64. *In motu æquabili tempora* T *&* t *sunt in ratione composita ex rationibus directis massarum* M *&* m *atque spatiorum* S *&* ſ *& reciproca quantitatum motus* Q *&* q.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Q : q=MSt : mſT (§. 50): erit QmſT=qMSt (§. 297 *Arithm.*). Unde T : t=qMS : Qmſ (§. 299 *Arithm.*) Q. e. d.

COROLLARIUM.

65. Si T=t; erit qMS=Qmſ, adeoque Q : q=MS : mſ, M : m=Qſ : qS & S : ſ=Qm : qM (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si motus æquabilis duorum mobilium fuerit æquidiuturnus; erunt 1. quantitates motus in ratione massarum & spatiorum composita: 2. massæ in ratione composita ex quantitatum motus directa & spatiorum reciproca: 3. spatia in ratione composita ex directa quantitatum motus & reciproca massarum.

SCHOLION.

66. Suadeo tyronibus, ut hactenus demonstrata numeris illustrent: ita enim futurum, ut facilius eorundem vim animo comprehendant. Ponamus itaque corpus A, cujus massa sit ut 7, e. gr. 7 librarum, tempore 3 secundorum emetiri spatium 12 pedum, & corpus aliud B, cujus massa sit ut 5, tempore 8 secundorum emetiri spatium 16 pedum: habebimus M=7, T=3, S=12, m=5, t=8, ſ=16, *adeoque* C=4, c=2 (§. 38),

(§. 38), $Q=28$, $q=10$ (§ 22). *Hinc utique deprehenditur.*

$C:c = St:sT$ (§. 37)

$4:2 = 12\cdot 8 : 16\cdot 3 = 4:2$

$S:s = CT:ct$ (§. 34)

$12:16 = 4\cdot 3 : 2\cdot 8 = 12:16$

$T:t = cS:Cs$ (§. 39)

$3:8 = 2\cdot 12 : 4\cdot 16 = 1\cdot 3 : 2\cdot 4 = 3:8$

$C:c = Qm:qM$ (§. 45)

$4:2 = 28\cdot 5 : 10\cdot 7 = 4\cdot 1 : 2\cdot 1 = 4:2$

$M:m = Qc:qC$ (§. 48)

$7:5 = 28\cdot 2 : 10\cdot 4 = 7\cdot 1 : 5\cdot 1 = 7:5$

$S:s = TQm:tqM$ (§. 57)

$12:16 = 3\cdot 28\cdot 5 : 8\cdot 10\cdot 7 = 3\cdot 4\cdot 1 : 8\cdot 2\cdot 1 = 12:16$

$M:m = TQs:tqS$ (§. 61)

$7:5 = 3\cdot 28\cdot 16 : 8\cdot 10\cdot 12 = 3\cdot 7\cdot 2 : 1\cdot 10\cdot 3 = 7:5$

$Q:q = MSt:msT$ (§. 50)

$28:10 = 7\cdot 12\cdot 8 : 5\cdot 16\cdot 3 = 7\cdot 4\cdot 1 : 5\cdot 2\cdot 1 = 28:10$

Eodem modo illustrantur singula theorematum corollaria.

Sit enim $S=12$, $T=6$, $s=8$, $t=4$; *erit* $C=12:6=2$ & $c=8:4=2$, *consequenter ob* $C=c$ (§ 32)

$S:s = T:t$

$12:8 = 6:4$

Sit $S=12$ & $s=12$. *Quoniam* $S=CT$ & $s=ct$ (§ 34); *si* $C=2$ & $c=3$, *erit* $T=6$ & $t=4$. *Habemus adeo* (§. 35)

$C:c = t:T$

$2:3 = 4:6$

Si pro S & s *ponatur* Q & q, *pro* T & t *vero* M & m; *idem exemplum illustrabit primum theorematis 8 corollarium* (§. 42). *Iisdem observatis exemplum praecedens in Corollarium primum theorematis quinti quadrat.*

Sit denique $Q=12$, $q=8$, $M=4$, $m=4$; *erit* $C=12:4=3$ & $c=8:4=2$, (§. 22) *adeoque* (§. 49)

$Q:q = C:c$

$12:8 = 3:2$

CAPUT II.

DE MOTU UNIFORMITER ACCELERATO ET RETARDATO.

DEFINITIO 16.

67. *Motus acceleratus* est, qui nova capit celeritatis incrementa. *Uniformiter acceleratus* est, qui temporibus aequalibus aequalia continuo capit celeritatis incrementa.

COROLLARIUM 1.

68. In motu adeo uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora, quibus acquiruntur.

COROLLARIUM 2.

69. Quare si tempuscula elementaria fuerint dt & dT, celeritates elementares iis respondentes dc & dC; erit

$t:T = c:C$ (§. 192 *Arithm.* & §. *prec.*). Sunt enim t & T summæ ipsorum dt & dT, c & C vero summæ ipsorum dc & dC (§. 178. 67 *Arithm.*)

DEFINITIO 17.

70. *Motus retardatus* est, cujus celeritas decrescit. *Uniformiter retardatus* dicitur, si continua celeritatis decrementa fuerint temporibus proportionalia.

AXIOMA 2.

71. *Corpus semel quiescens nunquam movebitur, nisi aliunde ad motum concitetur: semel autem motum eadem velocitate & secundum eandem directionem moveri perget, nisi a causa aliqua statum suum mutare cogatur.*

SCHOLION.

72. *Hæc satis manifesta sunt ex axiomate omnis philosophiæ fundamentali, quod nihil fit sine ratione sufficiente (§. 25): quemadmodum idem ostendimus in Cosmologia. Nec experientia eidem repugnat, cum semper ratio assignari possit tam motûs retardati, quam directionis mutatæ, modo omnes circumstantias satis perpendamus.*

COROLLARIUM 1.

73. Corpus itaque, quod nonnisi impulsu semel facto movetur, per lineam rectam moveri debet.

COROLLARIUM 2.

74. Quodsi vero per curvam incedit, duplici vi urgeatur necesse est, altera nempe, qua progrederetur secundum lineam rectam, altera vero, qua a motu rectilineo continuo retrahitur.

AXIOMA 3.

75. *Si nisus & renisus duorum corporum fuerint æquales; motus nullus subsequitur, sed corpora se mutuo impellentia juxta se invicem quiescunt.*

AXIOMA 4.

76. *Si corpus motum secundum eandem directionem, qua movetur, impellitur, motus acceleratur* (§. 67).

AXIOMA 5.

77. *Corpus motum a vi resistente retardatur* (§. 20. 50).

OBSERVATIO 1.

78. *Gravitas corporum eadem in qualibet a superficie telluris distantia, in qua experimentum capere licet: quam in posterum Intervallum non nimis magnum dicemus.*

OBSERVATIO 2.

79. *Gravia descendunt motu accelerato.*

THEOREMA 15.

80. *Si corpus ex quiete motu uniformiter accelerato fertur, spatia sunt in ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Designet recta AB tempus, quo motus mobilis acceleratur & rectæ Tab. I. Fig. ad 1.

ad AB applicatæ PM, BC sint ut celeritates in fine temporis AP, AB acquisitæ. Quoniam motus uniformiter acceleratur & motus a quiete incipit, *per hypoth.* erit AP: AB=PM: BC (§. 68). Sunt vero PM & BC ad AB perpendiculares *per construct.* adeoque inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Est igitur ABC triangulum (§. 268 *Geom.*), idque rectangulum (§. 91 *Geom.*). Ponamus *pm* esse alteri lineæ PM infinite propinquam: celeritates PM & *pm* non different nisi quantitate infinite parva *m*R in fine tempusculi P*p*, atque adeo tempusculo toto P*p* eadem celeritate fertur mobile (§. 4 *Analys.*), consequenter motus isto tempusculo æquabilis est (§. 24). Enimvero in motu æquabili spatium est ut tempus ductum in celeritatem (§. 34 *Mech.* & §. 159 *Arithm.*), adeoque spatium a mobili tempusculo P*p* confectum ut rectangulum P*p* RM (§ 375 *Geom.*), consequenter cum singulis tempusculis, quibus AP constat, ipsi P*p* æqualibus istiusmodi parallelogrammula respondeant, quæ simul sumta aream triangularem APM conficiunt (§. 99 *Analys. infin.*), area APM exprimit spatium a mobili tempore AP confectum. Ex eadem ratione triangulum ABC exprimit spatium a mobili tempore AB confectum. Sunt igitur spatia temporibus AP & AB descripta ut triangula APM & ABC, consequenter ob eorundem similitudinem (§. 268 *Geom.*) in ratione duplicata rectarum AP & AB (§. 398 *Geom.*), hoc est, temporum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

81. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68); spatia erunt etiam in ratione duplicata celeritatum in fine temporum, quibus describuntur, acquisitarum (§. 80).

COROLLARIUM 2.

82. In motu uniformiter accelerato tempora sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 159 *Arithm.* & §. 80 *Mech.*)

COROLLARIUM 3.

83. Etiam celeritates in fine temporum sunt in ratione subduplicata spatiorum illis descriptorum (§. 159 *Arithm.* & §. 81 *Mech.*)

THEOREMA 16.

84. *Spatia, quæ corpus motu uniformiter accelerato percurrit, crescunt temporibus æqualibus secundum numeros impares* 1, 3, 5, 7, 9 &c.

DEMONSTRATIO.

Si tempora, quibus corpus motu

tu

Digitized by Google

tu uniformiter accelerato progreditur, fuerint ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. spatium intra momentum 1 confectum erit ut 1, intra duo percursum ut 4, intra tria ut 9, intra quatuor ut 16, intra quinque ut 25 &c. (80). Quodsi ergo subtrahas spatium intra minutum unum percursum a spatio intra duo confecto 4; remanebit spatium minuto secundo respondens 3. Eodem modo reperitur spatium minuto tertio absolutum 9−4=5, spatium quarto respondens 16−9=7, quod quinto convenit 25−16=9 &c. & ita porro (§. 83 *Analys.*). Spatium ergo minuti primi est ut 1, secundi ut 3, tertii ut 5, quarti ut 7, quinti ut 9 &c. adeoque spatia corporis motu uniformiter accelerato progredientis temporibus æqualibus augentur secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. *Q. e. d.*

THEOREMA 17.

85. *Corpora gravia in medio non resistente per intervalla non nimis magna motu uniformiter accelerato descendunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum gravia descendant motu accelerato (§. 79); vis gravitatis ea continuo impellere debet (§. 76). Est vero gravitas in intervallo non minis magno eadem (§. 78). Quare gravia eodem modo temporibus æqualibus deorsum impelli debent (§. 25). Itaque si tempusculo primo impelluntur celeritate *c*, etiam secundo celeritate *c* impellentur, immo etiam tertio, quarto, quinto & alio quocunque æquali. Quoniam vero medium non resistit *per hypoth.* celeritatem semel acquisitam constanter retinent (§. 71), adeoque temporibus æqualibus æqualia continuo celeritatis incrementa capiunt, consequenter motu uniformiter accelerato descendunt (§. 67) *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

86. Sunt igitur spatia descensus ex quiete in temporum (§. 80), itemque in velocitatum ratione duplicata (§. 81) & secundum numeros impares 1, 3, 5, 7, 9 &c. crescunt (§. 84).

COROLLARIUM 2.

87. Tempora vero, itemque velocitates sunt in ratione spatiorum subduplicata (§. 82. 83).

SCHOLION 1.

88. *Dum gravia descendere supponimus in medio non resistente, ab omni externo impedimento abstrahimus, quocunque tandem nomine veniat & a quacunque causa ortum trahat. Unde motum quoque secludimus, quo, ob vertiginem Telluris in Astronomia adstruendum, in transversum rapiuntur gravia ipso descensus tempore: quamvis in intervallo*

non

non nimis magno nulla inde in descensum gravium irregularitas irrepat.

SCHOLION 2.

89. Galilæus Galilæi, *qui legem descensus corporum gravium ratiocinando invenit, eandem quoque experientiis consonam deprehendit.* (b) *In tabula scilicet lignea duos circiter cubitos longa canalem excavavit uno digito paulo latiorem, agglutinata intus membrana, ne scabritie sua pilam æneam bene politam in descensu remoraretur. Eam postea supra planum horizontale uno, duobus & pluribus cubitis successive elevavit, & tempus, in qua pila per canalem descendebat, accurate dimetiens, iteratis vel centies experimentis, didicit spatia decursa semper esse ut temporum quadrata. Notandum vero spatia computanda esse non in longitudine, sed in altitudine plani, vi eorum, quæ inferius demonstrabuntur.*

SCHOLION 3.

90. *Eadem experimenta modo tamen diverso sæpius cum* Grimaldo *suo repetiit* Joh. Baptista Ricciolus (c) *plurimos globos cretaceos ejusdem molis, pondere 8 unciarum, ex diversarum turrium aut ædium fenestris demittens & tempus descensus perpendiculi vibrationibus dimetiens. Perpendiculi vibrationes numeravit cum* Grimaldo *a transitu caudæ Leonis per Meridianum usque ad alterum transitum, ut certo constaret, quot vibrationes penduli respondeant quotlibet minutis temporis. Etenim eodem pendulo deinceps usus in observationibus astronomicis, antequam horologia oscillatoria ab* Hugenio *fuissent inventa. Experimenta sequens repræsentat tabella.*

Vibrationes penduli	Tempus		Spatium in fine temporis	Spatium singulis temporibus confectum
	''	'''	Ped. Rom.	Ped Rom.
5	0	50	10	10
10	1	40	40	30
15	2	30	90	50
20	3	20	160	70
25	4	10	250	90
6	1	0	15	15
12	2	0	60	45
18	3	0	135	75
24	4	0	240	105

SCHOLION 4.

91. *Cum adeo experimenta* Riccioli *in observando maxime exercitati in tanto intervallo instituta theoriæ apprime consentiant; vix attendenda esse videntur, quæ in contrarium affert* (d) Dechales, *qui se expertum scribit, uno minuto semisecundo grave descensu suo confecisse pedes* $4\frac{1}{4}$, *duobus* $16\frac{1}{2}$, *tribus* 36, *quatuor* 60, *quinque* 90, *sex* 123. *Sufficit, quod ipse a resistentia aëris irregularitatem deducat, quam in demonstratione insuper habuimus.*

THEO-

(b) In Dialogis de motu locali Dial. 3. p. m. 157. 156.
(c) Almagest. Nov. Tom. 1. lib. 2. c. 21. prop. 4. f. 89. 90.
(d) Staticæ lib. 2. prop. 11. Mund. Math. Tom. 2. f. 175.

THEOREMA 18.

92. *Si grave in medio non resistente per intervallum non nimis magnum descendit, spatium ab eo decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore motu uniformi cum ea velocitate conficitur, quam in fine temporis grave acquirit.*

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 1. Concipiatur recta AB, quæ tempus integrum descensus repræsentet, in partes quotcunque æquales divisa, & ad abscissas AP, AQ, AS, AB applicentur rectæ PM, QI, SH, BC, quæ sint ut celeritates cadendo in istis temporibus acquisitæ. Quoniam itaque AP : AQ = PM : QI, AP : AS = PM : SH &c. (§. 85): & rectæ PM, QI, SH, BC inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Et spatium tempore AB percursum est ut triangulum ABC: quemadmodum ex demonstratione theorematis 15 (§. 80) constat. Spatium vero eodem tempore AB celeritate BC uniformiter descriptum cum sit ut rectangulum ABCD (§. 34); erit utique istud ad hoc ut 1 ad 2 (§. 386 *Geom.*) Q. e. d.

COROLLARIUM.

93. Spatium igitur, quod tempore ipsius AB dimidio celeritate BC in fine temporis AB a gravi acquisita conficitur, æquale est spatio, per quod grave ex quiete tempore AB integro descendit.

PROBLEMA 1.

94. *Dato tempore, quo grave ex altitudine data descendit, spatia definire, quæ singulis istius temporis partibus confecit.*

RESOLUTIO.

Sit altitudo data $= a$, tempus $= t$, spatium parte temporis 1 confectum $= x$; erit (§. 86).

$$1 : t^2 = x : a$$

$$t^2 x = a$$

$$x = a : t^2$$

Est adeo spatium parte temporis prima confectum $a : t^2$, adeoque decursum parte secunda $= 3a : t^2$, tertia descriptum $= 5a : t^2$ &c. (§. 86)

E. gr. supra in experimentis *Riccioli* (§. 90) intra 4 secunda globus cretaceus descendit ex altitudine 240 pedum. Spatium igitur primo secundo confectum $= 240 : 16 = 15$, spatium confectum secundo $= 15 . 3 = 45$, confectum tertio $= 15 . 5 = 75$, confectum denique quarto $15 . 7 = 105$. Est autem $15 + 45 + 75 + 105 = 240$.

PROBLEMA 2.

95. *Dato tempore, quo grave in medio non resistente per spatium datum descendit, determinare tempus, quo aliud spatium datum in eodem medio conficiet.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86), quæratur ad ſpatium, per quod grave dato tempore deſcendit, ſpatium quod in quæſtione eſt, & quadratum temporis dati numerus quartus proportionalis, (§. 302 *Arithm.*), qui erit quadratum temporis quæſiti.

2. Quare ſi inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit ipſum tempus quæſitum. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Globus cretaceus in experimentis *Riccioli* (§. 90) intervallo 4 minutorum deſcendit per ſpatium 240 pedum; quæritur, quo tempore confecturus ſit ſpatium 135 pedum? Invenietur hoc tempus $= \sqrt{(135.16:240)} = \sqrt{(135:15)} = \sqrt{9} = 3$.

PROBLEMA 3.

96. *Dato ſpatio, quod grave in medio non reſiſtente dato aliquo temporis intervallo confecit, determinare ſpatium, quod intra aliud temporis intervallum datum emetietur.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum ſpatia ſint ut quadrata temporum (§. 86); quæratur ad quadratum temporis, quo grave per datum ſpatium deſcendit, ad quadratum temporis, quo aliud quæſitum emetiri debet, atque ad ſpatium datum numerus quartus proportionalis (§. 272 *Arithm.*): qui erit ſpatium quæſitum.

E. gr. Per experimenta *Riccioli* globus cretaceus intervallo duorum ſecundorum confecit ſpatium 60 pedum: quæritur quantum ſpatium confecturus ſit intervallo 4 ſecundorum? Reperietur ſpatium quæſitum 16. 60 : 4 = 4. 60 = 240.

THEOREMA 19.

97. *Si corpus fertur motu uniformiter retardato, ſpatium dimidium ejus percurrit, quod motu uniformi eodem tempore conficeret.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur tempus datum repræſentans recta AB in partes quotcunque æquales diviſa & ad eam applicentur rectæ BC, SH, QI, PM, quæ ſint ut velocitates temporis partibus *o*, PS, BQ, BP, BA reſpondentes, ita ut demiſſis perpendicularibus HE, IF, MG rectæ CE, CF, CG, CB ſint ut celeritates temporibus HE, FI, GM, AB, hoc eſt, BS, BQ, BF, BA amiſſæ. Quoniam CE : CF = EH : FI, CG : CB = GM : BA (§. 70); erit ABC triangulum (§. 268 *Geom.*). Quodſi B*b* ſit tempuſculum infinite parvum, motus erit uniformis, adeoque ſpatiolum a mobili deſcriptum ut Tab. I. Fig. 1.

 areola

areola BbcC, consequenter spatium tempore AB confectum ut triangulum ABC, quemadmodum ex demonstratione theor. 15 (§. 80) constat. Enimvero spatium a mobili celeritate BC tempore AB uniformiter descriptum est ut rectangulum ABCD (§. 34) Ergo illud hujus dimidium (§. 386 *Geom.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

98. *Spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Tab. 1. Fig. 1. Percurrat mobile tempusculo primo spatium 7 pedum; dico, quod secundo confecturum sit spatium 5 pedum, tertio spatium 3, quarto spatium unius, si motus uniformiter retardetur. Sint enim partes axis trianguli æquales BS, SQ, QP, PA ut tempora, semiordinatæ BC, SH, QI, PM ut celeritates in initio temporis cujuslibet: erunt trapezia BSHC, SQIH, QPMI, & $\triangle$ PAM ut spatia temporibus istis descripta: quod patet ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 97). Sit igitur BC=4 & BS=SQ=QP=PA =1; erit SH=3, QI=2, PM=1 (§. 70), BSHC=$(4+3)\ 1:2=\frac{7}{2}$, SQIH=$(3+2)\ 1:2=\frac{5}{2}$, QPMI=$(2+1)\ 1:2=\frac{3}{2}$ (§. 400 *Geom.*), PAM=$\frac{1}{2}$ (§. 392 *Geom.*), consequenter spatia æqualibus temporibus descripta sunt ut $\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}$, hoc est, ut 7.5.3.1 (§. 178 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

99. *Si ad altitudinem* AB *applicentur celeritates* PM, ES, *descensu uniformiter accelerato per spatia* AP, AE *acquisita, locus celeritatum* AMS *erit Parabola.* Tab. 1. Fig. 9.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AP & AE sunt spatia & PM atque ES celeritates descensu per ea acquisitæ; erit AP: AE=$PM^2:ES^2$ (§. 81), hoc est, quadrata semiordinatarum sunt ut abscissæ. Est igitur AMS Parabola. (§. 402 *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

100. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritates sunt ut tempora (§. 68), si ad spatia AP, AE applicentur tempora PM, ES, quibus describuntur, curva temporis AMS erit itidem parabola.

PROBLEMA 4.

101. *Data celeritate mobilis in motu quomodocunque accelerato per tempus, invenire spatium.* Tab. 1. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Designet in axe curvæ AP tempus & semiordinata PM celeritatem eodem acquisitam, sitque AMS

Digitized by Google

AMS locus celeritatum. Ducatur *pm* ipsi PM infinite propinqua. Fiat AP=*t*, PM=*c*, erit P*p*=*dt* & elementum PM*mp*=*cdt* (§. 98 *Analys. infin.*). Enimvero quoniam tempusculo *dt* motus est æquabilis; erit spatiolum a mobili descriptum = *cdt* (§. 34), consequenter $\int cdt$ sive area AMP designabit spatium tempore AP descriptum. Quare si detur celeritas *c* per tempus *t*, non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento *cdt* substituto formula summetur.

E. gr. Sit *c* ut t^n: erit $cdt = t^n dt$, adeoque $\int cdt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$. Sunt igitur spatia APM & AES temporibus AP & AE decursa ut $\frac{1}{n+1} t^{n+1}$ ad $\frac{1}{n+1} T^{n+1}$, consequenter ut t^{n+1} ad T^{n+1} (§. 187 *Arithm.*), adeoque ob $t^n = c$ ut *ct* ad *CT*. Habemus itaque hoc

Theorema. Si celeritas in motu continuo accelerato acquisita fuerit in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata temporis; spatia sunt in ratione composita celeritatum atque temporum.

PROBLEMA 5.

Tab. 1. Fig. 9. 102. *Data celeritate mobilis motu continuo, sed quomodocunque accelerato lati per spatium, invenire tempus.*

RESOLUTIO.

Si celeritas = *c*, tempus = *t*, spatium *r*, elementum spatii *dr* tempusculo *dt* percursum est *cdt* (§. 101). Habemus itaque

$$cdt = dr$$
$$dt = \frac{dr}{c}$$
$$t = \int \frac{dr}{c}$$

Quare si celeritas detur per *r*, non alia re opus est, quam ut valore hoc in elemento *dr:c* substituto formula summetur.

E. gr. Sit in hypothesi *Baliani* *c* ut *r*; erit $dr : r = dt$, adeoque $t = \int \frac{dr}{r} = lr$ (§. 143 *Analys. infin.*). Unde patet *Theorema.* Si in motu accelerato celeritates sunt ut spatia, tempora sunt ut eorum logarithmi.

Et quia $\int \frac{dr}{r}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ 1 divisum; ideo (§. 120 *Analys. infin.*)

Theorema. In hypothesi *Baliani*, in qua celeritates sunt ut spatia, tempus exhibetur per spatia hyperbolica, adeoque ejus determinatio a quadratura hyperbolæ pendet.

Similiter si celeritas fuerit in ratione multiplicata vel submultiplicata quacunque spatii, hoc est, *c* ut r^n; erit $dt = dr : r^n = r^{-n} dr$, consequenter $t =$

$\frac{1}{-n+1}$

$$\frac{1}{-n+1} r^{-n+1} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n} \text{ adeoque}$$

$$T : t = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{R}{R^n} : \frac{1}{1-n} \cdot \frac{r}{r^n}$$

$$= \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$$

$$= Rc : rC$$

Theorema. Si celeritates acquisitæ fuerint in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata spatiorum, erunt tempora in ratione composita ex directa spatiorum & reciproca celeritatum per spatia ista acquisitarum.

SCHOLION.

103. Varignonius, *Geometra eximius*, (c) *doctrinam de motu accelerato & retardato analysi generali absolvens varia dedit exempla, quæ ad exercendam analysin faciunt, etsi in Mechanica, ubi in hypothesibus naturæ exemplo* Galilæi *acquiescere poteramus, nullum habeant usum. Quamobrem ut tyrones ad solutiones problematum Physico-mathematicorum præparemus, utque intelligant principia in his elementis stabilita ad talia sufficere; unum alterumque exemplum evoluta analysi cum primis principiis Matheseos connexum exhibere lubet.*

PROBLEMA 6.

Tab. XI. I. Fig. 121. 104. *Si tempora sint ut abscissæ* AP *& celeritates istis acquisitæ ut semiordinatæ* PM *curvæ* ANS *ejus naturæ, ut semiordinata* PN *sit ad semiordinatam hyperbolæ æquilateræ* PM *in ratione quacunque multiplicata vel submultiplicata dimidii axis* AC *ad abscissam* CP *a centro* C *computatam: invenire spatia dato tempore descripta.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus (§. 101) liquet spatia quæsita esse ut aream APN, adeoque pendere a quadratura curvæ datæ ANS. Quoniam itaque AMR est hyperbola æquilatera, cujus axis transversus AB, centrum C; si fiat AC = a, AP = t; erit BP = $2a+t$, adeoque ob AP. PB = PM^2 (§. 507 *Analys.*) PM^2 = $2at+t^2$, consequenter PM = $\sqrt{(2at+t^2)}$. Quare cum porro sit *per hypoth.*

$$CP^n : AC^n = PM : PN$$

$$(a+t)^n : a^n = \sqrt{(2at+t^2)} :$$

erit PN = $a^n \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n = c$. Est nempe c celeritas tempore AP acquisita, quam PN repræsentat *per hypoth.* Quare si in elemento spatii PNnp = cdt (§. 101) substituatur valor ipsius c; prodibit elementum speciale $a^n dt \sqrt{(2at+t^2)} : (a+t)^n$. Totum adeo negotium huc redit, ut hoc elementum summabile reddatur, quantum datur. Fiat itaque

$a+t$

(c) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. 290. & seqq.

$$a+t=x$$

erit $dt=dx$

$$t=x-a$$

$$\overline{\quad\quad} 2a$$

$$2at=2ax-2a^2$$

$$t^2=a^2-2ax+x^2$$

$$2at+t^2=x^2-a^2$$

$$\surd(2at+t^2)=\surd(x^2-a^2)$$

$$(a+t)^n=x^n$$

$$\frac{a^n dt\surd(2at+t^2)}{(a+t)^n}=\frac{dx\surd(x^2-a^2)}{x^n}$$

Fiat porro

$x^2=\frac{a^3}{a-z}$ adeoque $x=\frac{a^{3:2}}{(a-z)^{1:2}}$

erit $2x\,dx=\frac{a^3 dz}{(a-z)^2}$ $\quad x^n=\frac{a^{3n:2}}{(a-z)^{n:2}}$

$$dx=\frac{a^3 dz}{2x(a-z)^2}$$

$$=\frac{a^3 dz(a-z)^{1:2}}{2a^{3:2}(a-z)^2}$$

$$=\frac{a^{3:2}dz}{2(a-z)^{3:2}}$$

$$a^n dx=\frac{a^{n+3:2}dz}{2(a-z)^{3:2}}$$

Jam

$$x^2-a^2=\frac{a^3}{a-z}-a^2$$

$$=\frac{a^2 z}{a-z}$$

$$\surd.(x^2-a^2)=\frac{az^{1:2}}{(a-z)^{1:2}}$$

adeoque

$$a^n dx\surd(x^2-a^2)=\frac{a^{n+5:2}z^{1:2}dz}{2(a-z)^2}$$

Quare tandem habetur

$$\frac{a^n dx\surd(x^2-a^2)}{x^n}=\frac{a^{n+5:2}z^{1:2}(a-z)^{n:2}}{2a^{3n:2}(a-z)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}a^{(5-n):2}z^{1:2}(a-z)^{(n-4):2}dz$$

Elementum hoc PN *np* areæ APN integrabile est, si *n* fuerit numerus positivus par binario major.

E. gr. Sit $n=4$, erit $(n-4):2=0$, adeoque $(a-z)^{(n-4):2}=(a-z)^0=1$ (§. 55 *Analys.*), consequenter

$$PNnp=\tfrac{1}{2}a^{1:2}z^{1:2}dz,$$

adeoque $ANP=\tfrac{1}{3}a^{1:2}z^{3:2}$

$$=\tfrac{1}{3}z\surd az$$

Jam quia

$$x^2=a^3:(a-z)$$

$$a-z=a^3:x^2$$

$$z=a-a^3:x^2$$

$$az=(a^2x^2-a^4):x^2$$

$$\surd az=a\surd(x^2-a^2):x$$

$$\tfrac{1}{3}z\surd az=\frac{a^2(x^2-a^2)\surd(x^2-a^2)}{3x^3}$$

Porro

$$x=t+a$$

$$x^2=t^2+2at+a^2$$

$$x^2-a^2=t^2+2at$$

$\tfrac{1}{3}z\surd az$

$$\frac{\frac{3}{2}z\sqrt{2az} = a(t^2+2at)\sqrt{(t^2+2at)}}{3(a+t)^3}$$
$$= ANP$$

SCHOLION.

105. *Apparet adeo, exemplum hoc non alium habere usum, quam ad exercendum calculum summatorium. Et idem quoque de sequentibus patebit.*

PROBLEMA 7.

106. *Si celeritas tempore t acquisita fuerit ut $t^{n-1} : (t^{2n} + a^{2n})$, determinare spatium r.*

RESOLUTIO.

Quoniam $dr = cdt$ (§. 101) erit $dr = t^{n-1}\, dt : (t^{2n} + a^{2n})$. Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$t^{2n} = a^{2n-2} x^2$$

erit
$$t = a^{(n-1):n} x^{1:n}$$

$$dt = \frac{1}{n} a^{(n-1):n} x^{1:n-1} dx$$

Porro ob $t^{n-1} = t^n : t$

$$t^{n-1} = a^{n-1} x : a^{(n-1):n} x^{1:n}$$
$$= a^{(nn-2n+1):n} x^{(n-1):n}$$

$$t^{n-1} dt = \frac{1}{n} a^{n-1} dx$$

$$\frac{t^{n-1}\, dt}{t^{2n}+a^{2n}} = \frac{\frac{1}{n} a^{n-1}\, dx}{a^{2n-2}x^2 + a^{2n}}$$
$$= \frac{1}{n} a^{1-n} \cdot \frac{dx}{x^2+a^2}$$

Quare spatium $r = \frac{1}{n} a^{1-n} \cdot \int \frac{dx}{x^2+a^2}$

Si tangens arcus circuli fuerit x, radius a, erit $\int \frac{a^2 dx}{x^2+a^2}$ arcus (§. 185 *Anal. in fin.*), ut adeo quadratura curvæ, quæ spatium r exhibet, pendeat a rectificatione arcus circuli.

Varignonius formulam, quæ exprimit arcum in relatione ad tangentem reducit ad aliam, quæ eundem arcum exhibet in relatione ad sinum versum: id quod fit hoc modo. Sit

$$x = a\sqrt{(2a : y - 1)}$$
$$= a(2ay^{-1} - 1)^{1:2}$$

erit $dx = -a^2 y^{-2} dy : \sqrt{(2ay^{-1} - 1)}$

Elementum hoc in præsente casu sumendum est positivum, quia crescente x decrescit y, consequenter ipsius y differentiale $-dy$.

Porro $x^2 = 2a^3 : y - a^2$

$$x^2 + a^2 = 2a^3 : y$$

Quamobrem

$$\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{a^2 y dy}{2a^3 y^2 \sqrt{(2ay^{-1}-1)}}$$
$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{a dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$$

$$\frac{1}{n} \frac{a^{1-n} dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2na^{n+1}} \cdot \frac{a dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}$$

PRO-

PROBLEMA I.

107. *Data celeritate c tempore t acquisita, quæ sit ut* $t^{n-1}:(t^{2n}-a^{2n})$, *invenire spatium r.*

RESOLUTIO.

Quia $dr = cdt$ (§. 101)

erit $dr = t^{n-1}dt : (t^{2n}-a^{2n})$

Ponatur ut ante (§. 104)

$$t^{2n} = a^{2n-2}x^2$$

reperietur $\frac{t^{n-1}dt}{t^{2n}-a^{2n}} = \frac{dx}{x^2-a^2}$ prorsus ut ante. Ponatur porro

$$x = \sqrt{(2ay^{-1}+1)}$$

reperietur $\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{ady}{2a\sqrt{(2ay+y^2)}}$ ut ante, adeoque tandem

$$dr = \frac{1}{2na^{n+1}} \cdot \frac{ady}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$$

Ponatur denique

$$v - a = y$$

erit $v^2 - 2av + a^2 = y^2$

$$2av - 2a^2 = 2ay$$

$$v^2 - a^2 = y^2 + 2ay$$

$$\sqrt{(v^2-a^2)} = \sqrt{(y^2+2ay)}$$

$$dv = dy$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(v^2-a^2)}} = dy\sqrt{(y^2+2ay)}$$

Tab. XIII Fig. 18. Quoniam $a^2dv : 2\sqrt{(v^2-a^2)}$ est sector hyperbolicus CAM, abscissis a centro computatis (§. 179 (*Wolffii Math. Tom. 2.*) *Analys. infin.*); erit dimidius axis hyperbolæ æquilateræ $= a$ & CP $= v$, consequenter $a^2dy\sqrt{(y^2+2ay)}$ exprimit eundem sectorem CAM, abscissa AP existente y. Patet itaque determinationem spatii in casu præsente pendere a quadratura hyperbolæ.

SCHOLION I.

108. *Apparet ex his problematis, quam utile sit formulas omnes elementorum arcuum, segmentorum & sectorum pro sectionibus conicis aliisque curvis descriptu facilioribus atque cognitarum proprietatum reperire, sibique familiares reddere, ut formulæ non summabiles ad eas tanquam simpliciores reduci possint, quemadmodum & paulo ante vidimus (§. 106) posse constructiones curvarum ad alias descriptu faciliores reduci, per quas construantur: cujus rei exempla quoque dedimus in Algebra (§. 245 & seqq. Analys. infinit.)*

SCHOLION 2.

109. *Potest etiam sectoris* CAM *elementum independenter a formula* $a^2dv : \sqrt{v^2-a^2}$) *inveniri hoc modo. Sit* AC $=$ CB $= a$, AP $= y$, *erit* PB $= 2a + y$, *consequenter ob* $PM^2 = AP \cdot PB$ (§. 507 Analys. finit.) $= 2ay + y^2$ PM $= \sqrt{(2a+y^2)}$, *qua in* $\frac{1}{2}$ CP $= \frac{1}{2}(a+y)$ *ducta prodit area trianguli* CMP $= \frac{1}{2}(a+y)\sqrt{(2ay+y^2)}$. *Ergo* CmM $+$ mMPp $= \frac{1}{2}dy\sqrt{(2ay+y^2)} + \frac{ady + ydy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} \cdot \frac{a+y}{2} = \frac{2aydy + y^2dy + \frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$

 Jam

Jam mMPp $= dy\sqrt{(2ay+y^2)} = \frac{2aydy + y^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}}$. *Ergo* CmM *elementum sectoris* CMA $= \frac{\frac{1}{2}a^2dy}{\sqrt{(2ay+y^2)}} = \frac{a^2dy}{2\sqrt{(2ay+y^2)}}$

DEFINITIO. 18.

110. In motu continuo accelerato celeritatis incrementum tempusculo quocunque infinite parvo successive nascitur. Quamobrem quantitas motus eodem genita resolvitur in innumeras alias æqualibus illius tempusculi particulis natas. Particulas istiusmodi elementaris quantitatis motus tempusculo infinite parvo genitæ dicitur *Sollicitatio ad motum*.

COROLLARIUM.

111. Quodsi ergo istæ particulæ ponantur æquales, quatenus spectantur ut effectus ab eadem causa tempusculis æqualibus producti; si sollicitatio ad motum dicatur *g*, erit nisus elementaris seu quantitas motus tempusculo *dt* genita $= gdt$.

PROBLEMA 9.

112. *Data accelerationis lege, determinare sollicitationem ad motum.*

RESOLUTIO.

Si sollicitatio sit *g*, erit quantitas motus tempusculo *dt* genita $= gdt$ (§. 111). Sit incrementum celeritatis tempusculo isto $= dc$, massa mobilis $= m$. Quoniam tempusculo infinite parvo *dt* motus æquabilis supponitur; erit quantitas motus eodem genita $= mdc$ (§. 22). Habemus itaque $mdc = gdt$, adeoque $g = mdc:dt$.

Quare si ex data accelerationis lege determinetur *dt* per *c* vel contra, prodibit valor ipsius *g*.

E. gr. In hypothesi *Galilæana* gravium seu motu æquabiliter accelerato celeritas *c* est ut tempus *t*, adeoque *dt* ut *dc*. Quare *g* ut *mdc:dc*, hoc est, ut *m*. Quare patet

Theorema: In hypothesi *Galilæana* gravium seu motu æquabiliter accelerato sollicitatio ad motum est ut massa, adeoque constans.

Si fuerit c ut t^n

erit $dc = nt^{n-1}dt$

$$g = \frac{mdc}{dt} = \frac{mnt^{n-1}dt}{dt}$$
$$= mnt^{n-1}$$
$$= mnt^n : t$$
$$= mnc : t$$

Theorema. Si celeritas crescit in ratione temporis multiplicata, erit sollicitatio ad motum ut factum ex massa in celeritatem ductum ulterius in exponentem dignitatis temporis directe & ut tempus reciproce, hoc est, si duo fuerint mobilia, sollicitationes ad motum erunt in ratione composita ex directa massarum & celeritatum in exponentes dignitatis

atis temporum ductarum & reciproca temporum, nempe ut $\frac{NMC}{T}$ ad $\frac{nmc}{t}$

seu ut $NMCt$ ad $nmcT$.

PROBLEMA 10.

113. *Data sollicitatione ad motum, invenire mobilis motu continuo accelerato lati tum velocitatem in locis singulis, tum tempus, quo mobile ad locum datum pervenit.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 122. Sit recta, per quam mobile fertur, AB & normaliter ad eam applicatæ AC, AN &c. sint ut sollicitationes ad motum in A, P &c. PM sit ut celeritas a mobili in P acquisita. Ducatur pn ipsi PN infinite propinqua & dicatur AC $=g$, AP$=r$, PM$=c$, massa mobilis $=m$; erit P$p=dr$. Sit porro tempusculum, quo mobile per Pp descendit, $=dt$: quia motus in spatiolo Pp æquabilis supponitur, erit $c=dr:dt$ (§. 37) & $g=mdc:dt$ (§. 112).

$$cdt=dr \qquad gdt=mdc$$
$$dt=dr:c \qquad dt=mdc:g$$
$$\frac{dr}{c}=\frac{mdc}{g}$$
$$gdr=mcdc$$
$$\int gdr=\tfrac{1}{2}mc^2$$

Est vero $\int gdr$ area APNC & $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}PM^2$. Quare si mobile fuerit idem, erit APNC ut PM^2 (§. 181 *Arithm.*).

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione urgetur, velocitas ejus in fine spatii dati AP acquisita est ut recta, quæ potest aream sollicitationum APNC, seu est in ratione subduplicata hujus areæ.

Porro tempus t reperitur hoc modo:

$$c=dr:dt \qquad \int gdr=\tfrac{1}{2}mc^2$$
$$2\int gdr=c^2$$
$$\frac{2\int gdr}{m}=c^2$$
$$\frac{\sqrt{2\int gdr}}{\sqrt{m}}=c$$
$$dr:dt=\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}$$
$$dr=dt.\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}$$
$$\frac{dr}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}=dt$$
$$\int dr.\frac{1}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}=t$$

Quodsi ergo fiat PL$=\frac{1}{\sqrt{2\int gdr}:\sqrt{m}}$ seu mobili existente eodem, $=\frac{1}{\sqrt{2\int gdr}}$, area DAPLE designabit tempus.

Ponamus jam AQ=R, QS=G; erit C=$\sqrt{\int 2GdR}$, mobili existente eodem, ut massa poni possit 1, aut

ejus nulla habenda sit ratio. Erit adeo

$$C : c = \sqrt{2\int GdR} : \sqrt{2\int gdr}.$$

Sed $PL : QO = \frac{1}{\sqrt{2\int GdR}} : \frac{1}{\sqrt{2\int gdr}}$

$$= \sqrt{2\int gdr} : \sqrt{2\int GdR}$$

Ergo $PL : QO = c : C$

Habemus itaque

Theorema. Si mobile quacunque sollicitatione movetur motu continuo accelerato, erunt tempora QO & PL, quibus spatia data AQ & AP conficit, celeritatibus in fine illorum spatiorum acquisitis reciproce proportionalia, nempe ut PM ad QT.

SCHOLION 1.

114. *Consentit analysis cum iis, quæ* Newtonus (f) *demonstravit, nisi quod is vim centripetam vocet, quod nos* sollicitationem *appellamus. Communiter enim Mathematici celeritatem sumunt tanquam effectum vis motricis eidem proportionalem, atque adeo quantitatem motus tanquam mensuram vis illius. Quare cum* Newtonus *vim illam consideret ut urgentem mobile versus aliquod punctum fixum, eam centripetam appellat. Alii in casu descensus gravium gravitatem vocant, quia gravitas consideratur ut causa acceleratrix motus gravium & celeritate momentis singulis descendenti superaccedens tanquam effectus illius causa.*

SCHOLION 2.

115. *Ex theorematis per problema præsens erutis omnia deducere licet, quæ de motu gravium in hypothesi* Galilæana *sive in alia quacunque demonstrantur. Etenim in hypothesi* Galilæana *est* c *ut* t, *adeoque* dc *ut* dt. *Jam* gdr = cdc (§. 113). *Ergo* gdr = cdt, *consequenter* gdt : dt = c, *adeoque ob* dt : dt = c *erit* gc = c. *Cum adeo sit* g = 1, *gravitas in hypothesi* Galilæana *constans est, hoc est, elementa singula, ex quibus quantitas motus tempusculo infinite parvo constat, sunt inter se æqualia.* Jam *quia* g = 1, *erit in eadem hypothesi* $\int dr = \frac{1}{2}c^2$, *hoc est,* r *ut* c^2, (§. 181. *Arithm.*) *quemadmodum supra* (§. 86). *Similiter cum in hypothesi* Baliani *sit* c *ut* r; *erit* gdr = $\sqrt{}$dr (§. 113), *adeoque* g = r. *Jam initio descensus* r = o: *ergo* g = o, *hoc est, sollicitatio ad motum initio nulla est, seu phrasi communi Mathematicorum gravitas nulla est: quod cum sit absurdum, hypothesis* Baliana *impossibilis.*

COROLLARIUM 1.

116. Quoniam $\sqrt{2\int gdr}$ = APNC continuo crescit, semiordinata PL = 1 : $\sqrt{2\int gdr}$ continuo decrescit. Jam cum sit in A *dr* = *o*; erit AD = 1 : o = ∞. Est igitur AD asymptotus curvæ temporis ELF.

SCHOLION 3.

117. *Hinc patet ratio, cur curva temporis* ELF *ita fuerit delineata, ut cum axe* AB *non concurrat, sicuti curva celeritatum* AMH, *neque rectam* AD *ad axem* AB *normalem secet, sicuti curva sollicitationum* ENG.

CO-

(f) In Princip. Phil. natural. mathemat. lib. 1. prop. 39. p. 120. edit. ult. Anglic.

COROLLARIUM 2.

118. Cum sit $gdr = cdc$ (§. 113), adeoque $g = cdc : dr =$ PM. MR: Pp. Sollicitatio ad motum in quacunque accelerationis hypothesi erit ut subnormalis curvæ celeritatum (§ 35 *Analys. infin.*)

PROBLEMA II.

Tab. XIII. Fig. 123. 119. *Si sollicitatio centralis sit distantiæ a centro AD, PD &c. proportionalis, invenire velocitatem in quovis puncto P & tempus descensus per AP.*

RESOLUTIO.

Quoniam AD: PD = AC: PN *per hypoth.* scala sollicitationum centralium DC est linea recta & figura ADC triangulum (§. 268 *Geom.*). Sit AD $= a$, AP spatium descensus $= r$, PN sollicitatio in P $= g$, erit PD $= a - r$. Est vero PN ut PD *per hypoth.*, adeoque g ut $a - r$. Quare cum sit (§. 113).

$$\int gdr = \tfrac{1}{2} c^2$$

erit $\int adr - \int rdr = \tfrac{1}{2} c^2$

$$ar - \tfrac{1}{2} r^2 = \tfrac{1}{2} c^2$$

$$2ar - r^2 = c^2$$

$$\sqrt{(2ar - r^2)} = c$$

Jam cum AD $= a$, AP $= r$: si ex centro D radio AD describatur Quadrans AIH, erit semiordinata PI $= \sqrt{(2ar - r^2)}$ (§. 377 *Anal. finit.*) Habemus itaque sequens

Theorema. Si sollicitatio centralis sit proportionalis distantiæ locorum a centro, velocitates in fine spatii acquisitæ sunt sinibus arcuum respondentium proportionales, circuli quadrante ex centro per locum initialem descripto.

Porro $dr = cdt$ (§. 101).

Sed $c = \sqrt{(2ar - r^2)}$ *per demonstrata*

Ergo $dr = dt \sqrt{(2ar - r^2)}$

$$dt = dr : \sqrt{(2ar - r^2)}$$

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$$

Quoniam $a \int \frac{dr}{\sqrt{(2ar - r^2)}}$ est arcus AI (§. 157 *Anal. infin.*); erit tempus descensus per AP ut arcus circuli AI. Habemus itaque sequens

Theorema. In hypothesi problematis tempora descensus per spatia AP sunt ut arcus circuli AI ex centro D descripti.

Quodsi species curvæ celeritatum AMG desideretur, fiat AC $= b$.

Cum sit AD:AC = DP. PN *per hyp.*

$$a : b = a - r :$$

erit PN $= g = (ab - br) : a = b - br : a$

Sed $\tfrac{1}{2} c^2 = \int gdr$ (§ 113)

Ergo $\tfrac{1}{2} c^2 = \int bdr - \int brdr : a$
$= br - br^2 : 2a$

$$c^2 = 2br - 2br^2 : 2a$$

Patet itaque (§. 421 *Anal. finit.*) sequens

Digitized by Google

Theorema. In hypothesi problematis locum celeritatum AMG esse ellipsin, cujus parameter 2AC est dupla sollicitatio initialis, axis major 2AD dupla distantia mobilis initio descensus a centro.

Si $a=r$, erit $GD^2=2ab-2a^2b:2a=2ab-ab=ab$, adeoque $GD=\sqrt{ab}$. Cum itaque GD sit axis dimidius conjugatus (§. 42 3 *Analys. finit.*); erit in D centrum ellipseos & AMG ejus quadrans.

COROLLARIUM.

120. Cum arcus AI & AH exponant tempora, quibus corpus quodvis per spatia AP & AD descendit, si sollicitationes fuerint distantiis a centro proportionales, per idem spatium corpus quodvis eodem tempore descendit, motu ex quiete ab eodem termino incipiente.

SCHOLION.

121. *Omnia hæc consona sunt iis, quæ* Newtonus (g) *demonstravit.*

CAPUT III.

DE

CENTRO GRAVITATIS.

DEFINITIO 19.

122. *Centrum gravitatis* est, per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Dicitur autem pars una *æquiponderare* alteri, si neutra alteram movet.

COROLLARIUM 1.

123. Quodsi ergo descensus centri gravitatis impeditur, grave quiescit.

COROLLARIUM 2.

124. Quare si corpus ex centro gravitatis suspenditur, grave non movetur.

COROLLARIUM 3.

125. Totam corporis gravitatem in centrum gravitatis coactam supponere licet, adeoque pro corpore gravi solum centrum gravitatis surrogari potest in demonstrationibus.

DEFINITIO 20.

126. *Diameter gravitatis* est recta transiens per centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

127. Intersectio itaque duarum diametrorum determinat centrum gravitatis.

DEFINITIO 21.

128. *Planum gravitatis* est figura plana, in qua situm est centrum gravitatis.

COROLLARIUM.

129. Communis ergo intersectio duo-

(g) In Princip. Phil. nat. mathem. lib. 1. prop. 38. p. 119.

Digitized by Google

duorum planorum gravitatis aut plurium est diameter gravitatis.

DEFINITIO 22.

130. *Gravia homogenea* sunt, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ erunt quoque pondere æquales.

DEFINITIO 23.

131. *Gravia heterogenea* sunt, quorum gravitates non sunt voluminibus proportionales.

E. gr. Si totum grave dividas in partes quotcunque volumine æquales; singulæ inter se non erunt pondere æquales. Aut si duorum gravium partes sumas volumine æquales & eædem sint pondere inæquales; gravia inter se heterogenea sunt, licet in se homogenea esse possint.

DEFINITIO 24.

132. *Centrum magnitudinis* est punctum, per quod linea vel figura dividitur in duas partes æquales.

THEOREMA 22.

133. *Corpora quævis gravia ex quiete in medio non resistente eodem tempore per idem spatium cadunt.*

DEMONSTRATIO.

Descendat grave A per spatium r: erit tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Descendat etiam grave B per idem vel æquale spatium r: erit etiam tempus descensus ut $\sqrt{r}$ (§. 87). Si ergo spatium descensus ex quiete idem est, tempus etiam descensus idem est. *Q. e. d.*

SCHOLION.

134. *Idem observatione confirmatur. Nam in spatio ab aëre vacuo (quod quomodo obtineatur, in Aerometria docemus) levissima plumula eodem tempore ex data altitudine descendit, quo globus plumbeus. Imo si corpora magna & ponderosa in aere per æqualia intervalla demittantur, eodem tempore pavimentum attingunt, modo altitudines sint mediocres, monente* Hugenio (h). *Pendulorum inprimis experientia id doceri potest. Unde experimenta, quibus* Ricciolus *globos argillaceos 20 unciarum, & chartaceos, sed argillacea testa superinductos, mole istis æquales, sed pondere subduplos per intervallum 280 pedum demittens contrarium probare conatur* (i) *ideo non consentiunt, quia resistentia aeris in utroque globorum genere fuit admodum diversa.*

COROLLARIUM.

135. Quoniam corporum gravium ex quiete cadentium celeritates in fine temporis acquisitæ sunt ut tempus (§. 89); velocitates gravium descendentium ex quiete dato tempore æquales sunt.

THEO-

(h) In Horologio oscillatorio part. 4. prop. 9.
(i) Almag. Nov. Tom. 1. lib. 2. c. 1. prop. 1. f. 89.

THEOREMA 23.

136. *Materia, quæ cum corporibus movetur, etiam cum ipsis gravitat.*

DEMONSTRATIO.

Quia velocitates gravium descendentium dato tempore æquales sunt (§.135); quantitates motus in fine illius temporis sunt ut materiæ, quæ cum ipsis movetur, quantitates (§. 46). Jam vero gravitas est nisus versus centrum terræ (§.4), qui adest, ubi motus ex quiete inchoatur, adeoque illud quod quantitati motus accedit, consequenter sollicitatio ad motum (§.110). Sed sollicitatio est etiam massæ proportionalis (§. 112). Ergo materia, quæ cum gravibus movetur, etiam cum ipsis gravitat. *Q. e. d.*

SCHOLION.

137. *Liquet jam veritas definitionis quintæ* (§. 6).

COROLLARIUM 1.

138. Massa igitur corporum recte æstimatur per pondus.

COROLLARIUM 2.

139. Cum in corporibus homogeneis gravitates voluminibus proportionales sint (§. 130); quantitates motus in iis sunt in ratione composita celeritatum & voluminum (§. 45) & si eadem celeritate ferantur, ut volumina (§. 46): in quibus vero quantitates motus æquales sunt, eorum celeritates rationem voluminum reciprocam habent (§. 42).

COROLLARIUM 3.

140. Massa invariata pondus non mutatur, quomodocunque varietur figura.

AXIOMA 5.

141. *In homogeneis, quæ secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possunt, centrum gravitatis idem est cum centro magnitudinis.*

COROLLARIUM.

142. Quodsi ergo linea recta AB bifariam secetur in C; erit C centrum gravitatis. Tab. I. Fig. 2.

SCHOLION.

143. *Tale corpus homogeneum, quod secundum longitudinem in partes similes secari potest, est e gr. cylindrus plumbeus. Si enim longitudo AE concipiatur in tres partes æquales ED, DC & CA vel quotcunque plures divisa; secabitur in cylindros æquales, cum eorum bases & altitudines æquales sint* (§. 535 Geom.) *atque similes, cum altitudines sint ut diametri basium* (§. 570. Geom.). Tab. I. Fig. 3.

THEOREMA 24.

144. *Si centra gravitatis duorum corporum A & B jungantur recta AB centri gravitatis communis C distantiæ BC & CA a centris gravitatis particularibus B & A sunt reciproce ut pondera A & B.* Tab. I. Fig. 4.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim rectam AB divisam

visam esse in C in ratione reciproca ponderum A & B. Sit e. gr. pondus A 6 librarum, pondus B 2, & AC : CB = 1 : 3. Concipiatur recta AB utrinque producta in D & E, donec BD = AC & AE = CB; erit EC = CD (§. 88 *Arithm.*). Concipiatur porro recta ED in 8 partes æquales divisa, quot nempe librarum sunt pondera junctim sumta, & quoniam gravitas non mutatur, quomodocunque varietur figura (§. 140), gravitas corporum A & B per rectam ED æqualiter diffusa concipiatur, centris gravitatis manentibus in A & B. Diffundetur adeo gravitas ipsius B per FD & gravitas ipsius A pet EF uniformiter (§. 142), consequenter pondera A & B junctim sumta rectam ED repræsentabunt. Hujus vero centrum gravitatis commune est in C (*§. cit.*). Ergo idem est centrum gravitatis commune ponderum A & B. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

145. Quodsi gravitates corporum A & B fuerint æquales, centrum gravitatis commune C erit in medio rectæ AB centra gravitatis conjungentis.

COROLLARIUM 2.

146. Quia A : B = BC : AC; erit A. AC = B. BC. Unde patet vires æquiponderantium æstimandas esse per factum ex massa in distantiam a centro gravitatis. Factum hoc *Momentum* ponderum vulgo vocant.

SCHOLION.

147. *Theorema hoc utilissimum experimento non inelegantì illustrari potest. Ex ligno parentur parallelepipeda plura inter se æqualia & quorum latitudo sit dupla profunditatis, longitudo vero sextupla latitudinis: quamvis necesse non sit, ut hæ rationes accurate observentur, sufficit enim longitudinem aliquoties excedere reliquas dimensiones. Parentur* Tab. *præterea alia quædam: unum sit longi-* I. *tudinis duplæ, alterum triplæ, tertium* Fig. *quadruplæ & ita porro. Quodsi paral-* 5. *lelepipedum longitudinis duplæ colloces super latere prismatis trigoni, ita ut latus prismatis ipsum dividat in partes æquales* AC *&* CB; *partes* AC *&* CB *æquiponderabunt: quo ipso axioma* (§. 141) *confirmatur. Collocetur porro parallelepipedum triplæ longitudinis* DE *ea lege super prismate, ut ejus latus ipsum dividat in partes* DF *&* FE, *quæ sunt in ratione subdupla: pars* FE *præponderabit. Quodsi vero tria parallelepipeda simplicis longitudinis ipsi* DF *superimposueris; quatuor parallelepipeda duobus* FK *&* KE *in unum* FE *conjunctis æquiponderabunt. Est enim ipsius* FE *centrum gravitatis in* K *& ipsius* DF *in medio* L *per experimentum primum. Distantiæ igitur centrorum gravitatis a fulcro* LF *&* FK *sunt ut* DF *&* FE *seu ut pondera* (§. 130 Mech. & 573 Geom.). *Est ergo ibi centrum gravitatis commune, ut habet theorema nostrum* (§. 144). *Eodem modo deprehenduntur 9 prismata sibi mutuo superimposita æquiponderare*

vare uni IH, *cujus longitudo illorum longitudinis tripla, & ita porro.*

COROLLARIUM 3.

Tab. I. Fig. 4. 148. Quoniam A : B = BC : AC (§. 144); erit etiam A + B : A = BC + AC : BC (§. 190 *Arithm.*)

COROLLARIUM 4.

149. Reperitur adeo centrum gravitatis commune duorum ponderum C, si factum ex pondere uno A in distantiam centrorum gravitatis separatorum AB (= AC + CB) dividatur per summam ponderum A & B (§. 302 *Arithm.*). Sit e. gr. A = 12, B = 4, AB = 24; erit BC = 24. 12 : 16 = 18.

COROLLARIUM 5.

150. Quodsi pondus A detur & distantia centrorum gravitatis particularium AB una cum cento gravitatis communi C, reperitur pondus B = A. AC : BC (§. 302 *Arithm.*), hoc est, si momentum ponderis dati dividatur per distantiam ponderis quæsiti B a centro gravitatis communi (§. 146). Sit e. gr. A = 12, BC = 18, AC = 6; erit B = 6. 12 : 18 = 12 : 3 = 4.

PROBLEMA 12.

Tab. I. Fig. 6. 151. *Ponderum plurium datorum* a, b, c, d *centrum gravitatis commune in recta* AB *determinare.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis commune duorum ponderum *a* & *b* (§. 149): quod sit in F.
2. In F concipiatur applicari pondus *a* + *b* duobus reliquis *a* & *b* æquale (§. 125) & quæratur porro in recta FE centrum gravitatis commune ponderum *a* + *b* & *c* (§. 149): quod sit in G.
3. Denique in G concipiatur applicari pondus *a* + *b* + *c* duobus *a* + *b* & *c* æquale (§. 125) & quæratur inter ipsum & pondus *d* centrum gravitatis commune in recta GB (§. 149): quod sit in H.

Est adeo H centrum gravitatis commune ponderum *a*, *b*, *c* & *d*. Patet etiam, quomodo sit progrediendum, si plura pondera dentur. Sit e. gr. *a* = 20, *b* = 10, *c* = 15, *d* = 5, AC = 9, CE = 6, EB = 12: erit AF = *b*. AC : (*a* + *b*) = 10. 9 : 30 = 3, adeoque FC = 6 & FE = FC + CE = 12. Hinc reperitur FG = *c*. FE : (*a* + *b* + *c*) = 15. 12 : 45 = 4. Quare GE = FE − FG = 8 & GB = GE + EB = 20. Invenitur adeo GH = *d*. GB : (*a* + *b* + *c* + *d*) = 5. 20 : 50 = 2. Unde HB = GB − GH = 18 & (ob AB = AC + CE + EB = 27) AH = 9.

PROBLEMA 13.

152. *Duobus ponderibus* D & E *extra centrum gravitatis commune in* C *suspensis, determinare, quodnam eorum & quantum præponderet.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quodlibet pondus ducatur in distantiam suam a centro suspen-

ſpenſionis, nempe D in AC & E in BC: ex qua parte factum majus prodit, verſus eam eſt præponderatio.

2. Factum minus a majore ſubtrahatur: erit reſiduum præpondium.

E. gr. Sit D = 30 librarum, E = 20, AC = 2, BC = 4: erit D. AC = 60, E. BC = 80, adeoque E præponderat in B momento ut 20.

DEMONSTRATIO.

Sit AC : CB = *d*: *md* & pondus D = *mp*; æquiponderabit eidem in B pondus *p* (§. 144). Sed pondus E majus eſt quam *p*. Dicatur ergo exceſſus *r*, ita ut ſit E = *p* + *r*. Quoniam momentum ipſius *r* æquale eſt momento ponderis in A eidem æquiponderantis, hoc vero reperitur *mrd* (§. 146); exceſſus momenti ponderis E ſupra momentum alterius D eſt *mrd*. Sed *mrd* eſt differentia inter *mpd* & *mpd* + *mrd*, hoc eſt, inter D. AC & E. BC. Relinquitur adeo exceſſus momenti ipſius E ſupra momentum alterius D, ſi factum D. AC ex E. CB ſubtrahitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

153. Ponderum D & E itaque extra centrum gravitatis in C ſuſpenſorum momenta ſunt in ratione compoſita ipſorummet ponderum D & E & diſtantiarum a puncto ſuſpenſionis AC & CB.

COROLLARIUM 2.

154. Ponderis itaque ex ipſo puncto C ſuſpenſi momentum reſpectu reliquorum D & E nullum eſt, ſeu eadem ratione D & E inter ſe ponderant, ac ſi pondus in C plane abeſſet, quia ſcilicet diſtantia ejus nulla eſt.

PROBLEMA 14. Tab. I. Fig. 8.

155. *Determinare præponderationem, ponderibus pluribus* a, b, c, d *extra centrum gravitatis in* C *ſuſpenſis.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur pondera *c* & *d* in ſuas diſtantias a puncto ſuſpenſionis CE & EB: ſumma dabit momentum ponderum *c* & *d* junctim, ſeu ponderationem verſus dexteram (§. 153).

2. Ducantur quoque pondera *a* & *b* in ſuas diſtantias AC & CD: ſumma denuo dabit ponderationem verſus ſiniſtram (§. *cit.*).

3. Quodſi ergo ponderationem majorem a minore ſubtrahas, relinquetur tandem præponderatio quæſita.

E. gr. Sit AC = 6, DC = 4, CE = 5, CB = 8, *a* = 12, *b* = 15, *c* = 20, *d* = 8: erit ponderatio verſus dexteram = *c*. EC + *d*. CB = 20. 5 + 8. 8 = 164; verſus ſiniſtram = *a*. AC + *b*. DC = 12. 6 + 15. 4 = 132. Præponderant ergo *c* & *d* verſus dexteram momento ut 32.

PROBLEMA 15.

156. *Ponderibus quotcunque*

 extra

Tab. I. Fig. 8. *extra centrum gravitatis in* C *suspensis & versus dexteram præponderantibus, determinare punctum* F, *ex quo si summa omnium ponderum suspendatur, eadem maneat præponderatio versus dexteram, quæ fuerat ante in dato ponderum* a, b, c, d *situ.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur momentum, quo pondera *c* & *d*, vel quotcunque fuerint, versus dexteram præponderant (§. 155).

2. Cum momentum summæ ponderum in F suspendendæ eidem æquale esse debeat; momentum modo inventum erit factum ex CF in summam ponderum (§. 153). Quare si per summam ponderum dividatur; quotus erit distantia CF, ex qua suspendenda est ponderum summa, ut eadem maneat præponderatio, quæ fuerat ante (§. 210 *Arithm.*).

E. gr. Sint omnia ut in probl. præc. erit momentum, quo pondera versus dexteram præponderant 32. Quodsi hoc dividas per summam ponderum 55, quotus $\frac{32}{55}$ est distantia CF quæsita.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 9. 157. Si elementa figurarum, quale *m* MN*n*, concipiantur instar ponderum ad axem AE appensorum & in vertice A punctum suspensionis; determinabitur punctum in AE, ex quo summa omnium ponderum suspensa eodem modo ponderat ac tota figura, hoc est, centrum gravitatis (§. 125), summa momentorum omnium pondusculorum per summam pondusculorum divisa (§. 153). Sit enim AP $= x$, MP $= y$, P$p = dx$; erit unum pondusculum $2ydx$, summa omnium $2\int ydx$, momentum unius ponduscuIi $2yxdx$ (§. 153), summa omnium $2\int yxdx$, consequenter distantia centri gravitatis a vertice AF $= \int yxdx : \int ydx$. Quodsi adeo differentialia $yxdx$ & ydx integrentur, ut in analysi infinitorum docuimus, centrum gravitatis determinatur.

PROBLEMA 16.

158. *Determinare centrum gravitatis in triangulo* BAC. Tab. I. Fig. 10.

RESOLUTIO.

Ducatur recta AD basin BC bifariam secans in D. Quoniam $\triangle$ BAD $= \triangle$ DAC (§. 440 *Geom.*); utrumque in totidem pondusculа ad communem axem AD eodem modo utrinque applicata resolvi potest; adeoque centrum gravitatis $\triangle$ BAC erit in AD (§. 122). Illud igitur ut determinetur, fiat AD$=a$, BC$=b$, AP $= x$, MN$=y$ erit (§. 397 *Geom.*)

$$AP : MN = AD : BC$$
$$x : y = a : b$$

Hinc $y = bx : a$. Ducatur AE $= c$ perpendicularis ad BC, erit AD : AE $=$ AP : AQ (§. 396 *Geom.*), adeoque AQ$=cx : a$ & Q$q = cdx : a$.

Unde

Unde momentum $yxdx = cbx^2dx : a^2$ & $\int yxdx = cbx^3 : 3a^2$, quæ summa per aream trianguli AMN $= cbx^2 : 2a^2$ (§. 392 *Geom.*) divisa dat distantiam centri gravitatis a vertice $= 2abx^3 : 3abx^2 = \frac{2}{3}x$ (§. 157). Quodsi pro x substituatur a; prodibit distantia centri gravitatis totius trianguli a vertice $\frac{2}{3}a = \frac{2}{3}$ AD.

PROBLEMA 17.

159. *Determinare centrum gravitatis in parabola.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 9. Ad parabolam est

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx \text{ (§. 103 Anal. inf.)}$$

$$xydx = a^{1:2}x^{3:2}dx$$

$$\int xydx = \tfrac{2}{5}a^{1:2}x^{5:2}$$

sed $\int ydx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$ (§. cit.)

Ergo $\int xydx : \int ydx = \frac{3}{5}x =$ AF (§. 157).

PROBLEMA 18.

160. *Determinare centrum gravitatis in omnibus parabolis superiorum generum & curvis agnatis in infinitum.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis est (§. 105 *Analys. infinit.*).

$$ydx = a^{n:r}x^{m:r}dx$$

$$xydx = a^{n:r}x^{(m+r):r}dx$$

$$\int xydx = \frac{r}{m+2r}\, a^{n:r}x^{(m+2r):r}$$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}\, a^{n:r}x^{(m+r):r} \text{ (§. cit.)}$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{m+r}{m+2r}\, x = \text{AF (§. 157)}$$

E. gr. in paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ (§. 519 *Analys. finit.*). Ergo AF $= \frac{4}{7}$ AP.

In paraboloide biquadratico $m = 1$, $r = 4$. Ergo AF $= \frac{5}{9}$ AP.

In paraboloide surdesolidali $m = 1$, $r = 5$. Ergo AF $= \frac{6}{11}$ AP.

Si fuerit $ax^2 = y^3$; erit $m = 2$, $r = 3$, AF $= \frac{5}{8}$ AP.

Si $ax^3 = y^4$; erit $m = 3$, $r = 4$, AF $= \frac{7}{11}$ AP.

Si $ax^4 = y^5$; erit $m = 4$, $r = 5$, AF $= \frac{9}{14}$ AP.

COROLLARIUM.

161. Distantia ergo centri gravitatis a basi FP est $= x - \frac{m+r}{m+2r}x = \frac{mx+2rx-mx-rx}{m+2r} = \frac{r}{m+2r}x$.

E. gr. in parabola *Apolloniana* $m = 1$, $r = 2$. Ergo PF $= \frac{2}{5}$ AP.

In paraboloide cubicali $m = 1$, $r = 3$ Ergo PF $= \frac{3}{7}$ AP.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $m = 2$, $r = 3$. Ergo PF $= \frac{3}{8}$ AP.

PROBLEMA 19.

162. *Determinare centrum gravitatis in parabola exteriore AST.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Si AQ $= x$, QM $= y$, parameter $= 1$; erit (§. 388 *Analyſ. finit.*) $x^2 = y$ & hinc

$$xydx = x^3 dx$$
$$\int xydx = \tfrac{1}{4} x^4$$
$$\int ydx = \tfrac{1}{3} x^3$$

$$\int xydx : \int ydx = \tfrac{3}{4} x = \tfrac{3}{4} AQ = AL.$$

PROBLEMA 20.

163. *Determinare centrum gravitatis in infinitis parabolis exterioribus ſuperiorum generum & aliis curvis agnatis.*

RESOLUTIO.

Si parameter $= 1$, pro infinitis parabolis ſuperioribus & curvis agnatis eſt $x^r = y^n$ (§. 519 *Analyſ. finit.*). Quare

$$ydx = x^{r:n} dx$$
$$xydx = x^{(r+m):m} dx$$
$$\int xydx = \frac{n x^{(r+2n):n}}{r+2n}$$
$$\int ydx = \frac{n}{r+n} x^{(r+n):n}$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{r+n}{r+2n} x = AL.$$

E. gr. in paraboloide cubicali $r=3$, $n=1$. Ergo AL $= \frac{4}{5}$ AQ.

In paraboloide biquadratico $r=4$, $n=1$. Ergo AL $= \frac{5}{6}$ AQ.

In paraboloide ſurdeſolidali $r=5$, $n=1$. Ergo AL $= \frac{6}{7}$ AQ.

In curva, ad quam $x^3 = y^2$, $r=3$, $n=2$. Ergo AL $= \frac{5}{7}$ AQ.

In curva, ad quam $x^4 = y^3$, $r=4$, $n=3$. Ergo AL $= \frac{7}{10}$ AQ.

PROBLEMA 21.

164. *Determinare centrum gravitatis in curva, ad quam* $b^2 y = bx^2 - x^3$.

RESOLUTIO.

Quoniam $ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$ (§. 99 *Anal. infinit.*)

$$xydx = (bx^3dx - x^4dx) : b^2$$
$$\int xydx = x^4 : 4b - x^5 : 5b^2 = (5bx^4 - 4x^5) : 20b^2$$
$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2 = (4bx^3 - 3x^4) : 12b^2$$

$$\int xydx : \int ydx = \frac{12b^2(5bx^4 - 4x^5)}{20b^2(4bx^3 - 3x^4)} = \frac{15bx - 12x^2}{20b - 15x} = AF$$

Eſt adeo $20b - 15x : 15b - 12x = x : AF$.

PROBLEMA 22.

165. *Determinare centrum gravitatis cujuslibet arcus circuli.*

RESOLUTIO.

Sit Ap od AB normalis ipſi DP infinite propinqua; erit arculus DM infinite parvus. Sit chordæ DE arcus dati DHE diameter AB parallela, quæ inſtar axis conſideretur, Tab. I. Fig. II.

retur, ad quem ponduſcula MD applicata, quorum adeo momenta erunt ut MD. PD. Quoniam itaque ad radium HC, qui arcum DE in H (§. 291 *Geom.*) biſecat, ponduſcula & numero & momento æqualia utrinque diſponuntur; tranſit is per centrum gravitatis (§. 122). Sit jam PC = DG = x, DC = a, erit DR = Pp = dx. Jam cum ſit angulus CDM rectus (§. 319 *Geom.*) & PDE itidem rectus (§. 230 *Geom.*), adeoque PDC = RDM (§. 91 *Arithm.*), ſintque etiam anguli DRM & DPC recti *per conſtruct.* erit MD : DR = DC : PD, (§. 267 *Geom.*) & hinc reperietur MD.PD = DR.DC = adx (§. 297 *Arithm.*). Summa ergo momentorum arcus DH ax = DC. DG, quæ diviſa per arcum DH centri gravitatis F diſtantiam a centro circuli C determinat (§. 157). Eſt itaque arcus DH : DG = DC : CK.

Quodſi pro DH ponatur quadrans AH & pro DG radius AC; prodibit diſtantia centri gravitatis ſemiperipheriæ AC^2 : AH, hoc eſt, diſtantia hæc CF eſt tertia proportionalis ad quadrantem & radium.

PROBLEMA 23.

166. *Determinare centrum gravitatis in ſectore circuli* ACB.

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 12.

Ex antecedentibus liquet, ſi DC ſectorem bifariam ſecet, centrum gravitatis fore in recta DC. Ducatur radio PC arcus PNM & radio pC alius pnm alteri infinite propinquus. Quoniam ſegmentum annulare eſt ponduſculum ex centro C ſuſpenſum, & quidem ſimul differentiale ſectoris; erit momentum arcus PNM ductum in Pp ſeu Nn momentum ſegmenti annularis PNMmnp, hoc eſt, differentiale momenti ſectoris. Jam momentum arcus ADB = 2AC. AE & momentum arcus PNM = 2PC. Pn (§. 156) & △ ACB = ½ EC. AE atque △ PCM = Pn. ½ Cn (§. 392 *Geom.*). Eſt igitur △ ACP : △ PCM = EC. AE : Cn. Pn & momenta arcuum ADB & PNM = AC. AE : PC. Pn (§. 181 *Arithm.*). Eſt vero AC : PC = EC : Cn (§. 268 *Geom.*). Ergo △ ACB : △ PCM = AC. AE : PC. Pn. (§. 184 *Arithm.*), conſequenter momentum arcus ADB eſt ad momentum arcus PNM ut △ ACB ad △ PCM (§. 167 *Arithm.*), hoc eſt, ut AC^2 ad PC^2 (§. 399 *Geom.*). Sit jam arcus AD = p, AC = a, AE = b; erit momentum arcus ADB = $2ab$ (§. 165). Sit porro PC = x; reperietur per modo demonſtrata momentum arcus

cus PNM $= 2abx^2 : a^2 = 2bx^2 : a$, momentum vero ſegmenti annularis PM*mp* $= 2bx^2dx : a$. Hujus ſumma $2bx^3 : 3a$ eſt momentum ſectoris CPM. Quare ſi fiat $x=a$, erit momentum ſectoris CAB $= 2a^3b : 3a = \frac{2}{3} a^2b$, quo per ſummam ponderum ſeu aream ſectoris ACB $= ap$ diviſo, prodibit diſtantia centri gravitatis ſectoris ACB $= 2ab : 3p = 2AC . AE : 3AD$. Eſt vero AC. AE : AD diſtantia centri gravitatis arcus a centro circuli CF (§. 165). Diſtantia igitur centri gravitatis ſectoris a centro circuli eſt ad diſtantiam centri gravitatis arcus ut 2. ad 3.

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 11. 167. Diſtantia ergo centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli C ſunt $\frac{2}{3} AC^2 : AH$ (§. 156). Quare ut $\frac{1}{3}$ AH ſeu arcus 60° ad $\frac{2}{3}$ AC ita $\frac{1}{3}$ AC ad diſtantiam centri gravitatis ſemicirculi a centro circuli (§. 185 *Arithm.*).

PROBLEMA 24.

Tab. I. Fig. 11. 168. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti* DHED.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis trianguli DCE (§. 158): quod ſit in L.
2. Quæratur centrum gravitatis ſectoris DCEHD (§. 166); quod ſit in F.
3. Cum F ſit commune centrum gravitatis trianguli DCE & ſegmenti DEHD; quæratur ad ſegmentum DEHD, triangulum DCE & LF quarta proportionalis GK: erit GK diſtantia centri gravitatis ſegmenti K a diſtantia centri gravitatis ſectoris F (§. 144). Exprimenda vero eſt ratio ſegmenti ad triangulum lineis rectis: quod quidem accurate præſtare licebit data circuli quadratura.

PROBLEMA 25.

169. *Invenire centrum gravitatis Lunulæ Hippocratis* ADBEA. Tab. II. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis ſemicirculi ADB (§. 156): quod ſit in G.
2. Quæratur porro centrum gravitatis ſegmenti AEBFA (§. 168): quod ſit in H.
3. Cum adeo G ſit centrum gravitatis commune Lunulæ *Hippocratis* ADBEA & ſegmenti AEBA; quæratur ad Lunulam, ſegmentum & HG quarta proportionalis GI: erit GI diſtantia centri gravitatis Lunulæ I a centro gravitatis ſemicirculi G (§. 144).

Ex-

Exprimenda vero est ratio segmenti AEBA ad Lunulam ADBEA lineis, nisi numeris utamur.

PROBLEMA 26.

Tab. I. Fig. 9. 170. *Invenire centrum gravitatis in parabola truncata* SMNH.

RESOLUTIO.

1 Quæratur centrum gravitatis parabolæ MAN (§. 159): quod sit in F.

2. Quæratur item centrum gravitatis parabolæ SAH (§. *cit.*) quod sit in D.

3. Quoniam centrum gravitatis commune parabolæ MAN & parabolæ truncatæ SMNH in O; quæratur porro ad parabolam truncatam SMNH, parabolam MAN & distantiam FO quarta proportionalis OK: erit in K centrum gravitatis parabolæ truncatæ (§. 144).

SCHOLION.

171. *Patet, eadem methodo, quam nunc uno alteroque exemplo illustravimus, semper inveniri centrum gravitatis differentia duarum figurarum, quarum centra gravitatis dantur.*

PROBLEMA 27.

Tab. II. Fig. 14. 172. *Invenire centrum gravitatis in parallelogrammo & parallelepipedo.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diagonales AD & EG, itemque CB & HF. Quoniam diagonalis utraque AD & CB parallelogrammum ACDB bifariam dividit (§. 337 *Geom.*); utraque per centrum magnitudinis (§. 132), adeoque & gravitatis transit (§. 122), consequenter in I est centrum gravitatis parallelogrammi (§. 141). Eodem modo patet in K esse centrum gravitatis parallelogrammi EFGH. Similiter quia tam planum GBFH, quam ADGE parallelepipedum bifariam dividit (§. 537 *Geom.*); utrumque per centrum gravitatis ejus transit (§. 141), adeoque communis intersectio IK est diameter gravitatis (§. 126).

2. Dividatur IK bifariam in L. Quoniam planum transiens per L & basibus parallelum parallelepipedum bifariam dividit (§. 535 *Geom.*); per centrum gravitatis transit (§. 141), adeoque in L gravitatis centrum est.

SCHOLION.

173. *Attendentibus statim manifestum est, non absimili modo centrum gravitatis in prismatibus & cylindris reperiri, esseque illud punctum medium rectæ centra gravitatis basium oppositarum conjungentis. In polygonis autem regularibus centrum gravitatis idem esse cum centro circuli circumscribendi, facile quoque intelligitur. Quemadmodum*

Digitized by Google

dum vero centrum gravitatis segmentorum & sectorum, imo lunularum circuli per superiora inveniri potest; ita per problema præsens constat, quomodo variorum segmentorum cylindricorum centrum gravitatis inveniri possit, quorum nempe bases sunt circuli segmenta, sectores, annuli, lunulæ.

PROBLEMA 28.

Tab. II. Fig. 15. 174. *Invenire centrum gravitatis Coni & pyramidis.*

RESOLUTIO.

Centrum gravitatis Coni esse in axe AC satis claret ex superioribus. Si AP $= x$; P$p = dx$ & ponduſculum in cono eſt $prx^2 dx : 2a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $prx^3 dx : 2a^2$ (§. 153). Hinc ſumma momentorum $prx^4 : 8a^2$, quæ per ſummam ponderum $prx^3 : 6a^2$ (§. 198 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis AMN a vertice A $= 6a^2 prx^4 : 8a^2 prx^3 = \frac{3}{4} x = \frac{3}{4}$ AP, adeoque coni integri centrum gravitatis diſtat a vertice $\frac{3}{4}$ AC.

Eodem prorſus modo invenitur diſtantia centri gravitatis a vertice in pyramide $= \frac{3}{4}$ AC.

PROBLEMA 29.

Tab. II. Fig. 16. 175. *Invenire centrum gravitatis Conoidis parabolici* ABCD *ex rotatione parabolæ* AMC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum conoidis MNnm $= px dx : 2r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*) adeoque momentum $= px^2 dx : 2r$ (§. 153), conſequenter ſumma momentorum $= px^3 : 6r$, quæ per ſummam ponderum $px^2 : 4r$ (§. 202 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis conoidicæ AMPN a vertice A $= 4rpx^3 : 6rpx^2 = \frac{2}{3} x$. Eſt adeo diſtantia centri gravitatis a vertice in conoide parabolico ABD $= \frac{2}{3}$ AC.

PROBLEMA 30.

176. *Invenire centrum gravitatis conoidis paraboloidici ex rotatione paraboloidis cujuscunque* AMBC *circa axem* AC *geniti.*

RESOLUTIO.

Ponduſculum Conoidis paraboloidici indefinitum eſt $px^{2:m} dx : 2r$ (§. 102 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^{(2+m):m} dx : 2r$ (§. 153). Hinc ſumma momentorum $mpx^{(2+2m):m} : (4m+4) r$, quæ per ſummam ponderum $mpx^{(2+m):m} : (2m+4) r$ (202 *Analyſ. infinit.*) diviſa dat diſtantiam centri gravitatis portionis conoidicæ MAN a vertice A $= (2m+4) mr px^{(2+2m):m} : (4m+4) mrpx^2 = \frac{m+2}{2m+2} x = \frac{m+2}{2m+2}$ AP, conſequen-

ter

ter in integro Conoide $\frac{m+2}{2m+2}$ AC.

Sit e. gr. $m=2$; erit AH $=\frac{2}{3}$ AC.

Sit $m=3$; erit AH $=\frac{5}{8}$ AC.

Sit $m=4$; erit AH $=\frac{3}{5}$ AC.

Sit $m=5$; erit AH $=\frac{7}{12}$ AC.

PROBLEMA 31.

177. *Invenire centrum gravitatis segmenti sphæræ.*

RESOLUTIO.

In segmento sphærico pondusculum $= pxdx - px^2dx : 2r$ (§. 199 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $px^2dx - px^3dx : 2r$ (§. 153). Unde summa momentorum $\frac{1}{3}px^3 - px^4 : 8r = (8rpx^3 - 3px^4) : 24r$, quæ per summam ponderum $\frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r = (6rpx^2 - 2px^3) : 12r$ (§. 199 *Anal. infin.*) divisa definit distantiam centri gravitatis a vertice $= 12r(8rpx^3 - 3px^4) : 24r(6rpx^2 - 2px^3 = (8rx - 3x^2) : (12r - 4x)$. Est adeo ut $12r - 4x$ ad $8r - 3x$, hoc est, $3r - x$ ad $2r - \frac{3}{4}x$ (§. 185 *Arithm.*) ita x ad distantiam centri gravitatis a vertice.

COROLLARIUM.

178. Quodsi pro x substituatur r seu semidiameter sphæræ, prodibit distantia centri gravitatis a vertice in hemisphærio $(8r^3 - 3r^2) : (12r - 4r) = 5r^2 : 8r = \frac{5}{8}r$. Eodem modo si pro x substituatur $2r$, sphæræ integræ centrum gravitatis reperitur distare a vertice semidiametro r, hoc est, idem cum centro sphæræ.

PROBLEMA 32.

179. *Invenire centrum gravita- Conoidis hyperbolici.*

RESOLUTIO.

In Conoide hyperbolico pondusculum $= pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$ (§. 208 *Analyſ. infinit.*), adeoque momentum ejus $pbx^2dx : 2r + pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare omnium momentorum summa $pbx^3 : 6r + pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 + 3pbx^4) : 24ar$, quæ per summam ponderum $pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$ (§. *Anal. infin. cit.*) $= (6apbx^2 + 4pbx^3) : 24ar$ divisa distantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 + 3pbx^4) : (6apbx^2 + 4p$[illegible]$) = (4ax + 3x^2) : (6a + 4x)$. Est adeo ut $6a + 4x$ ad $4a + 3x$, ita x ad distantiam centri gravitatis a vertice. Constat vero esse a axem transversum hyperbolæ genitricis, x altitudinem conoidis, seu illius abscissam (§. 459 *Anal. fin.*)

PROBLEMA 33.

180. *Invenire centrum gravitatis segmenti sphæroidis elliptici.*

RESOLUTIO.

In sphæroide elliptico pondusculum $pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*), adeoque mo-

momentum ejus $pbx^2dx : 2r - pbx^3dx : 2ar$ (§. 153). Quare momentorum summa $pbx^3 : 6r - pbx^4 : 8ar = (4apbx^3 - 3pbx^4) : 24ar$, quæ per summam ponderum $pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$ (§. 203 *Analyſ. infinit.*) $= (6apbx^2 - 4pbx^3) : 24ar$ divisa diſtantiam centri gravitatis a vertice determinat $(4apbx^3 - 3pbx^4) : (6apbx^2 - 4pbx^3) = (4ax - 3x^2) : (6a - 4x)$. Eſt adeo ut $6a - 4x$ ad $4a - 3x$, hoc eſt, ut $a - \frac{2}{3}x$ ad $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}x$ ita x ad diſtantiam centri gravitatis a vertice. Denotat autem a axem majorem ellipſis genetricis, ſeu ipſum axem majorem ſphæroidis; x autem altitudinem ſegmenti, ſeu portionem axis inter verticem & baſin interceptam.

COROLLARIUM 1.

181. Quodſi pro x ponatur a, prodit pro centro gravitatis totius ſphæroidis elliptici $(4aa - 3aa) : (6a - 4a) = aa : 2a = \frac{1}{2}a$. Eſt nempe in medio axe.

COROLLARIUM 2.

182. Sphæræ igitur & ſphæroidis elliptici communem axem habentium centrum gravitatis idem eſt (§. 178).

COROLLARIUM 3.

183. Si pro x ponatur $\frac{1}{2}a$, prodit diſtantia centri gravitatis in dimidio ſphæroide a vertice $(\frac{4}{2}aa - \frac{3}{4}aa) : (6a - \frac{4}{2}a) = \frac{5}{4}aa : 4a = \frac{5}{16}a$, eadem adeo quæ in hemiſphærio (§. 178). Nam ſi ut ibi fiat $a = 2r$, erit $\frac{5}{16}a = \frac{10}{16}r = \frac{5}{8}r$.

PROBLEMA 34.

184. *Invenire centrum gravitatis in Cono truncato* BMND *& in pyramide truncata.* Tab. II. Fig. 15.

RESOLUTIO.

1. Inveniatur centrum gravitatis Coni AMN (§. 174): quod ſit in F.
2. Inveniatur quoque centrum gravitatis coni majoris BAD (*§. cit.*): quod ſit in G.
3. Quæratur ad conum truncatum BMND, conum minorem MAN & FG quarta proportionalis GH: erit in H centrum gravitatis coni truncati (§. 144).

Patet autem, rationem coni truncati BMND ad minorem MAN lineis eſſe exprimendam, niſi numeris utamur.

SCHOLION.

185. *Eadem methodo centrum gravitatis reperies in conoidibus truncatis, itemque in ſphæra & ſphæroidibus truncatis. Enimvero quamvis multa adhuc ea de re addi poſſent; filum tamen abrumpi conſultum ducimus, cum ex hactenus dictis facile eruantur, nec multum in praxi habeant uſum. Adjiciemus itaque tantummodo adhuc methodum centrum gravitatis aut punctum ipſi in ſuperficie corporis cujuscunque reſpondens mechanice explorandi, quantum ad praxin ſufficit.*

PROBLEMA 35.

186. *Determinare centrum gravita-*

vitatis mechanice in corpore quocunque.

RESOLUTIO.

Tab. I. II. Fig. 17. Super fune extenso aut latere prismatis trigoni FG corpus datum HI huc illucque promoveatur, donec partes utrinque æquilibrentur: planum, cujus latus KL, transit per centrum gravitatis (§. 124).

2. Super eodem corpus mutato situ æquilibretur: erit MN denuo latus plani per centrum gravitatis transeuntis (§. *cit.*)

Intersectio adeo rectarum MN & KL determinat punctum O in superficie corporis quæsitum, quod nempe est in diametro gravitatis (§. 126).

Aliter.

Tab. I. II. Fig. 18. 1. Corpus datum O ita collocetur super tabula horizontali, ut, si vel minimum ultra terminum CD promoveretur, decideret: erit recta CD in plano gravitatis (§. 124).

2. Imponatur idem corpus eidem tabulæ, ut nunc longitudo AB, quemadmodum ante latitudo CD, sit lateri tabulæ parallela & vel minimum ultra terminum AB promotum decidat: erit recta AB in plano gravitatis (§. *cit.*)

Communis adeo intersectio rectarum AB & CD in superficie corporis punctum C centro gravitatis imminens determinat (§. 129).

Aliter.

Laminæ centrum gravitatis invenies, si cuspidi alicujus styli eam imposueris & ultro citroque promoveris, donec partes utrinque æquilibrentur. Erit enim in puncto, quo sustentatur, centrum gravitatis (§. 124).

COROLLARIUM.

187. Corporis adeo humani in directum extensi centrum gravitatis, vi modi primi, observante Borello (k), inter nates & pubim existit. Quare totius corporis gravitas ibi colligitur, ubi genitalibus natura concessit locum.

SCHOLION.

188. *Quoniam subinde etiam in applicatione methodi superioris distantia centri gravitatis a duobus planis in figuris planis, a tribus autem in solidis, ut illic per intersectionem duorum, hic trium normalium prodeat centrum gravitatis; ideo unum saltem exemplum apponimus, ut quomodo id fiat in aliis inde intelligatur. Et quia in corporibus suspendendis utile etiam est nosse perimetrorum centra gravitatis; ideo nec inconsultum videtur uno alteroque exemplo docere, quomodo methodus antea tradita & exemplis illustrata* (§. 157 & seqq.) *huc applicetur.*

(k) De motu animalium part. I. prop. 134 p. m. 167.

PROBLEMA 36.

189. *Invenire centrum gravitatis in ſpatio parabolico mixtilineo* APM.

Tab. XIII. Fig. 124.

RESOLUTIO.

Sit AR ad axem AB normalis & ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua. Quæratur primo diſtantia centri gravitatis ab axe AB, nempe QL. Cum elementum PM*mp*, quod pro parallelogrammulo habetur (§. 98 *Anal. infinit.*) conſideretur inſtar ponduſculi ad axem librationis AB in P ſuſpenſi, erit momentum ejus $=PMmp.\ \frac{1}{2}PM$ (§.146), centro gravitatis in medio parallelogrammuli extante (§.172). Sit jam $AP=x$, $PM=y$, erit $Pp=dx$, adeoque $PpmM=ydx$, conſequenter momentum ponduſculi $\frac{1}{2}y^2dx$. Jam in parabola $y^2=x$, parametro exiſtente 1 (§.388 *Anal. fin.*), atque hinc $2ydy=dx$. Quare momentum ponduſculi $\frac{1}{2}y^2dx=y^3dy$, eorumque ſumma $=\frac{1}{4}y^4$. Jam area APM ſeu ſumma omnium ponduſculorum $=\int ydx=\int 2y^2dy=\frac{2}{3}y^3$. Ergo $QL=\int\frac{1}{2}y^2dx:\int ydx$ (§.157) $=3y^4:8y^3=\frac{3}{8}y$. Quare ſi fiat $AD=\frac{3}{8}$ PM & ex puncto D ducatur DL ipſi AB parallela; erit in ea centrum gravitatis ſpatii mixtilinei APM.

Ducatur jam porro ex centro gravitatis O parallelogrammuli PM*mp* ad AR normalis OK, & conſideretur inſtar ponduſculi ad axem librationis AR ſuſpenſi, erit PM*mp*. OK momentum ejus $=xydx$. Eſt vero in parabola $y=x^{1:2}$ (§.392 *Anal. fin.*). Ergo momentum ponduſculi $=x^{3:2}dx$, conſequenter eorum ſumma $=\int xydx=\frac{2}{5}x^{5:2}$. Jam area APM ſeu ſumma omnium ponduſculorum $\int ydx=\frac{2}{3}x^{3:2}$ (§.103 *Anal. infin.*) Ergo $DL=\int xydx:\int ydx$ (§.157) $=3x^{5:2}:5x^{3:2}=\frac{3}{5}x$. Quare ſi fiat $AQ=\frac{3}{5}$ AP & in Q erigatur normalis QL ipſi DL paulo ante determinatæ occurrens in L; erit L centrum gravitatis ſpatii mixtilinei AMP, hic quidem parabolici.

PROBLEMA 37.

190 *Invenire centrum gravitatis perimetri trianguli.*

RESOLUTIO.

Tab. XIII. Fig. 125 126.

Sit triangulum ABC æquilaterum, vel ſcalenum

1. Biſecentur rectæ in D, E & F: erunt puncta iſta centra gravitatis laterum AB, AC & BC (§.142).
2. Ducatur recta DE: qua in G bifariam diviſa, erit G centrum gravitatis commune rectarum AB & AC (§.145).

3. Con-

3. Concipiatur in G pondus duabus rectis AB & AC instar ponderum consideratis æquale, & in F pondus rectæ BC æquivalens (§.), fiatque ducta recta GF ut AB+AC+BC:BC=GF : GH: erit in H centrum gravitatis commune trium rectarum AB, AC & CB (§. 151).

Tab. XIII. Fig. 127.

PROBLEMA 38.

191. *Invenire centrum gravitatis perimetri figuræ irregularis cujuscunque,* v. gr. *Pentagonæ.*

RESOLUTIO.

1. Bisecentur singula latera AE, ED, DC, CB, BA in G, F, K, H, erunt in istis divisionum punctis eorum centra gravitatis particularia (§. 142).

2. Connectantur puncta G & H recta GH fiatque AB + AE: AE=GH: HL; erit in L centrum gravitatis laterum AB & AE commune (§. 151).

3. Jungantur puncta L & F recta FL, fiatque AB + AE + ED: ED=LF: LM; erit in M centrum gravitatis commune laterum AB, AE & EF (§. cit.).

4. Jungantur porro puncta M & I recta MI, fiatque AB + AE + ED + BC: BC=MI: MN; erit in N centrum gravitatis commune laterum AB, BC, AE & ED (§. cit.).

5. Denique jungantur puncta N & K recta NK; fiatque AB + BC + CD + DE + EA: DC= NK: NO; erit in O centrum gravitatis commune totius perimetri (§. cit.).

SCHOLION.

192. *Me non monente apparet, hac ratione determinari posse centrum gravitatis commune ponderum quorumcunque quomodocunque in eodem plano sitorum.*

THEOREMA 25.

193. *Omnis figura sive superficialis, sive solida, quæ motu lineæ aut figuræ generatur, æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis, seu lineam, quam centrum gravitatis describit.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus pondus totius magnitudinis generantis in centro gravitatis collectum (§. 125); erit totum pondus motu illius productum æquale facto ex pondere moto in viam centri gravitatis. Sed cum lineæ & figuræ instar gravium homogeneorum considerentur; pondera ipsarum sunt ut volumina (§. 230), adeoque pondus motum est magnitudo generans, pondus productum genita. Quare figura genita æquatur facto ex magnitudine generante in viam ejus centri gravitatis. *Q. e. d.*

Aliter.

Aliter.

Tab. I. Fig. 9. Idem etiam analytice ostenditur de solido rotatione genito hoc modo. Sit $AP = x$, $PM = y$ & ratio radii ad peripheriam circuli $= r : p$; erit solidum rotatione genitum $= \int py^2 dx : 2r$ (§. 197 *Anal. infin.*). Sit jam in L centrum gravitatis & QL = PS distantia ejus ab axe AB; erit peripheria circuli radio PS descripti via rotationis centri gravitatis. Quare cum sit $PS = \frac{1}{2}\int y^2 dx : \int y dx$ (§. 189); erit via rotationis centri gravitatis $= p\int y^2 dx : 2r\int y dx$. Quare si in hanc viam ducatur planum generans $\int y dx$; erit solidum rotatione genitum $= p\int y^2 dx : 2r$, ut ante.

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 19. 194. Hinc cum parallelogrammum ABCD describatur, si recta AB juxta ductum alterius AC motu sibi semper parallelo descendat (§. 102 & 233 *Geom.*) & ex cor. 2. theor. 26 (§. 215) independenter ab his constet, viam centri gravitatis E æqualem esse rectæ FE ad CD perpendiculari, hoc est, altitudini parallelogrammi (§. 217 *Geom.*); area ejusdem æquatur facto ex basi CD seu linea describente in altitudinem EF.

SCHOLION 1.

195. *Hæc consona sunt iis, quæ de parallelogrammorum areis investigandis demonstrata sunt in Geometria* (§. 370. 375. 387 Geom.

COROLLARIUM 2.

196. Eodem modo liquet, omnium corporum, quæ a figura plana quacunque juxta ductum alicujus rectæ AC descendit, soliditatem haberi, si planum describens per altitudinem multiplicetur.

SCHOLION 2.

197. *Hæc denuo consentiunt cum iis, quæ de prismatis & cylindris dimetiendis in Geometria demonstrata sunt* (§. 539 & 541 Geom.)

COROLLARIUM 3.

198. Cum circulus describatur, si radius CL circa centrum C rotetur (§. 131 *Geom.*); centrum vero gravitatis radii CL sit in medio F (§. 141); via centri gravitatis est peripheria circuli a radio subduplo descripta, consequenter area circuli æquatur facto ex radio CL in peripheriam radio subduplo CF descriptam. Tab. II. Fig. 20.

SCHOLION 3.

199. *Hæc iis consentanea esse, quæ in Geometria de circulo demonstrata sunt* (§. 410 Geom.), *statim patet consideranti, quod peripheria radio subduplo descripta sit peripheriæ integro descriptæ dimidia* (§. 412 Geom.)

COROLLARIUM 4.

200. Si rectangulum ABCD circa axem AD rotetur, ipsum quidem cylindrum, latus vero BC cylindri superficiem describit (§. 465 *Geom.*). Est vero centrum gravitatis rectæ BC in medio F (§. 141) & centrum gravitatis plani generantis in medio G rectæ EF; via adeo hujus est peripheria circuli radio EG, illius vero peripheria circuli radio EF descripta. Quare superficies cylindri est factum ex altitudine BC in peripheriam Tab. II. Fig. 21.

pheriam circuli radio EF descriptam sive basin, ut in Geometria demonstravimus (§. 516 *Geom.*): soliditas vero cylindri est factum ex rectangulo generante ABCD in peripheriam circuli radio EG, qui est ipsius EF seu semidiametri cylindri subduplus, descriptam.

SCHOLION 4.

201. *Sit altitudo plani describentis adeoque cylindri*, BC = a, *semidiameter basis* DC = r, *erit* EG = $\frac{1}{2}$ r &, *posita ratione semidiametri ad peripheriam* = 1 : m, *peripheria radio* $\frac{1}{2}$ r *descripta* = $\frac{1}{2}$ mr, *Ducta igitur* $\frac{1}{2}$ mr *in aream rectanguli* AC = ar; *erit soliditas cylindri* = $\frac{1}{2}$ mar². *Est vero* $\frac{1}{2}$ mar² = $\frac{1}{2}$ r. mr. a & $\frac{1}{2}$ r. mr *area circuli radio* DC *descripti. Constat ergo cylindrum reperiri aequalem facto ex basi in altitudinem, ut in Geometria* (§. 541) *demonstratum.*

COROLLARIUM 5.

Tab. II. Fig. 15. 202. Similiter cum centrum gravitatis rectæ AB sit in medio M (§. 141) & superficies coni describatur, si triangulum ABC circa axem AC rotetur (§. 467 *Geom.*), sitque præterea PM = $\frac{1}{2}$ BC (§. 268 *Geom.*), superficies coni æqualis est facto ex ejus latere AB in peripheriam radio PM, seu semidiametri baseos BC subduplo descriptam.

SCHOLION 5.

203. *Sit* BC = r, AB = a, *ratio radii ad peripheriam* 1 : m; *erit* PM = $\frac{1}{2}$ r & *peripheria hoc radio descripta* = $\frac{1}{2}$ mr. *Ducta igitur* $\frac{1}{2}$ mr *in latus coni* AB, *producit superficies* $\frac{1}{2}$ amr. *Sed* $\frac{1}{2}$ amr *est etiam factum ex* $\frac{1}{2}$ a & mr. *Ergo superficies coni producitur ex peripheria baseos in latus dimidium, ut in Geometria* (§. 519) *demonstratum.*

COROLLARIUM 6.

204. Si triangulum ACB circa axem AB rotetur, conum describit (§. 467 *Geom.*). Sed si CB divisa bifariam in D ducatur recta AD, fiatque AO = $\frac{2}{3}$ AD; erit in O centrum gravitatis (§. 158). Æquatur ergo coni soliditas facto ex triangulo CAB in peripheriam radio PO descriptam (§. 191). Est vero AD : AO = DB : OP (§. 268 *Geom.*). Sed AO = $\frac{2}{3}$ AD & DB = $\frac{1}{2}$ CB *per demonstr.* Ergo OP = $\frac{2}{3}$ DB = $\frac{1}{3}$ CB. Tab. II. Fig. 22.

SCHOLION 6.

205. *Sit* CB = r, AB = a, *ratio radii ad peripheriam* = 1 : m; *erit* OP = $\frac{1}{3}$r, *peripheria hoc radio descripta* $\frac{1}{3}$ mr, Δ ACB = $\frac{1}{2}$ ar, *adeoque soliditas coni* $\frac{1}{3}$ mr. $\frac{1}{2}$ ar = $\frac{1}{6}$ amr². *Est vero etiam* $\frac{1}{6}$ amr² = $\frac{1}{2}$ r. mr. $\frac{1}{3}$ a, *seu factum ex basi coni in tertiam altitudinis partem, ut in Geometria aliunde demonstratum* (§. 548 Geom.).

SCHOLION 7.

206. *Elegans hoc theorema, quod inter præcipua seculi superioris in Geometria inventa referri solet, jam olim Pappus commemoravit* (1); *sed* Paulus Guldinus, *e Societate Jesu, expressius plurimorum exemplorum inductione osten-*

(1) Sub finem præfat. ad lib. 7. Collect. Mathem.

ſtendit (m). *Uſi ſunt eodem Geometræ, præſertim ante inventum a* Leibnitio *calculum ſummatorium, cum* Guldino, *quemadmodum indicaverat* Pappus, *in dimetiendis ſolidis & ſuperficiebus motu rotationis circa axem fixum genitis: ſed idem uſum habere adhuc poteſt in quibusdam caſibus, ubi calculi ſummatorii ope idem difficilius præſtaretur. Ego in tyronum gratiam exemplis tritis regulam illuſtrare volui, ut vim ejus tanto facilius animo comprehenderent, ſimulque oſtendi, eidem locum eſſe, ſi magnitudines alio, quam rotationis motu generentur, quemadmodum fieri poſſe a* Guldino *etiam annotatum reperio* (n): *unde nec cum* Pappo *ad ſolum rotationis motum theorema reſtrinxi. Illuſtris* Leibnitius (o) *invenit, ſuccedere quoque negotium, ſi axis vel centrum continuo mutetur, durante motu generante.*

CAPUT IV.

DE QUIETE ET LAPSU CORPORUM GRAVIUM.

DEFINITIO 25.

207. *Linea horizontalis vera* eſt, cujus ſingula puncta a centro telluris æqualiter diſtant.

COROLLARIUM.

208. Linea horizontalis eſt arcus circuli ex centro circuli per punctum datum deſcriptus (§. 37. 41 *Geom.*).

DEFINITIO 26.

Tab. II. Fig. 20. 209. *Linea horizontalis apparens* BD eſt recta, quæ veram in dato puncto A tangit.

COROLLARIUM.

210. Eſt adeo ad ſemidiametrum telluris in puncto contactus A perpendicularis (§. 304 *Geom.*).

DEFINITIO 27.

211. *Lapſus* eſt mutatio ſitus vi gravitatis.

THEOREMA 26.

212. *Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directionis eorundem ad lineam horizontalem eſt perpendicularis & contra.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora gravia verſus centrum terræ nituntur, linea directio- Tab. II. Fig. 20.

(m) Lib. 2. & 3 de centro gravitatis.
(n) Lib. 2. c. 8. prop. 3. f. 147.
(o) In Actis Erudit. A. 1695 p. 493.

rectionis eorundem semidiametro telluris in directum jacet (§. 17). Ergo ad lineam horizontalem tam veram (§. 209 *Mech.* & §. 38 *Anal. infin.*), quam apparentem perpendicularis (§. 209). *Quod erat unum.*

II. Si linea directionis gravium ad horizontalem perpendicularis, semidiametro telluris in directum jacet (§. 206). Continuata igitur in centrum telluris incidit (§. 470 *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

213. Cum terra sit propemodum sphærica, ut in Geographia demonstratur, ingentes marium tractus, immo omnium fluidorum tractuumque terrestrium æquabilium superficies in omnibus suis punctis a centro telluris æqualiter absunt (§. 471 *Geom.*). Quare cum experientia constet, gravia per lineas perpendiculares ad superficiem aquarum descendere; gravia niti versus centrum Telluris inde evincitur.

SCHOLION.

214. *Quodsi terræ figura non sit perfecte sphærica, ex descensu perpendiculari gravium concludi nequit, quod versus centrum illius nitantur: cum in solo circulo, cujus rotatione sphæra generatur, normales ad peripheriam in centro concurrant* (§. 58 Analys. infinit.). *Sed suo loco, ubi de figura Telluris agemus, patebit, utique assumi posse citra erroris assignabilis periculum, gravia niti versus centrum terræ. Immo in statieis sufficit, descensum perpendicularem ad libellam aquarum experientia constare.*

COROLLARIUM 2.

215. Quoniam pro corpore gravi, salva gravitate, solum gravitatis centrum substitui potest (§. 125); linea directionis corporis gravis est recta ex centro gravitatis ad lineam horizontalem sive apparentem, sive veram perpendicularis.

PROBLEMA 39.

216. *Data semidiametro Telluris* AC *vel* LC *una cum longitudine lineæ horizontalis apparentis* AD, *determinare distantiam puncti extremi* D *a linea horizontali vera* AL. Tab. II. Fig. 10.

RESOLUTIO.

1. Quadrato semidiametri Telluris AC addatur quadratum lineæ horizontalis apparentis AD.
2. Ex aggregato extrahatur radix, quæ erit recta AD (§. 417 *Geom.*).
3. Inde subtrahatur semidiameter CL: quod relinquitur, est distantia lineæ horizontalis apparentis a vera DL.

E. gr. Ponamus semidiametrum telluris, qualis vulgo statuitur, 860 milliarium Germanicorum & AD unius milliaris: erit

Digitized by Google

$$AC^2 = 739600$$
$$AD^2 = \qquad 1$$
$$DC^2 = 739601$$
$$\text{Unde } DC = 860,00057$$
$$CL = 860$$
$$LD = 0,00057 \text{ seu } \frac{57}{100000}$$

Aliter.

Quoniam GD : AD = AD : DL (§. 334 *Geom.*); erit DL = AD^2 : GD (§. 302 *Arithm.*). Est vero DL ipsius GL seu diametri telluris particula admodum exigua, quippe in distantia milliaris demum $\frac{57}{100000}$ unius milliaris, seu $\frac{57}{172000000}$ diametri telluris. Quamobrem AD^2 : GL sensibiliter non differt a AD^2 : GD. Ut itaque habeatur DL, quadratum lineæ horizontalis apparentis AD dividatur per diametrum Telluris GL.

E. gr. Sit AD 900 pedum Parisinorum seu 129600 linearum (pes enim Parisinus continet 12 digitos, digitus 12 lineas), diameter Telluris juxta *Picardum* (p) 39231564 pedum parisinorum seu linearum 5649345216. Quodsi ergo AD^2 = 16796160000 per GL = 5649345216 dividas, prodibit DL fere 3 linearum.

SCHOLION.

217. *Hac posteriore methodo* Picardus (q) *tabulam construxit, quam huc transferre in usum futurum libuit. Continet autem columna prima longitudinem lineæ horizontalis apparentis* AD *in pedibus parisinis; altera puncti extremi* D *altitudinem* DL *supra lineam horizontalem veram* AL.

AD	DL	AD	DL
300 ped.	o dig. o⅓ lin.	3300 ped.	3 dig. 6 lin.
600	1⅓	3600	4 0
900	3	3900	4. 8
1200	5⅓	4200	5. 4
1500	8⅓	4500	6. 3
1800	1. 0	4800	7. 1
2400	1. 9⅓	5400	8. 11
2700	2. 3	5700	10. 0
3000	2. 9	6000	11. 0

COROLLARIUM.

218. Si linea horizontalis apparens AD 300 pedes non excedit; citra errorem sensibilem pro vera assumi, consequenter etiam planum aliquod pro horizontali haberi potest.

PROBLEMA 40.

219. *Explorare, utrum planum aliquod propositum sit horizontale, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Ex trabeculis ligneis construatur triangulum æquicrurum FCG, Tab. II. Fig. 28.

(p) Traité du Nivellement p. 196.
(q) loc. cit. c. 1. p. 7.

FCG, continuatis cruribus in A & B, quo longius, eo melius.

2. Ex vertice C suspendatur globus plumbeus D & basis trianguli FG dividatur bifariam in E.

3. Libella sic constructa collocetur super plano dato, ita ut cruribus suis AC & CB eidem insistat.

Dico, si filum CD transeat per punctum medium E, planum esse horizontale.

DEMONSTRATIO.

Quia globus plumbeus D filum CD gravitate sua extendit, pro linea directionis recte habetur (§. 19). Quodsi ergo FG bifariam secet in E; erit ad FG perpendicularis (§. 184 *Geom.*) Quoniam vero AC=CB *per construct.* adeoque AC : CB = CF : FG; erit $x=o$ (§. 207 *Geom.*), consequenter AB ipsi FG parallela (§. 255 *Geom.*) & CD etiam ad AB (§. 230 *Geom.*), hoc est, linea directionis globi ad planum, cui libella insistit, perpendicularis. Planum adeo horizontale est (§. 212).

SCHOLION.

220. *Figura instrumenti variis modis mutari solet, eodem tamen semper manente fundamento. Quemadmodum vero ad praxes staticas plerumque sufficit; ita inferius artem libellandi exposituri alia libellarum genera hac accuratiora describemus, quarum beneficio linea horizontalis per tractus amplissimos continuatur.*

DEFINITIO 28.

221. Per *Basin corporis gravis* intelligo figuram, in cujus perimetro circumcirca terminantur partes incumbentes aut fulcra, quibus ipsæ incumbunt. Tab. II. Fig. 20.

E. gr. Incumbat corpus grave duobus fulcris quadrangularibus CD & EF; figura CDEF dicetur basis ejus.

THEOREMA 27.

222. *Si linea directionis corporis gravis intra basin cadit, nec corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur; corpus in situ suo acquiescit: sin illa extra basin cadit vel corpus pluribus fulcris innixum proprio pondere satis incurvatur, in eam labitur partem, versus quam cadit centrum gravitatis.*

DEMONSTRATIO.

I. Incumbat corpus GB plano cuidam alteri firmo ac stabili AF EB, sitque linea directionis CD. Cum hæc ex centro gravitatis C educatur (§. 215); centrum gravitatis descendere nititur per rectam CD (§. 19). Sed juxta eandem ipsi renititur corpus, cui incumbit, idque satis firmum ac stabile, ut cedere nesciat, *per hypoth.* descensus adeo centri gravitatis im- Tab. II. Fig. 21.

impeditur (§ 75) adeoque corpus quiescit (§. 123). *Quod erat unum.*

Tab. II. Fig. 24. II. Incumbant extrema alicujus corporis duobus fulcris FE & DC, & linea directionis IL intra basin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur (§. 215); centrum gravitatis per rectam IL descendere nititur (§. 19). Sed corpus proprio pondere eousque incurvari nequit, ut a fulcris recedant ejus extrema, *per hypothes.* Ergo centrum gravitatis impeditur, quo minus descendat, consequenter corpus in hoc situ acquiescit (§. 123). *Quod erat secundum.*

Tab. II. Fig. 26. III. Cadat linea directionis CM corporis IL extra basin. Cum centrum gravitatis sit I (§. 215); id secundum rectam CM descendere nititur (§. 19). Quare cum nihil secundum eandem directionem ipsi resistat; actu descendet, adeoque corpus labitur in eam partem, versus quam cadit centrum gravitatis (§. 211). *Quod erat tertium.*

Tab. II. Fig. 24. IV. Denique corpus grave duobus fulcris EF & DC ita incumbat, ut linea directionis IL intra basin FEDC cadat. Quoniam linea directionis ex centro gravitatis I ducitur; centrum gravitatis per rectam IL descendere nititur. Quare cum corpus proprio pondere eo usque incurvari possit, ut a fulcris recedat, *per hypoth.* centrum gravitatis actu descendit, adeoque corpus labitur in eam partem, versus quam linea directionis cadit (§. 211). *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

223. Quo major itaque vis requiritur, ut linea directionis extra basin emoveatur, consequenter, quo longius ea distat a perimetro basis; eo firmius corpus in loco suo consistit.

PROBLEMA 41.

224. ***Invenire, utrum corpus grave in dato situ extra lapsus periculum constituatur, nec ne.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur centrum gravitatis corporis gravis (§ 186).
2. Ex eo demittatur perpendicularis in lineam horizontalem apparentem, juxta probl. 40 (§. 219), si opus sit determinandam: quæ erit linea directionis (§. 215).

Quod si perpendiculum intra basin corporis cadit, extra lapsus periculum constituitur; sin minus, certo ruet in eam partem, versus quam perpendiculum cadit (§. 222).

SCHOLION 1.

225. *Hinc ratio apparet, cur turres* in-

inclinata Bononienfis & Pifana *non corruant, etfi illa anno 1110 excitata ad altitudinem pedum 130 affurgat & perpendiculum a bafi intervallo 9 pedum recedat, hæc vero anno 1173 exftructa altitudinem habeat cubitorum 78 & intervallum inter bafin atque perpendiculum cubitorum 7½ admittat: id quod expreffius oftendit* Paulus Cafatus (1).

SCHOLION 2.

226. *Idem problema motibus animalium explicandis infervit: qualia inprimis dedit* Joannes Alphonfus Borellus (2). E. gr. *Cum centrum gravitatis in homine inter nates & pubim exiftat; linea directionis intra fpatium calcaneis interjectum adeoque intra bafin cadit, quando erecto corpore utroque pede pavimento infiftit: quare in hoc fitu firmiter confiftit. Enimvero fi pes alteruter elevetur, bafis definietur fpatio, quod pes unus occupat* (§. 221). *Cadit adeo linea directionis extra bafin, nempe verfus dexteram, fi pes dexter elevetur, confequenter homo fuper folo pede finiftro ftare non poterit* (§. 222), *nifi corpus in latere finiftro incurvet, quo linea directionis in pedem finiftrum retrahatur. Enimvero talia fufius profequi non eft noftri inftituti: apprime autem obfervanda funt in picturis & fculpturis.*

SCHOLION 3.

227. *Immo hinc ratio reddi poteft multorum in ftructura corporis animalis occurrentium.* E. gr. *Cum homo erectus ftare ac incedere debeat, neceffarium utique fuit, ut planum per medium tranfiens corpus divideret ipfum in partes utrinque æquiponderantes. Unde partes geminatæ, quales funt aures, oculi, brachia cum manibus, crura cum pedibus, a lateribus comparent, quæ fui fimiles non habent, ut frons, nafus, os, mentum, pectus, venter, genitale membrum, medium tenent locum eamque habent figuram, ut in partes æquales & fimiles, adeoque in æquiponderantes, dividi poffint.*

DEFINITIO 29.

228. *Centrum motus* eft punctum, circa quod grave, aut plura gravia commune centrum gravitatis habentia rotari poffunt. Tab. II. Fig. 17.

E. gr. Si pondera P & Q rotari poffint circa punctum N ita ut defcendente P ipfum Q afcendat; dicetur N centrum motus.

THEOREMA 28.

229. *Diftantia* IN *centri gravitatis ponderis particularis a centro gravitatis communi aut centro motus* N, *ad lineam directionis* Ip *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Cum linea directionis I*p* corporis *p* tranfeat per centrum gravitatis ipfius (§. 215) & grave eodem modo gravitet, in quocunque lineæ directionis puncto centrum gravitatis corporis exiftat (§. 78); Tab. II. Fig. 17.

(1) Mechanic. lib. 1. c. 9. p. 50 & feqq.

(2) De motu Animalium c. 18 usque ad 23. p. 165 & feqq. conf. Cafatum Mechan. lib. 1. c. 11 p. 62 & feqq.

(§.78); distantia centri gravitatis corporis *p* a centro motus vel centro gravitatis communi IN eadem est, quæ distantia ipsius N a linea directionis. Sed distantia ipsius N a linea directionis I*p* est perpendicularis NI (§. 225 *Geom.*). Ergo eadem perpendicularis NI est distantia centri gravitatis corporis *p* a puncto N. *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

Tab. III. Fig. 28. 230. ***Dato centro gravitatis* C *una cum pondere corporis* AB, *determinare vires in* A & B *requisitas, ut in situ horizontali sustentetur.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad summam distantiarum virium in A & B applicatarum a centro gravitatis corporis sustentati C, pondus ejusdem G & distantiam vis in B applicatæ BC numerus quartus proportionalis: Dico, hunc esse vim in A applicandam.
2. Quare si is subtrahatur a pondere G, relinquetur vis in B applicanda.

Sit e. gr. G = 300 librarum, AC = 5', CB = 8': erit AC + CB = AB = 13, adeoque vis in A applicanda = G. CB: AB = 300. 8 : 13 = $184\frac{8}{13}$, consequenter vis in B = $115\frac{5}{13}$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpus AB sustentatur a viribus A & B *per hypoth.* necesse est ut eadem vi renitantur, quantum illud deorsum nititur (§. 75). Nititur autem corpus AB deorsum tota vi gravitatis, hoc est, quanta est ponderis G eidem æqualis & ex centro gravitatis C suspensi (§. 125). Ergo vires A & B junctim sumtæ ponderi huic æquantur, consequenter eorum centrum gravitatis commune in C (vi §. *cit.*). Sed cum linea AB sit horizontalis, *per hypoth.* adeoque linea directionis GC ad eam perpendicularis (215), vires autem in A & B secundum eandem directionem renitantur; erunt quoque earum lineæ directionis ad AB perpendiculares & hinc a centro gravitatis communi C distant intervallis AC & CB (§. 229). Est adeo AC + CB : CB = G : A (§. 148). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Corpus adeo AB gravitat in fulcra, a quibus sustentatur, in ratione reciproca distantiarum a centro gravitatis ipsius.

SCHOLION.

232. *Ne mirentur tyrones, nos ad vires resistentes quascunque & grave sursum urgentes ea applicare, quæ de ponderibus deorsum nitentibus demonstrata sunt: eodem enim manente effectu, pondera* H & I *facili negotio, si ita visum fuerit, substitui possunt.*

PRO-

PROBLEMA 43.

Tab. II. Fig. 18. 233. *Dato centro gravitatis* F *corporis* IH *una cum gravitate ipsius determinare punctum* M, *quod si plano horizontali incumbat, pondus datum* G *in* L *appensum corpus* IH *ex situ horizontali dimovere nequit.*

RESOLUTIO.

Concipiatur in centro gravitatis F appensum pondus gravitati totius corporis IH æquale (§. 125) & quæratur ejusdem atque ponderis dati G centrum gravitatis commune M (§. 149). Quodsi enim punctum M plano horizontali incumbat, pondus G corpus HI e situ suo dimovere nequit (§. 124). *Q. e. i. & d.*

Sit e. gr. baculi centrum gravitatis F, situla aqua plena librarum 24, pondus baculi 2, LF = 18″. Reperietur LM = LF. F : (G + F) = 18. 2 : 26 = 18 : 13 = 1″ 4‴ fere. Mirum ergo non est (quod Statices ignari mirantur) situlam baculo IH supra mensam posito appensam non decidere.

PROBLEMA 44.

234. *Dato corporis* AB *centro gravitatis* C *una cum pondere ejus* G, *determinare puncta* L *&* M, *in quibus supponenda sunt fulcra* MN *&* LO, *ut in data ratione premantur.* Tab. III. Fig. 28.

RESOLUTIO.

Sumantur in linea horizontali AB, quæ per centrum gravitatis C transit, rectæ MC & CL in data ratione. Quodsi fulcra MN & LO in punctis hac ratione determinatis supponas, ea premuntur in data ratione (§. 231).

COROLLARIUM.

235. Quodsi in M & L fulcrorum loco humeros aut manus supponant operarii; pondus portare poterunt, si viribus eorum proportionatum. Unde patet, quomodo onus ferendum in data ratione distribui possit.

SCHOLION.

236. *Si pondus ferendum ex longurione extra centrum gravitatis ipsius suspendatur; quærendum est centrum gravitatis commune ponderis atque longurionis, & supposito in eodem pondere utrique æquali, reliqua peraguntur ut in resolutione problematis. Exempla specialia, quibus problemata hæc illustrantur, dedit* Stevinus (t).

CA-

(t) Stat. lib. 2. prop. 7. 8. Operum f. 474 & seqq.

CAPUT V.
DE
MOTU RECTILINEO COMPOSITO.

DEFINITIO 30.

237. *Motus simplex* est, qui a vi una efficitur.

DEFINITIO 31.

238. *Motus compositus* est, qui efficitur a viribus pluribus conspirantibus. Dicuntur autem *vires conspirare*, si directio unius non est opposita directioni alterius, veluti cum radius circuli circa centrum rotari & interea punctum per eam recta incedere concipitur.

COROLLARIUM.

239. Omnis ergo motus curvilineus est compositus (§. 74).

DEFINITIO 32.

240. *Angulus directionis* est, quem lineæ directionis duarum virium conspirantium comprehendunt.

THEOREMA 29.

Tab. II. Fig. 19. 241. *Si mobile* A *duplici vi urgeatur, altera quidem secundum directionem* AB, *altera vero secundum directionem* AC, *ita ut celeritates sint ut latera* AB *&* AC; *motu composito diagonalem parallelogrammi* AD *describit.*

DEMONSTRATIO.

Si mobile A sola vi secundum AB impressa moveretur, momento primo foret in aliquo puncto rectæ AB, veluti in H, & ad rectam HL ipsi AC parallelam accederet. Si sola vi secundum AC impressa progrederetur, eodem momento foret in aliquo puncto ipsius rectæ AC, veluti in I, & ad rectam IL ipsi AB parallelam accederet. Sed cum directiones virium sibi non opponantur, neutra alteram impedire valet, adeoque eodem momento mobile accedet tum ad HL, tum ad IL, consequenter erit in puncto L, ubi HL & IL concurrunt. Quoniam vero celeritates sunt ut AB ad BD *per hypoth.* & spatia AH & HL eodem tempore descripta ut celeritates (§. 13), consequenter AL: HL = AB : BD; erit AHL pars trianguli ABD (§. 268 *Geom.*), consequenter AL pars diagonalis AD (§. 317 *Geom.*). Eodem modo patet, ductis KM & MG ipsis AB & AC parallelis, quod mobile momento secundo futurum sit in M, tandem-

demque in D. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

242. Quodsi ergo concipiamus rectam AC motu æquabili sibi semper parallelo juxta ductum alterius rectæ AB moveri ac interea punctum motu æquabili in eadem descendere, punctum repræsentabit corpus, quod duplici vi juxta directiones AB & AC celeritatibus, quæ sunt ut AB & AC, movetur, adeoque motu composito describetur triangulum ABD.

SCHOLION.

243. *Solent igitur nonnulli in demonstrando theoremate præsente punctum in linea* AC *descendens, dum ipsa interea juxta ductum recta* AB *promovetur, pro corpore sumere, quod duplici vi juxta hypothesin theorematis movetur: id quod etiam ad juvandam imaginationem utiliter sumi potest, cum sic pateat possibilitas hypotheseos intuitiva ratione.*

COROLLARIUM 2.

244. Mobile motu composito eodem tempore describit diagonalem AD, quo motu disjuncto describeret latera parallelogrammi AB & AC (§. 241).

COROLLARIUM 3.

245. Cum circa quamlibet rectam AD parallelogrammum aliquod ABDC construi possit, constructis nempe triangulis æqualibus ACD & ABD tanquam super basi communi (*vi §.* 317. 205. *Geom.*); omnis motus rectilineus, ubi ad demonstrandum utile fuerit, in compositum resolvi potest.

COROLLARIUM 4.

246. Quoniam vero laterum AC & CD ratio varia esse potest, pro diversitate angulorum CAD & DAB, motu quoque variis modis composito eadem recta AD describi (§. 245), adeoque & idem motus rectilineus in varios compositos resolvi potest.

THEOREMA 30.

247. *In motu composito uniformi velocitas a viribus conspirantibus producta est ad velocitatem alterutrius, ut diagonalis* AD *parallelogrammi* ABDC, *juxta cujus latera agunt separatæ, ad latus alterutrum* AB *vel* AC.

DEMONSTRATIO.

Eodem enim tempore, dum vis una conficit latus parallelogrammi AB & altera AC sigillatim, conjunctæ conficiunt diagonalem AD (§. 241). Est ergo diagonalis AD spatium a viribus conspirantibus dato tempore descriptum (§. 12). Sed in motu uniformi celeritates in eodem tempore sunt ut spatia (§. 33). Est ergo celeritas a viribus conspirantibus orta ad celeritatem a vi alterutra ortam ut AD ad AB vel AC. *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 19.

COROLLARIUM 1.

248. Datis itaque viribus conspirantibus, hoc est, data celeritatum ratione per rectas AB & AC magnitudine datas, & directione per easdem rectas positione

ne datas, aut per angulum directionis, datur motus obliqui celeritas & directio, quia diagonalis & magnitudine & positione datur (§. 339. & seqq. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

249. Non tamen vice versa motu obliquo dato dantur simplices, quia idem ex diversis simplicibus componi potest (§. 245.).

COROLLARIUM 3.

250. Motus adeo simplex per diagonalem AD celeritate ut AD æquipollet motibus per latera AB & AC celeritatibus ut AB & AC conjunctis, hoc est, perinde est, sive mobile juxta directionem AD celeritate ut AD, sive simul juxta directiones AB & AC celeritatibus ut AB & AC moveatur (§. 241. 246).

THEOREMA 31.

Tab. III. Fig. 30.

251. *In motu composito ab iisdem viribus producto major est velocitas, si angulus directionis minor: illa autem minor, si hic major.*

DEMONSTRATIO.

Sit angulus directionis major BAC, minor FAC. Quoniam vires eædem sunt *per hypoth.* erit AC utrique parallelogrammo AFCE & BACD communis, & præterea AB = AF. Evidens est in hypothesi anguli majoris describi diagonalem AD, in hypothesi minoris vero ipsam AE & quidem eodem tempore ob AB = AF, (§. 244). Sunt igitur celeritates ut AD ad AE (§. 33). Quare cum AD < AE; velocitas in hypothesi anguli majoris minor est, quam in hypothesi minoris. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Cum datis cruribus AC & CE cum angulo intercepto ACE, angulus CEA (§. 40. *Trigon.*) & inde porro AE (§. 36. *Trig.*) reperiatur; data virium conspirantium celeritate & angulo directionis in casu quocunque speciali celeritas motus compositi inveniri, consequenter ratio celeritatum ab iisdem viribus sub diversis directionum angulis productarum definiri potest.

THEOREMA 32.

253. *Si mobile a duabus viribus secundum directiones* AB *&* AC *trahitur, quæ æquipollent tertiæ trahenti secundum directionem* AD, *erunt sollicitationes ad motum inter se reciproce ut sinus angulorum, quos lineæ directionis* BA *&* AC *cum linea directionis tertiæ* AD *comprehendunt, & alterutra earum erit ad sollicitationem a media pendentem ut sinus anguli, quem linea directionis alterius cum linea directionis tertiæ comprehendit ad sinum anguli* BAC. Tab. II. Fig. 29.

DEMONSTRATIO.

Ducatur BD ipsi AC & DC ipsi AB parallela (§. 258. *Geom.*); erit angulus BDA = DAC & ADC = BAD (§. 255. *Geom.*), ac BADC pa-

parallelogrammum (§. 102. *Geom.*). Quoniam vires secundum directiones AB & AC trahentes in sollicitando mobili ad motum, seu quatenus mobile ad motum urgent (§. 110), æquipollent vi mobile secundum directionem AD trahenti *per hypoth.* sollicitationes laterales sunt ut AB & BD = AC (§. 335. *Geom.*), media vero sollicitatio ut AD (§. 250). Erunt igitur (§. 33. *Trigon.*) laterales ut sinus angulorum BDA & BAD, & lateralis secundum directionem AB trahens ad mediam secundum directionem AD trahentem ut sinus anguli BDA seu DAC ad sinum anguli ABD seu BAC (§. 233. *Geom.* & §. 5. *Trigon.*), lateralis vero agentis secundum directionem AC sive BD ut sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

254. *Sollicitationes sunt in ratione composita massarum & celeritatum initialium* (§. 110. 22), *consequenter celeritatum in motu æquabili, ubi c est ut* dc. *Rectæ, per quas exponuntur motus in resolutione compositi in simplices, sunt ut celeritates* (§. 250). *Quare si per eas exponuntur sollicitationes, massæ corporum, in quibus concipiuntur vires, supponendæ sunt æquales* (§. 181. Arithm.) *id quod semper facere licet, cum corpori cuicunque data celeritate lato, vel data celeritate initiali instructo, dari possit aliud eidem in sollicitatione ad motum æquivalens, quod habet massam datam* (§. 146), *quia celeritates initiales sunt ut distantiæ a centro motus. Atque hæc ratio est, cur in præsente tractatione præcisa massa corporum ea consideramus instar punctorum, in quibus non spectatur nisi celeritas initialis.*

DEFINITIO 33.

255. Per *Tendentiam* intelligimus rectam velocitatis & directionis repræsentatricem. Et *Tendentia media* vocatur, quæ in motu composito pluribus datis simul substitui potest.

PROBLEMA 42.

256. *Si mobile* A *urgetur secundum directiones* BA, CA, DA, EA *celeritatibus ut* AB, AC, AD, AE, *determinare directionem & celeritatem mobilis in motu composito, qui ex simplicibus istis resultat*, seu, *datis quotcunque tendentiis* AB, AC, AD, AE, *invenire mediam* AK. Tab. XIII. Fig. 128.

RESOLUTIO.

1. Per Centrum gravitatis commune G omnium punctorum B, C, D, E, in quibus terminantur tendentiæ mediæ, ducatur recta AK indefinita ex centro mobilis A.
2. In hanc ex A transferatur AG

 to-

toties, quod sunt tendentiæ datæ.

Dico AK fore tendentiam mediam.

DEMONSTRATIO.

Ducatur per centrum mobilis A recta RS & ex singulis punctis B, C, D, E atque G demittantur in eam perpendiculares Bb, Cc, Dd, Ee, Gg: tendentiæ BA æquivalebunt laterales Bb & bA, secundæ CA laterales cC & cA, tertiæ DA laterales Dd & dA, quartæ EA laterales Ee & eA (§. 250, 255). Jam cum directiones Bb, Cc, Dd & Ee sibi mutuo non sint contrariæ, tendentiæ cognomines in determinanda media sunt attendendæ: ex adverso cum directiones bA & cA sint contrariæ directionibus Ad & Ae, sintque velocitates versus partem S majores velocitatibus versus partem R *per hypoth.* excessus tendentiarum versus S supra tendentias versus R attendendus erit in media determinanda. Jam si parallelogrammum AgGH compleatur; tendentiæ perpendiculares Bb, Cc, Dd & Ee æquivalebunt mediæ 4 AH & excessus contrariarum fortiorum supra debiliores Ae + Ad − Ab − Ac æquivalet tendentiæ mediæ parallelæ 4HG (§. 156) ob rationem paulo ante datam (§. 254). Enimvero si AH continuetur in I, donec fiat AI = 4 AH & ducatur IK parallela ipsi HG, erit etiam IK = 4 HG & AK = 4 AG (§. 268. *Geom.*). Quare cum tendentiæ laterales AI & IK æquipolleant diagonali AK (§. 250); tendentiæ quoque BA, CA, DA & EA tendentiæ AK æquipollent, adeoque ipsa AK media est (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

257. *Ex demonstratione adeo problematis præsentis patet, si mobile ad motum urgeatur viribus* B, C, D *&* E *eo modo, ut, si* B *sola ageret, mobile* A *progrederetur secundum directionem* AB *celeritate ut* AB; *si sola* C *ipsum impelleret, secundum directionem* AC *celeritate ut* AC; *si sola vis* D *mobile urgeret, secundum directionem* AD *celeritate ut* AD, *si denique sola vis* E *mobile* A *ad motum concitaret, secundum directionem* AE *celeritate ut* AE; *idem mobile* A *viribus* B, C, D, E *una agentibus moveri secundum directionem* AK *celeritate ut* AK. *Patet vero eodem prorsus modo tendentiam mediam determinari, si plures quotcunque dentur. Opus autem est in demonstratione resolutione tendentiarum datarum in alias laterales eidem æquipollentes, ut demonstrari possit,* AK *esse directionem tendentiæ mediæ: quod enim celeritas sit ut* 4 AH *absque ea patet* (§. 156).

CA-

CAPUT VI.
DE
DESCENSU GRAVIUM IN PLANO INCLINATO.

DEFINITIO 34.

258. *Planum inclinatum* est, quod cum horizontali efficit angulum obliquum.

DEFINITIO 35.

259. *Gravitatem absolutam* voco, qua corpus descendit libere in medio non resistente, seu in descensu libero ad motum sollicitatur.

DEFINITIO 36.

260. *Gravitatem respectivam* appello, qua corpus descendit, parte aliqua ad superandam resistentiam impensa, seu qua in descensu per resistentiam impedito ad motum sollicitatur. Talis est, qua descendit in plano inclinato, ubi pars aliqua ad resistentiam plani vincendam impenditur, seu qua ad motum sollicitatur super plano inclinato.

THEOREMA 33.

Tab. III. Fig. 31. 261. *Si grave in plano inclinato consistit, gravitas respectiva est ad gravitatem absolutam ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB.

DEMONSTRATIO.

Sit CB linea horizontalis. Cum globus D secundum directionem AC descendere nitatur in plano inclinato, libere autem descenderet per rectam DH ad horizontalem CB perpendicularem (§. 212): si erigatur in D perpendicularis ad AC & ducatur GF ipsi AC parallela occurrens ipsi DH in F, exponet DF gravitatem absolutam, DG vero partem, qua resistentiam plani vincit, & FG gravitatem respectivam (§. 250). Quodsi parallelogrammum DGFE compleatur; erit EF = DG & FE = ED (§. 335 *Geom.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ut DF ad FG sive DE. Enimvero cum DH & AB ad eandem CB perpendiculares existant *per hypoth.* inter se parallelæ sunt (§. 206 *Geom.*), adeoque anguli EDF & CAB æquales (§. 233 *Geom.*). Quoniam vero præterea anguli E & B recti sunt, *per hypoth.* erit DF : DE = CA : AB (§. 267 *Geom.*). Quare gravitas absoluta ad respectivam

vam ut CA ad AB (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

262. Cum adeo globus D super plano inclinato gravitate tantum respectiva graviter, pondus L juxta directionem longitudini plani parallelam DA trahens eum retinebit, si fuerit ad ipsum in ratione altitudinis AB ad longitudinem plani AC.

COROLLARIUM 2.

263. Quodsi longitudo plani CA sumatur pro sinu toto, erit AB sinus anguli inclinationis ACB (§. 3 *Trigon.*). Est igitur gravitas absoluta ad respectivam ponderis super plano inclinato, adeoque etiam pondus D ad pondus L juxta directionem DA ipsum sustentans, ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

264. Hinc gravitates respectivæ ejusdem corporis super diversis planis inclinatis sunt inter se ut sinus anguli inclinationis. Est enim ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani unius, ita gravitas absoluta ad respectivam super eodem (§ 263) & ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani alterius, ita eadem gravitas absoluta ad respectivam super hoc plano (§. *cit.*). Quare ut sinus anguli inclinationis planorum, ita sunt gravitates respectivæ ejusdem corporis super iisdem (§. 196 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

265. Major ergo gravitas respectiva, quo major angulus inclinationis; minor itidem illa est, quo minor hic existit: cum crescentibus angulis crescant, decrescentibus decrescant sinus (§. 58. 301 *Geom.* & §. 2 *Trigon.*).

COROLLARIUM 5.

266. Sicut itaque in plano verticali, ubi inclinatio maxima, nempe perpendicularis, gravitas respectiva degenerat in absolutam; ita in plano horizontali, ubi nulla inclinatio, gravitas respectiva prorsus exspirat, hoc est, grave secundum longitudinem plani nullum nisum exercet.

COROLLARIUM 6.

267. In plano igitur verticali vis motum impediens ipsi æqualis est: in plano horizontali ad grave retinendum vi nulla opus.

PROBLEMA 43.

268. *Invenire sinum anguli inclinationis plani, super quo data vi pondus datum sustentari possit.* Tab. III. Fig. 31.

RESOLUTIO.

Fiat ut pondus datum D ad vim datam L, ita sinus totus ad sinum anguli inclinationis plani (§. 262).

E gr. Sit pondus 1000, vis 50 librarum: reperietur angulus inclinationis 2° 52'

Log. 1000 = 30000000
Log. 50 = 16989700
Log. Sin. tot. 100000000

Log. Sin. inclin. = 8. 6989700, cui in tabulis quam proxime respondent 2° 52'.

THEO-

THEOREMA 34.

Tab. III. Fig. 31. 269. *Si pondus* L *juxta directionem perpendicularem* AB *descendit & pondus* D *juxta directionem plano inclinato parallelam attollit; altitudo ascensus ponderis* D *est ad altitudinem descensus alterius* L *ut sinus anguli inclinationis* C *ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ascendat enim pondus D ex C usque in D, erit altitudo, ad quam ascendit, DH. Sed cum pondus L in plano perpendiculari descendat, *per hypoth.* erit altitudo, per quam ipsum descendit, ipsi CD æqualis. Altitudo igitur ascensus ponderis D est ad altitudinem descensus alterius L ut DH ad CD. Enimvero si CD sumatur pro sinu toto, DH est sinus anguli inclinationis C (*§. 2 Trigon.*). Sunt ergo altitudines prædictæ ut sinus anguli inclinationis & sinus totus. *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

270. Est igitur altitudo descensus CD ponderis L ad altitudinem ascensus DH ponderis D ut reciproce pondus D ad pondus L ipsi æquiponderans (§. 261).

COROLLARIUM 2.

271. Quare cum sit CD. L = DH. D (*§. 297 Arithm.*) & nisus atque renisus æquiponderantium D & L æquales sint (*§. 75*): momenta ponderum D & L sunt in ratione composita massarum & altitudinum, per quam in plano sive inclinato, sive perpendiculari vel ascendunt, vel descendunt (§. 159 *Arithm.*).

THEOREMA 35.

272. *Si pondera* E & D *trahentia rectam* AB *habeant centrum gravitatis commune in* C; *erunt ea inter se in ratione reciproca distantiarum* CH & CI, *nempe* E : D = CI : CH. Tab. XIII. Fig. 129. n. 1 2.

DEMONSTRATIO.

Ducantur BF & AG ad rectam AB perpendiculares & ex centris gravitatis ponderum D & E rectæ EG & DF ipsi AB parallelæ. Quoniam pondera D & E non aliter trahunt rectam AB ac si planis inclinatis BD & AE incumberent; perinde erit ac si in B suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem BF, quod est ad D ut BF ad BD, & in A suspenderetur pondus juxta directionem perpendicularem AG, quod est ad E ut AG ad AE (*§. 261*). Sit pondus prius P; alterum Q: erit P : D = BF : BD & Q : E = AG : AE. Enimvero propter parallelismum linearum GE & DF atque AB angulus GEA = HAC & FDB = ABD (§. 233 *Geom.*). Quare cum præterea anguli G & H, itemque F & I sint recti *per construct.* erit BF : BD = CI : CB &

Digitized by Google

AG: AE = CH: CA (§. 267 *Geom.*), consequenter P ; D = CI: CB & Q: E = CH : CA (§. 167 *Arithm.*). Jam cum pondera P & Q juxta directionem perpendicularem sint in æquilibrio *per demonstr.* erit P: Q = AC: CB (§. 144), consequenter P: E = CH: CB (§. 198 *Arithm.*) & hinc tandem D: E = CH: CI (§. 200 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

273. Quoniam pondera D & E sibi invicem æquilibrantur, si sub obliqua quacunque directione rationem reciprocam distantiarum habuerint, hoc est, si D : E = CH: CI (§. 272), est vero E. CH = D. CI (§. 297 *Arithm.*); vires æquiponderantium etiam sub directionibus obliquis æstimandæ sunt per factum ex massa in distantiam a centro gravitatis.

COROLLARIUM 2.

Tab. II. Fig. 27. 274. Si pondera sive ex centro gravitatis communi, sive ex alio quocunque extra illud posito suspendantur; momenta sunt in ratione composita massarum & distantiarum a puncto suspensionis N, nempe in eo situ, quo centrum gravitatis ipsius P descendit per altitudinem IK & centrum gravitatis alterius ponderis Q ascendit per altitudinem OH, ut Q ON & P. IN (§ 146. 271. 133), Sed cum verticales ad N sint æquales (§. 156 *Geom.*) & lineæ directionum KI & HO sint ad horizontalem LM in O & I perpendiculares (§. 215); ON : NI = HO : IK (§. 267 *Geom*). Quare momenta ponderum Q & P sunt etiam ut Q. HO & P. IK, hoc est, in ratione composita massarum & altitudinum, per quas perpendiculariter centrum gravitatis vel ascendit, vel descendit. Superior igitur (§. 146. 273) constituta virium æstimatio cum præsente consentit.

COROLLARIUM 3.

275. Vires adeo æquales sunt, quæ pondera elevant per altitudines ipsis reciproce proportionales.

SCHOLION 1.

276. *Hoc principium ad demonstrandas machinarum vires sine demonstratione assumit* Cartesius (u). *Ait enim*, quod iisdem viribus, quibus pondus v. gr. 100 librarum in ductum pedum altitudinem attolli potest, aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

SCHOLION 2.

277. *Hinc etiam ratio patet, cur currus onustus difficilius trahatur super plano inclinato, quam super horizontali: gravatur nimirum ea ponderis parte, quæ est ad pondus totum ipsius in ratione altitudinis ad longitudinem plani. Ex quo etiam intelligitur, cur idem difficilius trahatur in via lutosa & arenosa. Ceterum in praxi ratio longitudinis plani ad altitudinem facile definitur. Si* Tab. *enim recta* FD *sit longitudini plani* AC III. *parallela, hoc est, linea directionis currus,* Fig. *atque* FC *altitudini* CD *parallela ope* 32. *perpendiculi definiatur, & ex* C *ducatur per-*

(u) In Tract. de Mechanica (qui inter posthuma habetur) p. 13.

Digitized by Google

perpendicularis ad DC, *erit y* = o & o = x (§. 233 Geom.) *hincque y* = x. *Quare, ob rectos* D & B, FC : FD = EA : EB (§. 267 Geom.).

THEOREMA 36.

278. *Vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & velocitatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires æquiponderantium cum ad motum producendum tendant, sed non actu moveant pondera, sunt vires mortuæ (§. 9), adeoque in quacunque directione in ratione composita massarum & distantiarum a centro motus (§. 146, 272). Enimvero si ponamus centra gravitatis circa centrum motus tanquam punctum fixum moveri æquabiliter, eodem tempore describent arcus distantiis proportionales (§. 138. 412 *Geom.*): qui cum sint celeritatibus proportionales (§. 33); vires etiam mortuæ erunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 185 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

279. *In conatu jam adest celeritas initialis* dc, *elementum ejus, qua moveretur mobile, si motus actu sequeretur. Quare cum celeritas sit ut elementum ejus* dc; *mirum non est, quod vires hic sint in ratione celeritatum prodíturarum & massarum composita. Sunt nempe in ratione composita massarum & celeritatum initialium, quibus instruuntur, ac ideo etiam celeritatum futurarum, consequenter distantiarum a centro motus, tanquam illis proportionalium.*

COROLLARIUM.

280. Quodsi ergo massæ æquales sunt, vires mortuæ velocitatum rationem habent.

THEOREMA 37.

281. *Pondera* E & F *super planis inclinatis* AC & CB *ejusdem altitudinis* CD *æquiponderantia sunt ut longitudines planorum* AC & CB. Tab. III. Fig. 33.

DEMONSTRATIO.

Quoniam pondera E & F æquiponderant, *per hypoth.* eadem vis, quæ pondus E super plano inclinato AC sustentare valet, etiam alterum F super plano inclinato CB sustentabit, & hæc dicatur V. Est vero V : E = DC : AC & V : F = DC : CB (§. 261) Ergo E : F = AC : CB (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

282. Simon Stevinus (x) *ingeniosam affert hujus theorematis demonstrationem, quam ob miram facilitatem huc transferre libet. Catena, cujus partes exacte ponderant in ratione longitudinis, imponatur triangulo* GIH, *illud per se patet, partes* GK & HK *æquilibrari: æqui-* Tab. III. Fig. 34.

(x) Element. Static. Lib. 1. prop. 19. f. 448 Operum.

æquipollet enim GKH *catenæ in punctis* G & H *suspensæ. Quodsi jam* IH *non æquiponderet ipsi* GI; *pars præponderans prævalebit*, & *motus perpetuus catenæ circa* GIH *orietur, qui cum sit absurdus, patet partes catenæ IH & GI, adeoque pondera quavis alia, quæ itidem sunt ut longitudines planorum IH & GI æquiponderare. Supponit adeo motum perpetuum esse absurdum, seu id axiomatis instar sumit.*

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 33. 283. Quodsi communis planorum altitudo CD sumatur pro sinu toto, CB & CA sunt cosecantes angulorum inclinationis A & B (§.11 *Trigon.*). Pondera igitur F & E super planis inclinatis CB & CA æquiponderantia sunt ut cosecantes angulorum inclinationis. Sunt item reciproce ut sinus angulorum inclinationis A & B (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 38.

284. *Grave super plano inclinato descendit motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO.

Gravitas respectiva est ad absolutam in constante ratione (§.261), cumque adeo hæc non mutetur, (§.78), illa quoque omni descensus tempore eadem. Quare cum eodem semper modo vis gravitatis grave ad motum sollicitet (§. 25); singulis momentis æqualibus æquales addet celeritates. Grave igitur motu uniformiter accelerato descendit (§.67). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

285. Sunt igitur spatia descensus in ratione duplicata temporum (§. 80), itemque velocitatum (§. 81).

COROLLARIUM 2.

286. Eadem etiam temporibus æqualibus crescunt secundum numeros impares (§. 84).

COROLLARIUM 3.

287. Tempora vero sunt in ratione subduplicata spatiorum (§. 82), itemque velocitates in eadem existunt (§. 83).

COROLLARIUM 4.

288. Spatium quoque a gravi in plano inclinato descendente decursum est subduplum ejus, quod eodem tempore cum velocitate, quam grave in fine ejusdem habet, motu uniformi conficitur (§. 92).

COROLLARIUM 5.

89. Descensus adeo gravium super planis inclinatis iisdem legibus adstringitur, quibus descensus eorundem in perpendiculari tenetur (§. 86. 87).

SCHOLION.

290. *Hinc* Galilæus *leges illas exploraturus experimenta sumsit in planis inclinatis* (§. 89): *tardior enim, ut in theoremate sequente demonstratur, est descensus in plano inclinato, & hinc spatia facilius notari possunt.*

THEOREMA 39.

291. *Celeritas gravis in plano inclinato decidentis in fine temporis dati est ad celeritatem, quam perpendiculariter descendens eodem*

Digitized by Google

dem tempore acquireret, ut altitudo plani inclinati ad longitudinem ejus.

DEMONSTRATIO.

Celeritatis elementa, dum grave per planum inclinatum descendit, producuntur a gravitate respectiva, dum vero perpendiculariter descendit, ab absoluta. Si celeritates sint ut C & *c*, tempusculum *dt*, massa mobilis *m*, gravitas absoluta & respectiva ut G & *g*, erit $G:g = \frac{mdC}{dt}:\frac{mdc}{dt}$ (§. 112), $= dC:dc$ (§. 181 *Arithm.*) $= C:c$ (§. 187 *Arithm.*). Sed G ad *g* ut longitudo plani ad altitudinem ipsius (§. 261). Ergo in fine cujusvis temporis *t* celeritates C & *c* sunt ut longitudo plani ad altitudinem ejus (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Celeritas gravis perpendiculariter cadentis ad celeritatem in plano inclinato descendentis est in fine ejusdem temporis (incipiendo nimirum a quiete) ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis (§. 33 *Trigon.*).

THEOREMA 40.

Tab. III. Fig. 35. 293. *Spatium a gravi in plano inclinato confectum* AD *est ad spatium* AB, *quod eodem tempore in perpendiculari percurreret, ut velocitas in plano inclinato ad velocitatem in descensu perpendiculari in fine temporis dati.*

DEMONSTRATIO.

Si grave ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in D constitutum habet, duplum ipsius AD spatium confecisset (§. 288). Similiter si ab initio motus eam celeritatem habuisset, quam in B habet, duplum ipsius AB confecisset (§. 92), utrobique nempe motu æquabili. Sunt igitur spatia dupla 2 AD & 2 AB, eodem nempe tempore percursa, *per hypoth.* ut celeritates (§. 33). Ergo & AD atque AB sunt ut eædem celeritates (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

294. Est igitur spatium in plano inclinato percursum ad spatium, per quod grave eodem tempore in perpendiculari descenderet, ut plani altitudo AB ad longitudinem ejus AC, (§. 291), itemque ut sinus anguli inclinationis B ad sinum totum (§. 292).

COROLLARIUM 2.

295. Si ex angulo recto B ad AC perpendicularis demittatur; erit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*). Quare eodem tempore, quo grave ex A perpendiculariter descendit in B super plano inclinato pervenies in D (§. 294).

COROLLARIUM 3.

296. Dato igitur spatio descensus perpendicularis in altitudine plani AB, ha-

Digitized by Google

habetur ſpatium eodem tempore in plano inclinato percurrendum AD, ſi ex B ad CA perpendicularis demittatur.

COROLLARIUM 4.

297. Similiter dato ſpatio in plano inclinato percurſo AD, invenitur ſpatium AB, per quod eodem tempore grave perpendiculariter decidiſſet, ſi ex D perpendicularis erigatur, quæ cum catheto plani AB concurrens punctum B determinabit.

COROLLARIUM 5.

Tab. III. Fig. 36. 298. Cum in ſemicirculo anguli D, E, F, C recti ſint (§. 317 *Geom.*); grave per omnia plana AD, AE, AF, AC eodem tempore deſcendit, quo nempe per diametrum AB, ſi ea fuerit ad lineam horizontalem LM perpendicularis (§. 297).

PROBLEMA 44.

Tab. III. Fig. 35. 299. *Dato ſpatio* AD *in plano inclinato* AC *percurſo, determinare ſpatium, quod in alio plano inclinato eodem tempore percurreret.*

RESOLUTIO.

1. Ex puncto D erigatur perpendicularis DB occurrens altitudini AB in B: erit AB ſpatium, per quod eodem tempore caderet perpendiculariter grave (§. 296).
2. Quare ſi ex B demittatur perpendicularis BE ad planum AF; erit AE ſpatium, quod in plano inclinato AF conficit grave eodem tempore, quo cadit perpendiculariter ex A in B (§. 295), conſequenter & in inclinato AC ex A in D pervenit. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

300. Cum ſit AB ad AD ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis C & AB ad AE ut ſinus totus ad ſinum anguli inclinationis F (§. 294); ſpatia AD & AE, quæ grave eodem tempore in diverſis planis inclinatis percurrere valet, ſunt ut ſinus angulorum inclinationis C & F (§. 196 *Arithm.*) & reciproce ut gravia per eadem plana deſcendentia (§. 283), conſequenter etiam reciproce, ut longitudines planorum AC & AF æque altorum (§. 281). Et hinc problema per calculum variis modis ſolvitur.

THEOREMA 41.

301. *Velocitates, quæ in diverſis planis inclinatis eodem tempore acquiruntur, ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex puncto B altitudinis AB ad plana AC & AF perpendiculares BD & BE; erunt AD, AB & BE ſpatia eodem tempore percurſa (§. 299). Cum adeo ſit, ut AB ad AC ita velocitas per AD acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam, & ut AB ad AF ita velocitas per AE acquiſita ad velocitatem per AB acquiſitam (§. 291), conſequenter ob AB : AC = Tab. III. Fig. 35.

AD :

AD : AB & AB : AF = AE : AB (§. 330 *Geom.* & §. 169 *Arithm.*), velocitas per AD acquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AD ad AB & velocitas per AE acquisita ad velocitatem per AB acquisitam ut AE ad AB (§. 167 *Arithm.*); velocitates eodem tempore per AD & AE acquisitæ sunt ut spatia AD & AE isto tempore percursa (§. 196 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

302. Velocitates in diversis planis inclinatis eodem tempore acquisitæ sunt ut sinus angulorum inclinationis C & F, reciproce ut pondera per ista plana descendentia, nec non reciproce ut eorundem planorum æquealtorum longitudines AC & AF (§. 300).

THEOREMA 42.

Tab. III. Fig. 35. 303. *Si grave per planum inclinatum* AC *ad lineam horizontalem* CB *pervenit, eandem celeritatem acquisivit, quam in descensu perpendiculari* AB *usque ad eandem lineam horizontalem* CB *acquireret.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex B perpendicularis DB; erit AD spatium eodem tempore percursum, quo percurritur AB (§. 296), adeoque celeritas per AB acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC : AB (§. 291). Celeritas vero per AC acquisita est ad celeritatem per AD acquisitam in ratione subduplicata ipsius AC ad AD (§ 285) = $\sqrt{AC} : \sqrt{AD}$ (§. 159 *Arithm.*). Quare cum sit AC : AB = AB : AD (§. 330 *Geom.*), adeoque AC ad AD in ratione duplicata AC : AB (§. 216 *Arithm.*) = $AC^2 : AB^2$ (§. 259 *Arithm.*), consequenter $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} = AC : AB$; erit celeritas per AC acquisita ad celeritatem per AD acquisitam ut AC ad AB (§. 167 *Arithm.*). Celeritas igitur per AC acquisita est celeritati per AB acquisitæ æqualis (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

304. Grave igitur per diversa plana inclinata AC, AG, AF, cadendo eandem celeritatem acquirit, ubi ad eandem lineam horizontalem CF pervenit.

COROLLARIUM 2.

305. Si grave cadit perpendiculariter ex L in I eandem celeritatem acquirit, quæ per planum inclinatum HI acquiritur (§. 304). Quare si per planum IK motum continuat, ubi ad I pervenit, eodem modo movebitur, ac si statim ab initio in plano inclinato HK motum fuisset. Tab. III. Fig. 37.

COROLLARIUM 3.

306. Cum tamen motus per planum inclinatum IK tardior sit quam per perpendiculum IM (§. 291); grave per LI & IK descendens tardius lineam horizontalem KM attingit, quam si constanter

ter per LM perpendiculariter descendisset (§. 90 *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

Tab. III. Fig. 38. 307. Quodsi grave descendit per planum inclinatum LM, in M eam velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PM (§. 304). Quodsi ergo ubi ad M pervenit, motum suum continuet per MN, nec flexus in M motui officiat, nisi quod directionem mutet; eam in N velocitatem habet, quam acquireret cadendo per PN, vel etiam QN (§. *cit.*). Quamobrem si ex N per NO feratur, perveniens ad lineam horizontalem OR ea velocitate præditum est, quam acquireret per OQ, seu QR (§. *cit.*). Grave igitur per plura plana inclinata contigua LM, MN, ON motum continuans, eam acquiret celeritatem, ac si perpendiculariter per QR descendisset.

COROLLARIUM 5.

308. Cum itaque curvæ ex rectis infinite parvis componantur; grave per curvam QS descendens eandem adipiscitur celeritatem, quam ex casu perpendiculari QR acquireret.

THEOREMA 43.

Tab. III. Fig. 38. 309. *Tempus descensus per planum inclinatum* AC *est ad tempus descensus perpendicularis per* AB *ut longitudo plani* AC *ad altitudinem* AB: *tempora vero descensuum per diversa plana inclinata æquealta* AC *&* AG *sunt ut longitudines planorum.*

DEMONSTRATIO.

Tempus per AC æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur AC dimidia celeritate in C acquisita, & tempus per AB æquale est tempori, quo motu uniformi percurritur eadem AB celeritate dimidia in B acquisita (§. 288). Sed celeritates istæ dimidiæ æquales sunt (§. 303). Tempora igitur sunt ut AC & AB (§. 32). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, tempora descensuum per AC & AG esse ut AC & AG: *Quod erat alterum.*

THEOREMA 44.

Tab. III. Fig. 36. 310. *Si diameter circuli* AB *fuerit ad lineam horizontalem* LM *perpendicularis, grave ex quovis peripheriæ puncto* D, E *vel* C *eodem tempore descendit in* B, *quo nempe diametrum* AB *percurrit.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex C perpendicularis GC: erit tempus, quo GB percurritur, ad tempus, quo BC percurritur, ut BG ad BC (§. 309). Tempus vero, quo GB percurritur, est ad tempus, quo AB percurritur, in ratione subduplicata BG ad AB (§. 87), hoc est, cum sit GB:BC=BC:AB (§. 330 *Geom.*) in ratione GB ad BC (§. 216 *Arithm.*). Tempus adeo descensus per GB ad tempus descensus per

BC

BC & diametrum AB eandem rationem habet (§. 167 *Arithm.*). Ergo tempus, quo percurritur BC, æquale est tempori, quo AB percurritur (§. 177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

Tab. III. Fig. 39. **311.** *Descensus per semicycloidem* DEF *& per quemcunque ejus arcum* DG *sunt æquidiuturni.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus DG in partes infinitesimas resolutus, quarum una sit Mm, & semicyclois DEF in numero totidem divisa, quarum una Ee: erit $DG : DF = Mm : Ee$ (§. 171 *Arithm.*). Concipiamus porro semicycloidem DF in E & arcum DG in M ita dividi, ut sit $DF : DG = DE : DM = Ee : Mm$ (§. 167 *Arithm.*). Ducantur denique semiordinatæ TE, *te*, NM, *nm*, itemque chordæ in circulo genitore DB, DL, DO. Quoniam $DF = 2\,AD$, $DE = 2DB$, $DM = 2\,DO$ & $DG = 2\,DL$ (§. 168 *Analys. infinit.*), & $DF : DE = DG : DM$ *per hypoth.* erit $DA : DB = DL : DO$ (§. 181 *Arithm.*) & hinc $DA^2 : DB^2 = DL^2 : DO^2$ (§. 260 *Arithm.*). Quoniam vero $DA : DB = DB : DT$ (§. 330 *Geom.*); erit $DA^2 : DB^2 = DA : DT$ (216. 259 *Arithm.*). Similiter quia $DA : DL = DL : DH$ & $DA : DO = DO : DN$; erit $DA^2 : DL^2 = DA : DH$ & $DA^2 : DO^2 = DA : DN$ (§. cit. *Arithm.*), consequenter $DL^2 : DO^2 = DH : DN$ (§. 196 *Arithm.*). Quamobrem ulterius $DA : DT = DH : DN$ (§. 167 *Arithm.*) & $AT : DT = HN : DN$ (§. 193 *Arithm.*), adeoque $AT : HN = DT : DN$ (§. 173 *Arithm.*) & $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} = \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$ (§. 260 *Arithm.*). Sed ut $\sqrt{AT}$ ad $\sqrt{HN}$ ita velocitas in E ad velocitatem in M (§. 307. 87), ita etiam DB ad DO (§. 310. 301), immo DE ad DM (§. 168 *Analys. infinit.* & §. 181 *Arithm.*). Ergo velocitas in E ad velocitatem in M ut Ee ad Mm *per demonstr.* consequenter cum tempus per Ee sit ut spatium Ee per velocitatem in E divisum & tempus per Mm ut spatium Mm per velocitatem in M divisum (§. 37); tempus per Ee æquale est tempori per Mm (§. 185. 149 *Arithm.*) & hinc tempus per omnia Ee, hoc est per DF, æquale est tempori per omnia Mm hoc est per DG. (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 46.

312. *Si plana* DC *&* FH *cum horizontalibus* CK *&* HI *æquales efficiunt angulos; similiter inclinata sunt.* Tab. III. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Cum plana inclinata dicantur, quando cum horizontalibus angulum

Digitized by Google

gulum efficiunt obliquum (§. 258); non alio modo quam per angulos, quos cum horizontalibus suis efficiunt, distingui potest eorum inclinatio (§. 476 *Geom.*). Jam anguli æquales sunt similes (§. 174 *Geom.*), adeoque per eos planorum inclinatio distingui nequit (§. 24 *Arithm.*). Ergo plana, quæ cum suis horizontalibus angulos efficiunt æquales, similiter inclinata sunt (§. *cit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

313. Cum in planis inclinatis similibus DC & FH anguli C & H sint æquales (§. 312) & demissis in horizontales CK & HI perpendicularibus DK & FI anguli K & I recti (§. 78 *Geom.*); erit CD : FH = DK : FI (§. 267 *Geom.*), hoc est, altitudines longitudinibus proportionales sunt.

THEOREMA 47.

Tab. III. Fig. 40. 314. *Si duo gravia per duo aut plura plana* AB, BC *&* EG, GH *similiter inclinata & proportionalia incedant, ut nempe sit* AB : BC = EG : GH; *tempora descensus erunt in subduplicata ratione longitudinum* AB, BC *&* EG, GH.

DEMONSTRATIO.

Sit AB : BC = $a : b$; erit ob AB : BC = EG : GH *per hypoth.* EG = ma & GH = mb. Cum plana AB & EG sint similiter inclinata, *per hypoth.* non aliter quam partes ejusdem plani percurruntur, adeoque tempus per AB est ad tempus per EG ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{ma}$ (§. 287). Eodem modo ostenditur, esse tempus per BC ad tempus per GH ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{mb}$, & ita porro, si plura fuerint plana. Quare tempus per AB + BC est ad tempus per EG + GH ut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ad $\sqrt{ma} + \sqrt{mb}$ (§. 192 *Arithm.*) hoc est, ut $1 : \sqrt{m}$ (§. 181 *Arithm.*), seu ut $\sqrt{(a+b)}$ ad $\sqrt{(ma+mb)}$ (§ 178 *Arithm.*): quæ ratio subduplicata planorum AB + BC & EG + GH. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

315. Quoniam AB : EG = AP : EQ & CB : GH = BN : GO (313), sunt proportiones inter se similes ob AB : EG = CB : GH *per hypoth.* erit AB + BC : EG + GH = AP + BN : EQ + GO (§. 261) = [ob AP + DN = DM + MK = DK & EQ + GO = FL + LI = FI, (§. 226 *Geom.*)] DK : FI (§. 168 *Arithm.*). Tempus igitur per plana similia & proportionalia AB, BC & EG, GH cum sit in ratione subduplicata AB + BC & EG + GH (§. 314); in ratione quoque subduplicata altitudinum DK & FI existit.

COROLLARIUM 2.

316. Et quia superficies curvæ AB & DE similes ac similiter positæ ex innumeris planis infinite parvis proportionalibus & similibus constant; tempus per AB erit ad tempus per DE in ratione subduplicata AB ad DE. Tab. III. Fig. 41.

CA-

CAPUT VII.
DE
ASCENSU GRAVIUM, CUM PERPENDICULARI, TUM IN PLANO INCLINATO.

THEOREMA 48.

317. *Si grave in medio non resistente vi impressa sive perpendiculariter, sive per planum inclinatum ascendit, motus ejus uniformiter retardatur.*

DEMONSTRATIO.

Dum grave vi impressa perpendiculariter ascendit, a vi gravitatis absolutæ secundum eandem perpendicularem (§. 215); dum vero per planum inclinatum ascendit, a vi gravitatis respectivæ secundum directionem plani (§. 261) continuo deorsum impellitur. Motus adeo ejus continuo retardatur (§. 77). Quoniam vero vis gravitatis tam absolutæ, quam respectivæ in omnibus locis, per quæ grave descendit, eadem (§. 78 & §. 261); æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus eliduntur (§. 25), consequenter motus uniformiter retardatur (§. 70). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

318. Grave igitur sive perpendiculariter, sive per declive in medio non resistente ascendens spatium percurrit subduplum ejus, quod eodem tempore in plano horizontali motu uniformi describeret cum ea celeritate, quam ab initio motus habebat (§. 97).

COROLLARIUM 2.

319. Ejusdem igitur spatia æqualibus temporibus confecta ordine retrogrado decrescunt ut numeri impares 7. 5. 3. 1. 0 (§. 98), adeoque ascensus tandem sistitur, consequenter ubi vis impressa fuerit absumta, corpus vi gravitatis rursus descendit.

COROLLARIUM 3.

320. Sunt adeo inverse ut spatia iisdem temporibus ab alio gravi per eandem altitudinem cadente confecta. Sit enim e. gr. tempus in quatuor partes divisum; momento primo grave A descendet per spatium 1, B ascendet per 7; secundo A descendet per 3, B ascendet per 5; tertio A descendet per 5, B ascendet per 3; ultimo A descendet per 7, B ascendet per 1 (§. 86. 319).

COROLLARIUM 4.

321. Unde grave vi impressa ascendens ad eam altitudinem ascendit, ex qua decidere deberet, ut eam cadendo celeritatem acquireret, qua sursum propellitur.

COROLLARIUM 5.

322. Quamobrem cadendo acquirit vim ascendendi ad eam altitudinem, unde deciderat, in medio nimirum non resistente.

PROBLEMA 45.

323. *Dato tempore, quo grave impetu impresso ad altitudinem datam ascendit, determinare spatia singulis momentis confecta.*

RESOLUTIO.

Ponatur idem grave eodem tempore per eandem altitudinem descendisse & quærantur spatia singulis momentis percursa (*§.* 94): hæc enim inverso ordine sumta eadem sunt cum spatiis ascensus quæsitis (§. 320).

E. gr. Corpus perpendiculariter projectum intra 4 secunda ascendit per intervallum 240 pedum. Quæruntur spatia singulis temporibus confecta? Quodsi corpus descendisset, primo minuto descendisset per 15 pedes, secundo per 45, tertio per 75, quarto per 105. Primo itaque ascendit per 105, secundo per 75, tertio per 45, ultimo per 15 pedes.

PROBLEMA 46.

324. *Dato tempore, quo grave vi impressa ad datam altitudinem ascendit, determinare tempus, quo ad altitudinem aliam datam pervenit.*

RESOLUTIO.

Quæratur tempus, quo grave per altitudinem desideratam decidere potest (§. 95): eodem enim ad eandem ascendet (*§.* 320. 322).

Vide supra exemplum probl. 2. (§ 95).

THEOREMA 49.

325. *Vires corporum vivæ sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Corpus E cadendo per AB acquirit vim ascendendi per AB, & F cadendo per CD vim adipiscitur, qua per altitudinem CD elevari potest (*§.* 322). Sunt adeo vires, quibus corpora E & F per altitudines AB & CD elevantur, in ratione composita altitudinum AB & CD atque massarum E & F, quia vires in elevandis corporibus per eas altitudines totæ consumuntur. Sed AB & CD sunt in ratione duplicata velocitatum cadendo per istas altitudines acquisitarum (*§.* 86). Ergo vires E & F sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. Sunt vero vires E & F vivæ, utpote non solo nisu, sed impetu concepto agentes, adeoque cum motu actuali conjunctæ (§. 9). Constat igitur vires vivas esse in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum. *Q. e. d.*

Tab. III. Fig. 42.

CO-

COROLLARIUM.

326. Quare ſi maſſæ fuerint æquales; vires ſunt in ratione duplicata celeritatum (§. 181 *Arithm.*).

SCHOLION I.

327. *Errant qui promiſcue vires omnes in ratione compoſita maſſarum & velocitatum eſſe ſtatuunt, propterea quod mortua in eadem deprehenduntur* (§. 278). *Errorem communem detexit & emendavit* (y) *Vir illuſtris* Leibnitius. *Aliam theorematis* Leibnitiani *demonſtrationem invenit & per literas mecum pro humanitate ſua communicavit celeberrimus* Bernoullius, *quam ipſis viri ingenioſiſſimi verbis huc transſcribo.*
Tab. ,,Concipe, inquit, corpus C moveri ob-
IV. ,,lique in elaſtrum L velocitate CL ut 2,
Fig. ,,angulo inclinationis CLP exiſtente 30
41. ,,gr. cujus nempe ſinus CP eſt ſemiſſis
,,radii *CL.* *Suppono* autem eam eſſe
,,reſiſtentiam in elaſtro, ut ad illud ten-
,,dendum requiratur præciſe unus velo-
,,citatis gradus in illo corpore, ſi per-
,,pendiculariter impingeret. Quid er-
,,go jam fiet poſt incurſionem obliquam
,,corporis C in elaſtrum L ? Quoniam
,,motus per CL componitur, ut notum
,,eſt, ex duobus collateralibus per CP &
,,PL (*vide* §. 241), & cum OP, ſecun-
,,dum quam corpus directe impingit in
,,elaſtrum L, exprimat dimidiam celeri-
,,tatem corporis per CL, conſumetur hic
,,motus per CP, tenſo elaſtro (perinde
,,enim eſſet ac ſi corpus C celeritate CP
,,perpendiculariter incurreret in ela-
,,ſtrum, quod per hypotheſin eam cele-
,,ritatem deſtruere poteſt) remanente
corporis celeritate & directione PL."
Producta igitur PL in M, ita ut LM"
ſit = PL = $\sqrt{3}$ (ponitur enim CL = 2)"
& applicato in M alio ſimili elaſtro fa-"
ciente cum LM angulum LMQ, cujus"
ſinus LQ = CP = 1 ; per eandem ratio-"
nem manifeſtum eſt, corpus C poſt ten-"
ſionem elaſtri L tenſurum eſſe elaſtrum"
M amiſſo motu per LQ & ſervato mo-"
tu per QM. Prolongata itaque QM"
ad N, ut fiat MN = QM = $\sqrt{2}$, ibique"
ſubſtituto elaſtro ſimili tertio, conſti-"
tuente cum MN angulum MNR ſemi-"
rectum, quo ſcilicet MR iterum ſit ="
CP = 1; patet ſimiliter motum per"
MR totum impendi in tenſionem ela-"
ſtri N, corpore interim moveri pergen-"
te directione & celeritate RN = 1. De-"
nique ſi hac celeritate reſidua impingat"
perpendiculariter in elaſtrum O, huic"
flectendo totam ſuam vim reliquam"
dabit; ipſum itaque corpus ad quietem"
redigetur. Hiſce ita præmiſſis, patet"
nunc potentiam corporis C tantam"
fuiſſe, ut per ſe ſolum tendere poſſit"
præciſe quatuor elaſtra talia, ad quæ"
ſingula ſeorſim tendenda requiritur di-"
midia velocitas corporis æqualis ipſi"
C, adeoque cum effectus illius quadru-"
plo major ſit, quam effectus hujus, evi-"
dens eſt quoque vim corporis velocita-"
te 2 gr. quadruplam eſſe vis corporis"
ejuſdem vel æqualis velocitate 1 gr."
Haud abſimili modo demonſtrarem"
corpus C velocitate 3 gr. tendere poſſe"
9 elaſtra, ad quorum unum tendendum"
unus velocitatis gradus in eo corpore"
requiritur, & tandem in genere nume-"
rum elaſtrorum tenſorum ſemper eſſe"

K 3 ,,qua-

(y) Act. Erudit. A. 1686 p. 161 & ſeqq.

„quadratum numeri graduum velocitatis. Unde igitur sequetur, vires corporum æqualium esse in duplicata ratione celeritatum. *Q. e. d.*

SCHOLION 2.

328. *Prodiit nuper Parisiis Tractatus Mathematici hujus eminentis* (z), *in quo hanc virium mensuram a nonnullis Mathematicis exteris impugnatam multo apparatu stabilivit. Præterea Viri celeberrimi* Gravesandius (a) Hermannus & Bülffingerus (b) *eandem mensuram aliis modis demonstrarunt, &* Polenus (c) *experimentis confirmavit. Ego in Principiis Dynamicis* (d) *analysi vere dynamica eandem virium mensuram erui. Qui vires vivas a mortuis non distinguunt, vires promiscue æstimant per celeritatem in massam ductam.*

THEOREMA 50.

Tab. III. Fig. 39. 329. *Si grave vel perpendiculariter per* AD, *vel per quamcunque superficiem* FED *descendat & impetu concepto per aliam* DC *rursus ascendat, in punctis æquealtis veluti in* G, H & Q, *eandem vim eandemque celeritatem habebit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam grave vi cadendo per AD vel FD acquisita ad C usque ex D per DGC ascendit (§. 322); ubi ad G pervenit, ea ipsi superest vis, qua ad C usque ascendere valet. Sed eandem vim adipiscitur cadendo ex C per CG, itemque ex A ad H, nec non ex F in Q (§. *cit.*). In punctis adeo æque altis G, H & Q eandem vim habet. *Quod erat unum.*

Sunt autem vires cadendo acquisitæ in punctis G, H & Q ut quadrata celeritatum (§. 326). Quare cum vires æquales sint, *per demonstr.* celeritatum quoque quadrata, consequenter ipsæ celeritates æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

330. Quodsi adeo grave per superficiem quamcunque FED descendat & per aliam similem ac æqualem similiterque positam DGC rursus ascendat; idem omnino est, ac si eadem linea eadem velocitate singulis sui partibus bis percurreretur (§. 329). Unde tempora descensus & ascensus per æqualia spatia æqualia sunt (§. 25).

CA-

(z) Discours sur les Loix de la communication du mouvement, a Paris 1727.
(a) In Element. Phys. Tom. I. p. 112 edit. poster.
(b) In Comment. Acad. Scient. Petropolitanæ p. 1.45.
(c) In Tractatu de Castellis p. 56 & seqq.
(d) In Comment. Acad. Scient. Petropolit. p. 231.

CAPUT VIII.
DE
DESCENSU ET ASCENSU CORPORUM IN LINEIS CURVIS.

DEFINITIO 37.

331. *Cura iſochrona* dicitur, in qua grave ſine acceleratione deſcendit, hoc eſt æqualibus temporibus æqualiter ad horizontem accedit.

COROLLARIUM.

332. In Curva iſochrona tempora deſcenſus ut altitudines ejusdem.

SCHOLION.

333. *Problema de curva iſochrona invenienda propoſuit* Leibnitius (e) *& ſuppreſſa analyſi demonſtrationem ſyntheticam dedit* (f). *Dedit autem ſolutionem ope calculi differentialis tunc temporis naſcentis* Jacobus Bernoulli (g): *dedere poſt eum alii alias.*

PROBLEMA 47.

Tab. XIII. Fig. 30. 334. *Invenire curvam iſochronam.*

RESOLUTIO.

Sit linea horizontalis BC, altitudo, per quam grave ad eandem deſcendit AC, curva iſochrona GMB Sit $AP = x$, $PM = y$; erit ducta *pm* ipſi PM infinite propinqua $Pp = dx$, $mR = dy$ & $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam in curva iſochrona tempora deſcenſus ſunt ut altitudines, per quas deſcenditur (§. 332); erit tempus per *Mm* ut P*p*, adeoque $= dx$. Et quia celeritas in M acquiſita eadem eſt cum celeritate in P acquiſita (§. 308), adeoque in ratione ſubduplicata altitudinis AP (§. 87); erit celeritas, qua arculus infinite parvus M*m* percurritur, $= Vx$. Jam cum per arculum M*m* grave motu æquabili feratur, erit ipſe tanquam ſpatium a mobili percurſum (§. 12) $= dxVx$ (§. 34). Eſt itaque in curva iſochrona

$$dxVx = V(dx^2 + dy^2)$$

$$xdx^2 = dx^2 + dy^2$$

$$xdx^2 - dx^2 = dy^2$$

h. c. $$dx^2(x-1) = dy^2$$

$$dxV(x-1) = dy$$

Fiat $$x - 1 = v$$

erit $$dx = dv$$

$$dxV(x-1) = dvVv = v^{1:2}dv$$

adeoque $$v^{1:2}dv = dy$$

$\frac{2}{3}v^{3:2}$

(e) Nouvelles de la Republ. des lettres Septemb. 1687.
(f) In Actis Erudit. A. [illegible] p. 196 & ſeqq.
(g) In Actis Erudit. A. [illegible] p. 217 & ſeqq.

$$\frac{2}{3}v^{3:2} = y$$
$$\frac{4}{9}v^3 = y^2 \text{ five } v^3 = \frac{9}{4}y^2$$

Apparet adeo, Curvam iſochronam eſſe e numero paraboloidum quadratico-cubicalium (*§.519 Analyſ. infin.*), cujus abſciſſa $=v$, ſemi ordinata PM$=y$, parameter $\frac{9}{4}$. Quoniam altitudo, per quam cadit grave, eſt x, ſed $v=x-1$; curva BMC lineam verticalem AC non ſecat in A, ſed in G, conſequenter mobile cadere debet per altitudinem AG, antequam in curva GMB deſcendere poſſit. Et quia AG $=1$, parameter vero $=\frac{9}{4}$; ſi ſit parameter $=p$, erit $p=\frac{9}{4}$ AG, adeoque $\frac{4}{9}p=$ AG, hoc eſt, altitudo AG, per quam deſcendere debet grave, antequam per curvam ita deſcendere poteſt, ut altitudines deſcenſus ſint tempori proportionales, quatuor nonis parametri curvæ æqualis. Mobile adeo non ex quiete aſcenſum inchoat, ſed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem quatuor nonis parametri æqualem.

SCHOLION.

335. *Supponimus directiones gravis cadentis, quas vi gravitatis habet, inter ſe parallelas: quemadmodum & in præcedentibus factum. Idem vero problema in hypotheſi directionum convergentium ſolvit* Varignonius (h). *Lubet igitur ſolutionem in eadem hypotheſi ſubjungere.*

PROBLEMA 48.

336. *Invenire lineam iſochronam in hypotheſi directionum in centro Telluris convergentium.* Tab. XIII. Fig. 131.

RESOLUTIO.

Sit diſtantia AC puncti horizontalis A, unde grave cadit, a centro Telluris C$=b$, AP$=x$ ut ante, AN arcus radio AC deſcriptus $=y$, quia ad AC perinde ac in problemate præcedente ſemiordinatæ ad eandem altitudinem perpendicularis (*§.38 Analyſ. infin.*). Sit porro radius Cn ipſi CN infinite propinquus & radiis CP atque Cp particula infinite parva Pp differentibus deſcribantur arcus concentrici PM & pm; erit MR$=$P$p=dx$, N$n=dy$ & ob ſimilitudinem ſectorum CnN & CmM (*§.138.412 Geom.*)

$$\text{CN}: \text{N}n = \text{C}m : m\text{R}$$
$$b : \quad dy = b-x :$$

adeoque $m\text{R} = (b-x)\, dy : b$.

Porro ob angulum ad R rectum (*§.38 Analyſ. infin.*)

$$\text{MR}^2 + m\text{R}^2 = \text{M}m^2 \text{ (§.417 Geom.)},$$

adeoque $\text{M}m^2 = dx^2 + (b-x)^2 dy^2 : b^2$
$= (b^2 dx^2 + (b-x)^2 dy^2) : b^2$

Enim-

(h) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1699 p. 1. & ſeqq.

Enimvero vi analyseos præcedentis (§. 334)

$$Mm^2 = xdx^2$$

Ergo $xdx^2 = (b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2) : b^2$

$$b^2xdx^2 - b^2dx^2 = (b-x)^2dy^2$$

$$bdx\sqrt{(x-1)} = (b-x)dy$$

$$\frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x} = dy$$

$$\int \frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x} = y$$

Cum y sit arcus AN & eo dato determinetur punctum M ducto ex centro C radio CN & intervallo CP ob AP $= x$ noto seu $= b-x$ arcu PM; non alia re opus est, quam ut arcus AN ex assumta AP sive x determinetur: id quod fit ope curvæ BQD. Si enim elementum ejus PpQq ponatur $= bdx\sqrt{(x-1)}:(b-x)$; cum sit Pp $= dx$, erit semiordinata PQ $= b\sqrt{(x-1)}:(b-x)$. Quare si area BPQ dividatur per AB $= 1$; prodibit recta arcui AN æqualis. Construatur itaque parallelogrammum rectangulum ABLK æquale areæ BPQ, cujus altitudo constans AB $= 1$; erit BL $=$ AK $=$ AN arcui, qui adeo circuli quadratura præsupposita determinari potest. Apparet itaque curvæ isochronæ in præsenti casu constructionem pendere a quadratura curvæ BQD & quadratura circuli.

Ut curvæ BQD natura investigetur, fiat

$$PQ = b\sqrt{(x-1)}:(b-x) = 0$$

$$\text{erit} \quad x-1=0$$

$$x = 1$$

Patet adeo semiordinata PQ evanescente, x degenerare in AB $= 1$, sive in B, ubi PQ $= 0$, esse AB adhuc $= 1$.

Fiat porro PQ $= b\sqrt{(x-1)}:(b-x) = \infty$

$$\text{erit} \quad b-x=0$$

$$b = x$$

Ergo ubi BP $= x$ degenerat in BC $= b$, semiordinata CR fit infinita, & hinc CR ad BC in centro C normalis est asymptotus curvæ BQD.

Ut curvæ BQD constructio detegatur, fiat BP $= v$, erit ob AP $= x$ & AB $= 1$

$$x = v + 1$$

$$x - 1 = v$$

$$PQ = \frac{b\sqrt{(x-1)}}{b-x} = \frac{b\sqrt{v}}{b-v-1}$$

Quoniam $\sqrt{v}$ est semiordinata parabolæ, cujus vertex in B, abscissa BP, parameter AB $= 1$ (§. 392 *Anal. finit.*); construatur circa axem BC parabola AHS, erit PH $= \sqrt{v}$

$= Vv$. Ducatur porro recta CV per punctum H ex centro C rectæ AT ad AC normali in V occurrens. Quoniam PH & AV inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PH = CA : AV$$
$$b - v - 1 : Vv = b : \frac{bVv}{b - v - 1}$$

Est igitur AV = PQ, adeoque punctum curvæ Q, a qua constructio isochronæ pendet, habetur si parallelogrammum PAVQ compleatur.

Hinc vero porro eruitur æquatio curvæ BQD ad axem AT relatæ. Nimirum si fit VQ = AP = y & AV = PQ = x, AB = a; erit

$$x = \frac{bV(ay - a^2)}{b - y}$$
$$x^2 = \frac{ab^2y - a^2b^2}{(b-y)^2}$$
$$x^2(b-y)^2 = ab^2y - a^2b^2$$

seu ob $(b-y)^2 = b^2 - 2by + y^2$

$$b^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = ab^2y - a^2b^2$$
$$x^2y^2 - 2bx^2y + b^2x^2 - ab^2y + a^2b^2 = 0$$

Si fiat $x = 0$

erit $a^2b^2 - ab^2y = 0$

$$a - y = 0$$
$$a = y$$

Est igitur semiordinata AB in origine abscissarum A = a, quod convenit cum superioribus, & curva BQD algebraica (§. 377 *Anal. finit.*), tertii quidem generis (§. 382 *Anal. finit.*).

Ut vero nunc etiam æquatio ad curvam isochronam in hypothesi directionum convergentium eruatur, fiat præter AB = 1, BP = v, arculus mR radio Cp = CR descriptus = dz, cum sit Pp = dv, erit Mm^2 = $dz^2 + dv^2$ (§. 417 *Geom.*). Est vero Mm^2 = xdx^2 vi superioris analyseos. Quare cum sit

$$x = v + 1$$

erit $dx = dv$

$$dx^2 = dv^2$$
$$xdx^2 = (v+1)dv^2$$
$$= vdv^2 + dv^2$$

Habemus itaque

$$dz^2 + dv^2 = vdv^2 + dv^2$$
$$dz^2 = vdv^2$$
$$dz = v^{1:2}dv$$
$$z = \tfrac{2}{3}v^{3:2}$$
$$\tfrac{9}{4}z^2 = v^3$$

hoc est, $\frac{9}{4}$ AB. PM^2 = BP^3

Quoniam PM est arcus circuli radio CP descriptus, curva isochrona BMC in hypothesi directionum

num convergentium transcendens est (§. 380 *Analys.*).

Ut curvæ hujus indoles porro detegatur, ponatur in æquatione differentiali ad eandem $dz = dv\sqrt{v}$ seu $dz : dv = \sqrt{v}$

$$v = 0$$

erit

$$dz : dv = 0$$

$$dv = \infty$$

Est vero in B $v = 0$ & $dv = \infty$. Axis igitur CB curvam BMC in C tangit, adeoque ea axi convexitatem ibidem obvertit.

Quodsi fiat CP=0, arculus quoque radio CP descriptus $mR = dz = 0$: punctum ergo M coincidit cum C, adeoque curva BMC cum axe in C concurrit, quæ in B eam tangit. Necesse igitur est ut ibidem sit ad axem concava, consequenter punctum flexus contrarii habet.

Jam in puncto flexus contrarii M est $Mm^2 = CP.\ dPp$ (§. 309 *Anal. infin.*). Fiat igitur $CB = c$. Cum sit $BP = v$, erit $CP = c - v$, adeoque $Pp = -dv$. Jam

$$dz = -v^{1:2} dv$$

adeoque

$$v^{1:2} dz = dv$$

$$-v^{-1:2} dz = -dv$$

$$\tfrac{1}{2} v^{-3:2} dz dv = -ddv = dPp,$$ ob constantem dz,

$$\tfrac{1}{2}(c-v) v^{-3:2} dz dv = CP.\ dPp$$

Porro

$$Mm^2 = dz^2 + dv^2$$
$$= v dv^2 + dv^2$$

Habemus itaque

$$v dv^2 + dv^2 = \tfrac{1}{2}(c-v) v^{-3:2} dz dv$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-v) v^{-1} dv^2$$

$$v + 1 = (c-v) : 2v$$

$$v^2 + v = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}v$$

$$v^2 + \tfrac{3}{2}v = \tfrac{1}{2}c$$

$$v^2 + \tfrac{3}{2}v + \tfrac{9}{16} = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16}$$

$$v + \tfrac{3}{4} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})}$$

$$v = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{9}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16})} - \tfrac{3}{4}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}AC.AB + \tfrac{1}{16}AB^2)} - \tfrac{3}{4}AB$$

ob $c + 1 = AC$

Sit Cl ultimum elementum curvæ, erit $hl = dz$ & $hc = dv$, & ob rectam ad h (§. 38 *Anal. infin.*) hl ad hc ut sinus anguli hCl ad sinum anguli hlC (§. 33 *Trigon.*), adeoque $dv : dz = \text{sin.}\ hCl : \text{sin.}\ hlC$. Si Cl sit ultimum curvæ elementum, punctum l infinite parvo intervallo ab axe AC distat, seu cum eo coincidit, atque adeo punctum l est in axe AC & angulus hCl idem cum ACG, intra quem curva BMC comprehenditur. Quare

 dl:

$dv:dz=$ sin. ACG : Cosin. ACG. Est vero $dz\sqrt{v}=dv$, adeoque $dz:dv=\sqrt{v}:1=\sqrt{BC}:\sqrt{AB}$. Est igitur sinus anguli ACG, intra quem curva continetur, ad ejus cosinum in ratione subduplicata rectarum CB & BA (§. 167 *Arithm.*). Et per hoc theorema angulus ACG, consequenter arcus AG determinatur, qui curvæ isochronæ toti construendæ sufficit.

Denique in æquatione $dz=dv\sqrt{v}$ substituatur valor ipsius $v=x-1$, erit $dz=dx\sqrt{(x-1)}$.

Fiat $dz=0$

erit $dx\sqrt{(x-1)}=0$

$x-1=0$

$x=1$

$=AB$

Quare cum x denotet altitudinem, per quam grave cadit, seu motus acceleratricem, & dz in puncto B sit $=0$, ubi axis BC curvam tangit, *per demonstrata*; grave non ex quiete motum in curva BMC incipere debet, sed ea celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem AB.

Tab. XIV. Fig. 32. Angulus, intra quem continetur curva isochrona in hypothesi directionum convergentium, determinatur, si super AC, hoc est, recta inter locum A, unde descensus incipit, & centrum Telluris C interjecta, describatur semicirculus, & in B, ubi curva axem tangit, erigatur perpendicularis BD, factaque BE = BA ducatur ex C rectæ ED parallela CF perpendiculari BD ultra semicirculum continuatæ in F occurrens: est enim ACF angulus quæsitus, consequenter arcus AG ex centro C radio CA descriptus curvæ construendæ sufficit. Etenim AB BD=BD: BC (§. 327 *Geom.*). Quare AB ad BD in ratione subduplicata AB:BC (§. 216. 159 *Arithm.*), seu AB : BD $=\sqrt{AB}:\sqrt{BC}$, consequenter $\sqrt{BC}:\sqrt{AB}=$ BD : AB (§. 169 *Arithm.*). Quoniam, FC parallela ipsi DE *per construct.* erit DB : BE = FB : BC (§. 268 *Geom.*), adeoque $\sqrt{BC}:\sqrt{AB}=$ BF : BC (§ 167 *Arithm.*). Est vero etiam BF : BC = sin. BCF : sin. CFB (§. 33 *Trig.*) = sin. ACG : Cosin ACG. Ergo sin. ACG: Cos. ACG $=\sqrt{BC}:\sqrt{AB}$ (§. 167 *Arithm.*). Est igitur ACG angulus quæsitus.

Quodsi super AH $=\frac{1}{2}$ AC semicirculus AIH describatur & in B perpendicularis excitetur, ductisque AI & IH fiat IK=AL $=\frac{1}{4}$ AB & LO = KA, erit O punctum axis, cui punctum flexus contrarii respondet. Est enim AB: AI = AI: AH sive $\frac{1}{2}$ AC (§. 330 *Geom.*), adeoque

que $AI = \sqrt{\frac{1}{2} AC. AB}$ (§. 377 *Geom.*). Quare cum angulus AIK sit rectus (§. 317 *Geom.*), erit $AK = \sqrt{(\frac{1}{2} AC. AB + \frac{1}{16} AB^2)}$. Et quia $LB = \frac{1}{4} AB$ & $LO = AK$ *per construct.* erit $BO = \sqrt{(\frac{1}{2} AC. AB + \frac{1}{16} AB^2)} - \frac{3}{4} AB$. Quare in O est punctum axis, quod puncto flexus contrarii respondet.

SCHOLION 1.

337. *Atque ita calculo analytico eruimus præcipuas curvæ isochronæ proprietates in hypothesi directionum convergentium, quæ præsenti instituto inserviunt. Constat enim, quomodo sit construenda supposita quadratura curvæ cujusdam per parabolam construenda & quadratura circuli. Constat præterea, quænam sint puncta, quibus ductus curvæ determinatur, nempe quod in* B *axem tangat, eique convexitatem obvertat, punctum* O *respondeat flexui contrario, ita ut curva portioni axis* OC *concavitatem obvertat, in* C *denique eadem cum axe concurrat, tota autem intra angulum* ACG *contineatur. Quoniam tamen curva ista & rectificabilis, & quadrabilis est, quadraturam & longitudinem in corollariis determinare libet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. XIII. Fig. 131. 338. Quoniam $Mm = dx \sqrt{x}$ (§. 336) $= x^{1:2} dx$, erit arcus curvæ $BM = \frac{2}{3} x^{3:2} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$. Sed $x = v + 1$ (§. cit.). Ergo $BM = (\frac{2}{3} + \frac{2}{3} v)\sqrt{(v+1)} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \frac{AP. \sqrt{AP}}{AB} - \frac{2}{3} AB$. Quare si super AP describatur semicirculus & erecta in B perpendiculari BC & in D (est autem $AD = \frac{2}{3} AP$) perpendiculari DE ducatur recta AE occurrens ipsi DE in E, tandemque ex EA resecetur $EG = \frac{2}{3} AB$, erit AG longitudo arcus. Est enim $AP : AC = AC : AB$ (§. 330 *Geom.*), adeoque $AC = \sqrt{AP}$ ob $AB = 1$. Porro cum ED ipsi BC parallela (§. 256 *Geom.*); $AB : AC = AD : AE$ (§. 268 *Geom.*). Ergo $AE = \frac{AD. AC}{AB} = \frac{2}{3} \frac{AP. \sqrt{AP}}{AB}$. Quare cum $GE = \frac{2}{3} AB$ *per constr.* erit utique recta AG arcui curvæ æqualis. Tab. XIV. Fig. 131.

COROLLARIUM 2.

339. Quoniam elementum areæ est sector infinite parvus $CmR = mR. \frac{1}{2} CR = v^{1:2} dv (\frac{1}{2} c - \frac{1}{2} v)$ (§. 336) $= \frac{1}{2} cv^{1:2} dv - \frac{1}{2} v^{3:2} dv$; erit area $BMC = \frac{1}{3} cv^{3:2} - \frac{1}{5} v^{5:2} = (\frac{1}{3} cv - \frac{1}{5} v^2)\sqrt{v} = (5cv - 3v^2)\sqrt{v} : 15 = \frac{(5CB. BP - 3 BP^2)\sqrt{BP}}{15 AB}$ ob $AB = 1$. Quodsi fiat $v = c$, erit area integra $= (5c^2 - 3c^2)\sqrt{c} : 15 = \frac{2}{15} c^2 \sqrt{c} = \frac{2}{15} BC^2. \sqrt{BC} : AB$, denuo ob $AB = 1$. Tab. XIII. Fig. 131.

SCHOLION 2.

340. *Quoniam* $v = BP$ *& area curvæ incipit in puncto* B, *non opus est, ut de quantitate adjicienda solliciti simus. Sed cum in corollario primo origo ipsius* x *in* A, *curvæ autem in* B: *ideo pro* x *substitui debebat* v, *ut constaret de quantitate adjicienda.*

COROLLARIUM 3.

341. Si CM ad PM perpendicularis

(§. 38 *Anal. infinit.*) fiat infinite magna, erit ea axi AC parallela & PM arcus, itidemque aliter AN degenerat in rectam arcui æqualem, propterea quod cum AC nullibi concurrit (§. 82. 256 *Geom.*). Quare cum x sive AP intuitu infinitæ b sive AC=o; erit $b-x$=o, adeoque æquatio $y=\int \frac{bdx\surd(x-1)}{b-x}$ (§. 336) degenerat in sequentem $y=\int bdx\surd(x-1):b=\int dx\surd(x-1)$; qui est casus *Leibnitianus* (§. 334).

SCHOLION 3.

342. *Cum centrum terræ ingenti admodum intervallo distet, & altitudines, in quibus gravium descensus nobis usui esse potest, respectu illius distantiæ sint admodum exiguæ; casus directionum parallelarum praxi satisfacit, cui etiam ob faciliorem curvæ descriptionem sese commendat* (§. 334 *Mech.* & §. 581 *Analys.*). *In illo igitur acquiescere poteramus, nisi nobis quoque propositum esset speciminibus illustribus docere, quomodo principiis mathematicis in his Elementis a nobis explicatis in solvendis problematis arduis sit utendum & quo ordine ratiocinia sint concatenanda, ut non perturbato animi statu ad portum optatum perveniatur. Quamobrem nec piget desolutione generali problematis in duplici hypothesi hactenus considerati nonnulla addere. Nimirum solvimus problema de curva isochrona in hypothesi accelerationis* Galilæana, *propterea quod experimentis in iis altitudinibus, in quibus ea capere licet, satisfacit, ita ut in locum hypotheseos naturæ quoad nos surrogari possit* (§. 85 & seqq.). *Enimvero cum aliæ quoque hypotheses non sint impossibiles atque Geometræ sit problema in omni hypothesi solvere, quamdiu ignoratur, quænam illarum sit hypothesis naturæ; ut ostendamus restat, quid fieri conveniat data quacunque accelerationis lege. Generalem adeo solutionem hic inprimis admittimus in usum artis inveniendi, ut appareat progressus a solutionibus particularibus ad generales.*

PROBLEMA 49.

343. *Invenire curvam isochronam in quacunque accelerationis hypothesi.*

RESOLUTIO.

Quodsi acceleratio alia statuatur, quam quæ in hypothesi *Galilæana* obtinet, directionibus parallelis manentibus, curvæ isochronæ BMC accedat curva celeritatum ANE juxta altitudinem acceleratricem AG tanquam communem axem descripta, cujus semiordinatæ PN, GE exprimunt celeritates per abscissas iisdem respondentes AP, AG acquisitas. Tab. XIV. Fig. 114.

Sit itaque AP=x, PM=y, PN=v, reperietur, eodem prorsus quo supra (§. 334) modo Mm=vdx, ut adeo habeamus

$$dx^2+dy^2=v^2dx^2$$

$$dy^2=v^2dx^2-dx^2$$

$$dy=dx\surd(v^2-1)$$

Si

Quodsi jam sit $v=Vx$, quemadmodum in hypothesi *Galilæana*; prodibit $dy=dxV(x-1)$, prorsus ut supra (§. *cit.*). Solutio itaque particularis convertitur in universalem, aut potius specialis in generalem, si pro Vx ponas v; id quod regulis Logicis, quas stabilivimus, ad amussim congruit (§. 710 *Log.*).

Tab. XIV. Fig. 135. Quodsi magis arriserit ope loci sollicitationum centralium, seu scalæ gravitatis IQO problema solvere; pari facilitate idem præstatur. Accedat enim porro ad curvam isochronam BMC & curvam celeritatum ANC scala sollicitationum centralium IQO & sit communis abscissa AP in altitudine acceleratrice $AG=x$, $PM=y$, $PN=v$, $PQ=g$; erit $v^2=2\int gdx$ (§. 113). Quare si pro v^2 hunc valorem substituas, prodibit $dy=dxV(2\int gdx-1)$. Quodsi jam supponas, quemadmodum id obtinet in hypothesi *Galilæana* (§. 112), gravitatem constantem, quæ adeo sit ut 1; erit $dy=dxV(2\int dx-1)=dxV(2x-1)$, vel, cum hic sola ratio attendatur, minime autem magnitudo absoluta, $dy=dxV(x-1)$, ut supra (§ 334).

SCHOLION.

344. *In curva isochrona temporis descensus sunt ut altitudines, per quas descenditur* (§. 332). *Invenire autem possunt etiam curvæ alia, in quibus tempus ad altitudinem relationem quamcunque constantem vel quomodocunque assignabilem habet. Quamobrem in gratiam artis inveniendi solutionem problematis generalem apponimus, sub quo curva isochrona tanquam casus particularis continetur.*

PROBLEMA 50.

345. *Invenire curvam, in qua grave descendit ea lege, ut tempus habeat ad altitudinem, per quam descendit, relationem datam, seu ut tempora descensus habeant inter se relationem ex datis altitudinibus dato modo assignabilem, suppositis quacunque accelerationis lege & directionibus sive parallelis, sive convergentibus.*

RESOLUTIO.

Non differt resolutio problematis præsentis a resolutione præcedentis, nisi quod circa axem communem describatur, præter curvam descensus BMC, curvam celeritatis ANE, etiam curva temporis PS. Nimirum grave in curva BMC ea lege descendit, ut in M sit celeritas ut semiordinata PN, tempus vero ut PS. Tab. XIV. Fig. 136.

Sit $AP=x$, $PN=v$, $PS=t$, $PM=y$; erit $Mm=V(dx^2+dy^2)$ itemque ob suppositum per Mm motum æquabilem vdt, ut supra (§. 334).

Ha-

Habemus itaq; $vdt = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$$v^2dt^2 = dx^2 + dy^2$$

$$v^2dt^2 - dx^2 = dy^2$$

$$dy = \sqrt{(v^2dt^2 - dx^2)}$$

$$y = \int \sqrt{(v^2dt^2 - dx^2)}$$

Quodsi ergo in dato casu speciali v exprimatur per x & dt per dx, prodit æquatio curvæ descensus respondens.

Sit. E. gr. $v = \sqrt{x}$ & $t = x$, quemadmodum in curva isochrona, supposita accelerationis lege *Galilaana*; erit $dt = dx$, adeoque $y = \int \sqrt{(xdx^2 - dx^2)} = \int dx \sqrt{(x-1)}$, ut supra (§. 334).

Quodsi quis in casu directionum convergentium problema resolvere velit, non novo calculo opus est, sed in æquatione prima paulo ante (§. 336) inventa pro $x\,dx^2$ substitui debet v^2dt^2: quo facto habemus

$$v^2dt^2 = \frac{b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2}{b^2}$$

$$v^2b^2dt^2 = b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2$$

$$\frac{v^2b^2dt^2 - b^2dx^2}{(b-x)^2} = dy^2$$

$$dy = \frac{b\sqrt{(v^2dt^2 - {}^2dx^2)}}{b-x}$$

Quodsi etiam hic in dato casu speciali v & t per x determinentur, æquatio curvæ descensus prodit.

E. gr. Sit ut ante $v = \sqrt{x}$, $t = x$, quemadmodum pro curva isochrona supposuimus; erit $dy = \frac{b\sqrt{({}^2xdx^2 - {}^2dx^2)}}{b-x} = \frac{bdx\sqrt{(x-1)}}{b-x}$, ut supra (§. 336).

SCHOLION.

346. *Ubi adeo problema in casu particulari solutum, veluti in casu* Leibnitii, *non difficilis est solutio universalis, quamcunque universalitatem eidem donare volueris: id quod etiam in aliis problematis similiter obtinet. Enimvero ubi solutio generalis ad casum specialem applicanda, plus difficultatis oritur, quatenus nempe formulæ, quæ per substitutionem prodeunt, vel summandæ, vel ad quadraturas aut rectificationes simpliciorum curvarum reducendæ. Atque ea ratio est, cur Geometræ eminentes artem inveniendi sive analysin promoturi parum solliciti fuerint de solutionibus generalibus, modo particulares dare possent, in quibus ars eminebat, novis artificiis analyticis introductis.*

DEFINITIO 38.

347. *Curva isochrona paracentrica* dicitur, per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedit, vel ad illud accedit. Dicitur etiam *curva accessus & recessus æquabilis.* Tab. XIV. Fig. 137.

Sit BCM curva quæsita, D punctum fixum in axe datum, DM esse debet ut tempus descensus ab A in M,

SCHO-

SCHOLION.

348. *Problema de curva isochrona paracentrica invenienda primum propositum est a* Leibnitio (i); *sed cum solutu difficilius sit priore, dudum intactum reliquerunt Geometræ, donec tandem solutionem daret* Jacobus Bernoulli (k) *& simul solutiones* Leibnitii *Fratrisque* Joannis (l) *eliceret. Generalius deinde idem problema solvit* Varignonius (m). *Lubet hic dare solutionem præcedenti, quantum licet, affinem.*

Tab. XIV. Fig. 137.

PROBLEMA 51.

349. *Invenire curvam isochronam paracentricam.*

RESOLUTIO.

Sit A punctum, unde descensum inchoat grave; D punctum, a quo vel recedit, vel ad quod accedit, prout casus tulerit. Radio AD describatur semicirculus ANF, ductisque ad punctum curvæ M rectis DM & Dm infinite propinquis agantur ad axem normales NQ & PM, itemque nq, quæ erit ipsi NQ infinite propinqua. Ducatur NT tangens circulum in N (§. 38 *Anal. infin.*) & nO normalis ad NQ, tandemque radio DM arculus MR ex centro D.

Sit jam DN = DA = DF = a, DQ = z, DM = t, erit mR = dt, Qq = nO = dz & QN = $V(a^2-z^2)$ (§. 417 *Geom.*). Quæratur jam ut in problemate anteriore de curva isochrona (§. 334 & 336) arcus Mm duplici modo, nempe 1. ex principiis pure geometricis, 2. ex principiis mechanicis, seu conditione problematis.

I. Quoniam TN circulum tangit in N *per construct.* angulus TND rectus est (§. 38 *Anal. infin.*), adeoque △ DNQ ∽ △ QNT seu angulus DNQ = QTN (§. 329 *Geom.*). Sed ob parallelismum rectarum nO & QT (§. 256 *Geom.*) angulus OnN = QTN (§. 233 *Geom.*). Ergo OnN = DNQ (§. 87 *Arithm.*). Quare cum DQN & nON sint recti *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$NQ : DN = nO : Nn$$
$$V(a^2-z^2) : a = dz :$$
$$Nn = adz : V(a^2-z^2)$$

Porro ob sectores DnN & DRM similes (§. 138. 412 *Geom.*)

$$DN : Nn = DM : MR$$
$$a : adz$$

(i) In Actis Erudit. A. 1689. p. 198.
(k) In Actis Erudit. A. 1694 p. 277.
(l) Ibid. p. 371. 394.
(m) In Comment. Academ. Reg. Scient. A. 1699 p. 9 & seqq.

$$a : \frac{adz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = t :$$

$$MR = tdz : \sqrt{(a^2-z^2)}$$

Hinc $MR^2 = t^2dz^2 : (a^2-z^2)$

Sed $mR^2 = dt^2$

Ergo $Mm^2 = \frac{t^2dz^2}{a^2-z^2} + dt^2$

$$= \frac{t^2dz^2 + a^2dt^2 - z^2dt^2}{a^2-z^2}$$

II. Quoniam motus per arculum infinite parvum Mm æquabilis supponitur, erit spatium Mm in ratione composita temporis & celeritatis in M acquisitæ (§. 34). Sed tempus est ut mR sive dt (§. 347) & celeritas in M acquisita in hypothesi *Galilæana* seu gravitatis constantis ut $\sqrt{AP}$ (§. 87). Ergo $Mm = dt.\sqrt{AP}$. Est vero ob parallelas QN & PM (§. 268 *Geom.*)

$$DN : DQ = DM : DP$$

$$a : z = t :$$

$$DP = tz : a$$

Ergo $AP = AD + DP$

$$= a + tz : a$$

$$= \frac{a^2 + tz}{a}$$

Unde $Mm = dt.\sqrt{AP}$ *per demonstr.*

$$= dt\sqrt{(a^2+tz)} : \sqrt{a}$$

$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{1 . a}$$

hoc est, sumta a pro unitate,

$$Mm^2 = \frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2}$$

Habemus itaque

$$\frac{a^2dt^2 + tzdt^2}{a^2} = \frac{a^2dt^2 - z^2dt^2 + t^2dz^2}{a^2-z^2}$$

$$a^4dt^2 + a^2tzdt^2 - a^2z^2dt^2 - tz^3dt^2 = a^4dt^2 - a^2z^2dt^2 + a^2t^2dz^2$$

$$a^2zdt^2 - tz^3dt^2 = a^2t^2dz^2$$

$$dt\sqrt{(a^2z-z^3)} = adz\sqrt{t}$$

$$\sqrt{a}$$

$$dt\sqrt{(a^3z-az^3)} = adz\sqrt{at}$$

$$\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^3z-az^3)}}$$

h. e. $a^{-1:2}t^{-1:2}dt = adz : \sqrt{(a^3z-az^3)}$

$$2a^{-1:2}t^{1:2} = a\int(dz : \sqrt{(a^3z-az^3)})$$

$$a$$

$$2a^{1:2}t^{1:2} = a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z-az^3)})$$

$\int.\ 2\sqrt{at} =$

Atque hæc est æquatio, quam dedit *Leibnitius* pro curva isochrona paracentrica (n). Omnis itaque rei cardo huc redit, ut $a^2\int(dz : \sqrt{(a^3z-az^3)})$ determinetur, quod membrum æquationis absolute summari nequit. Dari autem potest constructio sive per quadraturam, sive per rectificatio-

(n) In Actis loc. cit. p. 371 & 372.

tionem alicujus curvæ. Dabimus primo constructionem per quadraturam.

Quoniam igitur $a^3dz : V(a^3z - az^3)$ est elementum curvæ, erit semiordinata $v = a^3 : V(a^3z - az^3)$ (§. 98 *Anal. infinit.*)

Ut curvæ hujus indoles detegatur, ponatur

$$v = \infty$$

erit $V(a^3z - az^3) = 0$

$$a^3z - az^3 = 0$$

$$a^2 - z^2 = 0$$

$$a = z$$

Tab. XIV. Fig. 118. Quando itaque z fit a, hoc est, DQ degenerat in DC, semiordinata CR fit infinita. Est adeo CR asymptotus curvæ.

Fiat $z = 0$

erit $v = a^3 / 0$

Quare ubi z fit o, seu evanescit, semiordinata DS est asymptotus curvæ.

Quoniam $v = a^3(a^3z - az^3)^{-1:2}$

erit

$$dv = -\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz)$$

Si jam fiat $dv = 0$,

erit

$$-\tfrac{1}{2}a^3(a^3z - az^3)^{-3:2}(a^3dz - 3az^2dz) = 0$$

$$a^3dz = 3az^2dz$$

$$a^2 = 3z^2$$

$$V\tfrac{1}{3}a^2 = z$$

Quando itaque DQ = $V\tfrac{1}{3}a^2$, applicata QN fit minima (§. 63 *Analys. infin.*)

Quoniam $v = \dfrac{a^3}{V(a^3z - az^3)} = \dfrac{a^3}{V(a^2 - z^2)Vaz}$

erit $Vaz : a = a : \dfrac{a^2}{Vaz}$

$$V(a^2 - z^2) : \frac{a^2}{Vaz} = a : v$$

Est vero Vaz semiordinata parabolæ QG, cujus parameter = a & abscissa DQ (§. 392 *Analys.*) & $V(a^2 - z^2)$ semiordinata circuli = QF radio DA = a descripti (§. 377 *Geom.*). Curva igitur quadranda ita construitur. Circa communem axem AC describatur semicirculus AFC radio AD = a & parabola DGB, cujus vertex in D centro semicirculi, parametro a radio semicirculi æquali. Fiat deinde DI = GQ & DO = DA, itemque DL = QF, ductisque OK ipsi AI & KI ipsi LQ parallelis; erit DT = QN. Est enim

DI : DA = DO : DK

$$Vaz : a = a : \frac{a^2}{Vaz}$$

DL : DO = DK : DT

$V(a^2-z^2) : a = \frac{a^2}{Vaz} : \frac{a^3}{V(a^2-z^2)\,Vaz}$

Demisso itaque ex T perpendiculari TN ad QN; punctum N est in curva quæsita. Quodsi tandem spatio SDQNH fiat æquale rectangulum ADZV, erit ob AD=a, DZ= $a^2 \int (dz : V(a^3z - az^3))$.

Habemus ergo $DZ = 2Vat$

$\frac{1}{4}DZ^2 = at$

$\frac{DZ^2}{4a} = t$

Unde rectæ t, quibus puncta in isochrona paracentrica determinantur, facile inveniuntur. Nimirum fiat Dc = $\frac{1}{4}$DZ & ducatur bc ipsi ZA parallela; erit (§. 268 *Geom.*) DA : DZ = Db : Dc, consequenter Dc = t. Quare si ex centro D radio Dc describatur arcus secans DF in M; erit punctum M in isochrona paracentrica.

Videamus jam porro, quomodo summatio formulæ $\frac{dt}{Vt} = \frac{\int adz}{V(a^2z-z^3)}$ reducatur ad rectificationem arcus cujusdam. Quoniam $adz : V(a^2z - z^3)$ est elementum arcus, *per hypoth.* erit

$$V(dx^2+dy^2) = \frac{adz}{V(a^2z-z^3)}$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$$

Quoniam coordinatæ curvæ rectificandæ dx & dy per z dari debent, quadratum $a^2dz^2 : (a^2z-z^3)$ seu ejus multiplum dividendum est in duo alia, quorum latera, si fieri potest, sunt summabilia. Quamobrem cum numerator a^2dz^2 debeat esse aggregatum duorum quadratorum, evidens est requiri, ut quadrata non modo diversa habeant signa, verum etiam tales denominatores, qui in se invicem ducti producunt a^2z-z^3. Enimvero cum a^2z-z^3 in istiusmodi factores resolvi nequeat, fieri autem id possit, si mutetur in $a^2z^2-z^4$, cum tunc factores sint $az+z^2$ & $az-z^2$ (§.86 *Anal.*); fractio $a^2dz^2 : (a^2z-z^3)$ ducatur in z ut habeatur $a^2zdz^2 : (a^2z^2-z^4)$. Quare si laterum numeratores dicantur interea q & w; erunt latera $qdz : (Vaz+z^2)$ & $wdz : (Vaz-z^2)$. Ex differentiandi regulis constat, fore latera summabilia, si fiat $q = \frac{a+2z}{2}$ & $w = \frac{a-2z}{2}$, adeoque ipsa latera fiant $\frac{(a+2z)dz}{2V(az+z^2)}$ & $\frac{(a-2z)dz}{2V(az-z^2)}$.

Videamus itaque, an quadratorum summa = $\frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$. Quoniam

itaque

itaq; $dx = \frac{(a+2z)dz}{2\sqrt{(az+z^2)}}$ & $dy = \frac{(a-2z)dz}{2\sqrt{(az-z^2)}}$ erit $dx^2 = \frac{(a^2+4az+4z^2)dz^2}{4az+4z^2}$ & $dy^2 = \frac{(a^2-4az+4z^2)dz^2}{4az-4z^2}$ seu reductione ad eandem denominationem facta $dx^2 = (4a^3z + 16a^2z^2 + 16az^3 - 4a^2z^2 - 16az^3 - 16z^4)\, dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$ & $dy^2 = (4a^3z - 16a^2z^2 + 16az^3 + 4a^2z^2 - 16az^3 + 16z^4)\, dz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4)$, adeoque $dx^2 + dy^2 = 8a^3zdz^2 : (16a^2z^2 - 16z^4) = a^3dz^2 : (2az - 2z^3)$, seu multiplum quadrati dividendi consequenter $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{a^3} : \sqrt{(2az - 2z^3)}$.

Est vero $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z - z^3)}}$

$$\frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}}$$

$$\frac{adt}{\sqrt{2at}} =$$

$$\frac{at^{1:2}dt}{\sqrt{2a}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} = dv$$

$$\frac{2at^{1:2}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2at} = v$$

$$2at = v^2$$

$$t = v^2 : a$$

Quoniam itaque per hanc æquationem valor ipsius t inveniri potest; pro construenda curva isochrona paracentrica prius construi debet curva, in qua altera coordinata est $\sqrt{(az+z^2)}$ seu semiordinata hyperbolæ æquilateræ, cujus axis transversus $= a$, abscissa $= z$ (§. 507 *Analys.*), altera $\sqrt{(az-z^2)}$, seu semiordinata circuli, cujus diameter $= a$, abscissa $= z$.

Ut curvæ hujus natura intelligatur, fiat

$$x = \sqrt{(az+z^2)} \qquad y = \sqrt{(az-z^2)}$$

erit $x^2 = az + z^2 \qquad y^2 = az - z^2$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + az + z^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} = \tfrac{1}{2}a + z$$

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + x^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

$$az = a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$az - z^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$y^2 =$$

$$y^2 + x^2 + a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^2x^2 + a^4$$

$$y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 = 2a^2x^2 - x^4$$

Est itaque curva tertii generis (§. 382 *Analys.*).

Fiat $x = 0$

 erit

erit $y^4 + 2a^2y^2 = 0$

$$y = 0$$

Fiat $y = 0$

erit $2a^2x^2 - x^4 = 0$

$$2a^2 = x^2$$

$$\sqrt{2a^2} = x$$

Tab. XIV. Fig. 139. In vertice ergo D est origo utriusque indeterminatæ x & y. Quando ergo DG $= x = \sqrt{2a^2}$, semiordinata y evanescit, adeoque curva secat axem in G.

Porro si æquatio differentietur, erit

$$4y^3dy + 4yx^2dy + 4y^2xdx + 4a^2ydy = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

Quare si fiat $dy = 0$, erit

$$4y^2xdx = 4a^2xdx - 4x^3dx$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

quæ est maxima applicata (§. 63 *Analys. infinit.*). Quoniam vero $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ est semiordinata circuli HI (§. 377 *Anal.*), maxima applicata cadit in I, ubi circulus ex centro D radio DN $= a$ descriptus curvam secat.

Ponatur in æquatione $a^2 - x^2 = y^2$ valor ipsius $y^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$, habemus

$$a^2 - x^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$$

$$2a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a = \sqrt{(x^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}$$

$$a^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = \text{DH}$$

Quodsi ponamus abscissarum originem in G & GQ $= v$, erit DQ $= x = b - v$, adeoque æquatio ob $b = \sqrt{2a^2}$ in hanc degenerat:

$$b^2(b-v)^2 - (b-v)^4 = y^4 + 2y^2(b-v)^2 + b^2y^2$$

Fiat jam $v > b$, e. gr. $= \frac{3}{2}b$

erit $b - v = b - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2}b$

$(b-v)^2 = \frac{1}{4}b^2 \quad 2(b-v)^2 = \frac{1}{2}b^2$

$(b-v)^4 = \frac{1}{16}b^4$

consequenter

$$\tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{16}b^4 = y^4 + \tfrac{1}{2}b^2y^2 + b^2y^2$$

h. e. $\frac{3}{16}b^4 = y^4 + \frac{3}{2}b^2y^2$

Cum itaque valor ipsius y non fiat imaginarius, etiamsi v seu GQ sumatur major quam GD, seu axe curvæ GIFDIG; curva ultra D continuatur, adeoque se mutuo secant partes in D, hoc est, curva nodum in D habet. Ex constructione autem patet, partem inferiorem fore priori similem.

Ut determinetur angulus, sub quo curva axem in D secat, investiganda est ut supra (§. 336) ratio laterum infinite parvorum Dq & qf.

& qf. Quodsi enim Df sumatur pro sinu toto, fq sinus, Dq cosinus anguli quæsiti. Quodsi ergo in communi axe hyperbolæ atque circuli genetricium abscissa sumatur dz, semiordinata hyperbolæ erit $V(adz + dz^2)$ (§.507 *Analys.*), circuli vero $V(adz - dz^2)$ (§.377 *Analys.*), hoc est, cum dz^2 differentiale secundi gradus respectu primi adz evanescat, utrobiq; $= Vadz$. Quoniam itaque per constructionem Dq est semiordinata hyperbolæ & qf semiordinata circuli; erit ad verticem $qf = qD$, adeoque qDf angulus curvæ cum axe semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus curvæ rectus est.

Potest idem etiam aliis modis ostendi. Nimirum

$$qD = dx = \frac{(a + 2z)\,dz}{2V(az + z^2)}$$

$$qf = dy = \frac{(a - 2z)\,dz}{2V(az - z^2)}$$

Sed in casu instantis evanescentiæ z fit dz. Quare si pro z substituatur dz, erit

$$qD = \frac{adz + 2dz^2}{2V(adz + dz^2)}$$

$$qf = \frac{adz - 2dz^2}{2V(adz - dz^2)}$$

Est vero dz^2 respectu $dz = 0$. Ergo per ea, quæ modo diximus.

$$qD = \frac{adz}{2Vadz} = \tfrac{1}{2}Vadz$$

$$qf = \frac{adz}{2Vadz} = \tfrac{1}{2}Vadz$$

Ergo $qD = qf$, ut ante.

Idem inveniri debet, si in æquatione differentiali ad curvam pro x substituatur dx & pro y ponatur dy. * Æquatio enim $a^2xdx - x^3dx = y^3dy + x^2ydy + a^2ydy$ facta substitutione in sequentem degenerat:

$$a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + dx^2dy^2 + a^2dy^2$$

Quare cum sit $dx^4 = 0$

$dy^4 = 0 \quad dx^2dy^2 = 0$

erit $a^2dx^2 = a^2dy^2$

$$dx^2 = dy^2$$

$$dx = dy$$

hoc est, $qD = qf$, ut ante.

Immo potest etiam in æquatione ad curvam $2a^2x^2 - x^4 = y^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2$ pro x substitui dx & in locum ipsius y surrogari dy: quo facto habemus

$$2a^2dx^2 - dx^4 = dy^4 + 2dy^2dx^2 + 2a^2dy^2$$

Sed $dx^4 = 0 \quad dy^4 = 0 \quad 2dy^2dx^2 = 0$

Ergo $2a^2dx^2 = 2a^2dy^2$

$dx = dy$, ut ante.

Ut

Ut tandem etiam intelligatur natura isochronæ paracentricæ, cum pro ea sit

$$\frac{aat}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - z^3)}} = dv$$

seu $t = v^2 : 2a$,

si fiat $\overline{dz = 0}$

erit $\overline{dv = 0}$

adeoque $t = 0$

Curva itaque axem in D secat.

Ex ipsa autem constructione apparet, si DQ $= z$ fiat $= a$, seu DN, rectam DM in O cadere, atque adeo curvam axem ibidem secare, ultra eum ex altera parte continuandam. Est vero tum $v =$ DFIG, adeoque DO $=$ (DFIG)^2: $2a$.

Patet idem ex valoribus x & y. Etenim si sit

$$z = a$$

erit $x = \sqrt{(az + z^2)}$

$= \sqrt{2a^2} =$ DG

& $y = \sqrt{(az - z^2)}$

$= \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$

adeoque DO $= t = v^2 : 2a$

$=$ (DFIG)^2: $2a$

Habemus hinc

DO : DFIG $=$ DFIG : $2a$

Quoniam vero curva isochrona paracentrica utrinque ultra axem continuatur, se mutuo in O partes secant.

SCHOLION.

350. *Poterat quoque problema præsens ad modum præcedentis variis modis universalius resolvi, nimirum in quacunque gravitatis hypothesi, cum in solutione* Galilæanam *supposuerimus sumentes celeritatem acquisitam in ratione subduplicata altitudinis. Sed non opus est, ut istiusmodi solutionibus immoremur.*

DEFINITIO 39.

351. *Curva Tautochrona* dicitur, in qua mobile per quoscunque arcus eodem tempore descendit.

COROLLARIUM.

352. Quoniam descensus per Cycloidem & quemcunque ejus arcum sunt æquidiuturni (§. 311); cyclois curva tautochrona est (§. 351).

PROBLEMA 50.

353. *Determinare tempus descensus per curvam in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones supponantur parallelæ, sive convergentes.* Tab. XIV. Fig. 140.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AP, per quam descendit grave, AMB curva descensus, ANR curva celeritatis, PN celeritas in P acquisita, in C centrum gravium. Radiis CM & cm infinite propinquis describantur arcus PM & pm, sitque AP $= x$, PM $= y$: erit Pp $=$ MR $= dx$, Rm $= dy$, adeoque Mm $=$

$\sqrt{(dx^2}$

$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quoniam motus per M æquabilis, erit $Mm=dt.PN$ (§. 34), consequenter

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dt.PN$$

$$dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}:PN$$

Si punctum C infinite distet, arcus PM & *pm* evadent rectæ ad AC perpendiculares, manentque omnia ut ante.

Quodsi ex hypothesi gravitatis speciali substituatur valor ipsius PN, sive celeritatis; prodibit valor temporis pro illa gravitatis hypothesi. Si vero ulterius ex æquatione ad curvam substituatur valor ipsius *y* per *x*; prodibit tempus in casu speciali dato.

In hypothesi *Galilæana* $PN=\sqrt{x}$ sive, si parameter parabolæ, quæ curva celeritatum ANR, fuerit *a*, $PN=\sqrt{ax}$ (§. 87). Ergo tempus per $Mm=\sqrt{(dx^2+dy^2)}:\sqrt{ax}$, adeoque $dt^2=(dy^2+dx^2):ax$.

Sit jam curva descensus AMB etiam parabola, cujus vertex in A, axis AT; erit in hypothesi directionum parallelarum $AQ=PM=y$, $QM=AP=x$, adeoque (§. 388 *Analys.*),

$$x^2=ay$$

$$2xdx=ady$$

$$4x^2dx^2:a^2=dy^2$$

Ergo $dt^2=(4x^2dx^2:a^2+dx^2):ax$

$$=(4x^2+a^2)dx^2:a^3x$$

$$dt=dx\sqrt{(4x^2+a^2)}:\sqrt{a^3x}$$

Quoniam $dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}:\sqrt{ax}$; poterat idem valor facilius inveniri, elementum arcus parabolici $Mm=dx\sqrt{(4x^2+a^2)}:a$ (§. 146 *Anal. infin.*). dividendo per celeritatem in M acqusitam $=\sqrt{ax}$.

Est igitur $t=\int(dx\sqrt{(4x^2+a^2)}:a\sqrt{ax})=PO$.

Quodsi per quadraturam alicujus curvæ ANR curva temporum construi debet, dividendo spatium APN per quantitatem constantem *a*; erit elementum illius curvæ $PNnp=dx\sqrt{(4x^2+a^2)}:\sqrt{ax}$.

Quare cum sit $Pp=dx$; erit semiordinata ejus $PN=\sqrt{(4x^2+a^2)}:\sqrt{ax}$, seu, si $a=1$, $PN=a\sqrt{(4x^2+a^2)}:\sqrt{ax}$. Est vero $\sqrt{ax}$ semiordinata parabolæ, cujus abscissa $AP=x$, parameter $=a$ (§. 391 *Analys.*), $\sqrt{(4x^2+a^2)}$ abscissa hyperbolæ æquilateræ a centro computata, cujus axis transversus $=2a$, semiordi-

ordinata $= 2y$ (§.147 *Anal. infin.*). Curva igitur, a cujus quadratura pendet constructio curvæ temporum, ita construitur. Circa communem axem AX construatur parabola AMT & hyperbola æquilatera AOV (§.472 *Anal.*), cujus centrum in C, axis dimidius AC $= a$, qui simul parabolæ AMT parameter. Ducta semiordinata parabolæ PM, fiat CQ $= 2$ AP $= 2x$, erit ex Q erecta ad CQ perpendiculari QO $= \sqrt{(4x^2 + a^2)}$. Ducatur TF parallela ipsi CX per punctum M & AH parallela ipsi QG, erit TL $=$ CA $= a$ & TC $=$ PM $= \sqrt{ax}$. Fiat TG $=$ QO $= \sqrt{(4x^2 + a^2)}$ & ducatur FG parallela ipsi LC, erit (§.268 *Geom.*).

Tab. XIV. Fig. 141.

$$TC : TL = TG : TF$$

$$\sqrt{ax} : a = \sqrt{(4x^2 + a^2)} :$$

$$TF = \frac{a\sqrt{(4x^2 + a^2)}}{\sqrt{ax}}$$

Quodsi ergo PM continuetur in N, donec PN $=$ TF, erit punctum N in curva temporum.

Si curvæ temporum constructionem ad rectificationem alicujus curvæ reducere volueris; fiat

$$\frac{dx\sqrt{(a^2 + 4x^2)}}{a\sqrt{ax}} = \sqrt{(dz^2 + dy^2)}$$

erit $\frac{a^2dx^2 + 4x^2dx^2}{a^3x} = dz^2 + dy^2$

Fiat jam $dz^2 = \frac{dx^2}{ax}$

$$dy^2 = \frac{4x^2dx^2}{a^3x}$$

$$= \frac{4xdx^2}{a^3}$$

erit $a^{-1:2}x^{-1:2}dx = dz$

$$2a^{-1:2}x^{1:2} = z$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = z$$

$$dy = 2x^{1:2}a^{-3:2}dx$$

$$y = \tfrac{4}{3}x^{3:2}a^{-3:2}$$

$$= \frac{4x\sqrt{x}}{3a\sqrt{a}}$$

sit $a = 1$; erit

$z = 2\sqrt{ax}$ $\quad y = \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$

$z^2 = 4ax$ $\quad \frac{9}{16}ay^2 = x^3$

Æquatio prima est ad parabolam Apollonianam (§.388 *Anal.*) cujus parameter $4a$, abscissa x, semiordinata z: altera vero ad parabolam secundi generis, cujus parameter $= \frac{9}{16}a$, abscissa ad parabolam externam relata $= x$, semiordinata $= y$, seu abscissa $= y$, semiordinata $= x$ (§.519 *Analys.*). Construenda igitur est parabola pa-

Tab. XIV. Fig. 142.

parametro $4a$ AMR (§. 393 *Anal.*) & alia secundi generis, cujus parameter $\frac{9}{12}a$, ANT (§. 581 *Anal.*): erit PM $= z$ abscissa, PN $=$ AQ $= y$ semiordinata curvæ, a cujus quadratura pendet constructio curvæ temporis. Ut curvæ hujus natura intelligatur, substituatur in æquatione $x^3 = \frac{9}{12}ay^2$ valor ipsius $x = z^2 : 4a$ ex æquatione prima inventus, erit ob $x^3 = z^6 : 64a^3$ æquatio ad illam curvam

$$\frac{z^6}{64a^3} = \frac{9}{12}ay^2$$

adeoque $z^6 = 36a^4y^2$

quæ est curva quinti generis (§. 382 *Analys.*) ex familia parabolarum, seu paraboliformium (§. 519 *Analys.*).

Tab. XIV. Fig. 143. Sit DMA quadrans circuli, cujus radius CA $= a$, CP $= x$ erit M$m = adx : V(a^2 - x^2)$ (§. 153 *Anal. infin.*), adeoque $dt = adx : V(a^2 - x^2)\, Vax$, quod elementum cum coincidat cum eo, quod paulo ante (§. 349) pro invenienda curva isochrona paracentrica reperimus; quæ ad ejus summationem spectant, ibidem relegenda sunt.

Tab. III. Fig. 39. Sit CMD cyclois, AOB semicirculus genitor, DN $= x$, AD $= a$, erit AN $= a - x$. Quare cum M$m = dxVa : Vx$ (§. 168 *Analys. infin.*); erit

$$dt = \frac{dxVa}{V(a-x)\,Vx} = \frac{dxVa}{V(ax-x^2)} = \frac{adxVa}{aV(ax-x^2)}$$

$$t = \frac{Va}{a} \cdot \int \frac{adx}{V(ax-x^2)}$$

Enimvero $\int (adx : V(ax-x^2))$ = arcui DO (§. 157 *Analys. infin.*), $Va = V$AD & $a =$ AD. Ergo tempus descensus per arcum MC = VAD. DO : AD.

Quodsi ergo x sive DN degeneret in a sive AD, erit tempus descensus per semicycloidem CMD = VAD. DOA : DA.

PROBLEMA 51.

354. *Determinare tempus descensus in convexitate curvæ, in quacunque gravitatis hypothesi, sive directiones sint parallelæ sive convexæ.* Tab. XIV. Fig. 140.

RESOLUTIO.

Sit ANR curva, per quam grave descendit, AP $= x$, PN $= y$, erit N$n = V(dx^2 + dy^2)$. Sit celeritas in P acquisita $= v$, erit ut in probl. præced. (§. 353), si elementum temporis fuerit dt, $dt = V(dx^2 + dy^2) : v$.

In hypothesi *Galilæana* $v=\sqrt{x}$. Ergo $dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}:\sqrt{x}$. Quare si ex æquatione ad curvam descensus substituatur ut ibidem valor ipsius dy^2; prodibit æquatio ad curvam temporis.

Sit ANR parabola; erit (§. 21 *Anal. infin.*)

$$adx = 2ydy$$

$$\frac{adx}{2y} = dy$$

$$dy^2 = a^2dx^2 : 4y^2$$
$$= a^2dx^2 : 4ax$$

Quare

$$dt = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{a^2dx^2}{4ax}\right)} : \sqrt{x}$$

$$= \frac{dx\sqrt{(4ax+a^2)}}{\sqrt{4ax}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{dx\sqrt{(4ax+a^2)}}{2\sqrt{ax^2}} = \frac{dx\sqrt{(ax+\frac{1}{4}a^2)}}{\sqrt{a}}$$

$$t = \int dx\sqrt{(ax+\tfrac{1}{4}a^2)} : x\sqrt{a}$$

Quare si hic valor sumitur pro spatio curvilineo per $\sqrt{a}$ diviso; erit semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, $\sqrt{(ax+\frac{1}{4}a^2)} : x$. Est vero $\sqrt{(ax+\frac{1}{4}a^2)}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter $= a$, si abscissæ a foco; cujus distantia a vertice $= \frac{1}{4}a$ (§. 396 *Analys.*) computentur. Quare curvæ quadrandæ vertex est in foco parabolæ & assumta parametro a pro unitate, semiordinata curvæ, a cujus quadratura constructio curvæ temporis pendet, est quarta proportionalis ad parabolæ abscissam a centro computatam, semiordinatam & parametrum. Sit semiordinata hujus curvæ $= v$, erit

$$v = a\sqrt{(4ax+a^2)} : 2x$$

$$vx = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(4ax+a^2)}$$

$$v^2x^2 = a^3x + \tfrac{1}{4}a^4$$

Est igitur curva tertii generis (§. 382 *Analys.*), sed facillimæ, quemadmodum apparet, constructionis.

Quodsi constructionem curvæ temporis reducere volueris ad rectificationem alicujus curvæ, cujus elementum $= \sqrt{(dz^2+dy^2)}$, abscissa scilicet existente z, semiordinata y; erit

$$\frac{4axdx^2 + a^2dx^2}{4ax^2} = dz^2 + dy^2$$

Fiat

$$dz^2 = \frac{4axdx^2}{4ax^2} \qquad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax^2}$$

$$= dx^2 : x \qquad = adx^2 : 4x^2$$

$$dz = x^{-1:2}dx \qquad dy = \frac{dx\sqrt{a}}{2x}$$

$$z = 2x^{1:2} \qquad y = \int\frac{dx\sqrt{a}}{2x}$$
$$= 2\sqrt{x}$$

Est

Est vero $\sqrt{x}$ semiordinata parabolæ, cujus parameter = 1, (§. 392 *Anal.*) & $\int\frac{dx}{x}$ spatium hyperbolicum asymptoticum, cujus latus potentiæ=1 (§.120 *Anal. infin.*). Quare curva, a cujus rectificatione pendet curvæ temporis constructio, construetur, si abscissæ fiant semiordinatis parabolæ duplis, semiordinatæ autem spatiis hyperbolicis dimidiis per $\sqrt{a}$ divisis æquales, axe parabolæ existente simul asymptoto hyperbolæ. Arcus hujus curvæ erunt ut tempus descensus per convexitatem parabolæ.

Si curva ANR fuerit cyclois & diameter circuli genitoris = 1, erit $Nn = dx : \sqrt{x}$ (§. 168 *Anal. infin.*), adeoque $dt = dx : x$. Pendet adeo temporis determinatio a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§. 120 *Anal. infin.*): Et quoniam $t = \int dx : x$, sed $\int dx : x$ logarithmus ipsius x sumtus in logarithmica, cujus subtangens = 1 (§. 243 *Anal. infin.*), tempus descensus per convexitatem cycloidis etiam per logarithmos determinari potest.

DEFINITIO 40.

355. *Curva brachystochrona* est, per quam grave tempore minore a puncto dato ad aliud datum, quam per quamvis aliam descendit. Dicitur etiam *Oligochrona*, item *curva celerrimi descensus*.

SCHOLION.

356. *Problema hoc proposuit* Joannes Bernoulli. *Analysi suppressa cycloidem esse monuerunt* Leibnitius (o) & Hospitalius (p). *Solutionem integram exhibuit* Jacobus Bernoulli (q), *methodo synthetica ex natura descensus celerrimi quandam ejus proprietatem deducens, quam cycloidi convenire postea ostendit.* Joannes *vero* (r) *ex fundamentis diopticis id solvit, propterea quod advertit eam eandem esse cum curvatura radii per medium uniformiter densum propagati. Equidem solutio facilis videri poterat prima fronte. Cum enim tempus descensus per arculum Mm infinite parvum sit minimum, hoc vero sit* $\sqrt{(dx^2+dy^2)} : \sqrt{x}$ *in hypothesi* Galilæana (§. 354); *non alia re opus esse videbatur, quam ut ejus differentiale ponatur nihilo æquale* (§. 63 Analys. infin.). *Enimvero tentanti apparebit, sic nos delabi ad æquationem differentialem tertii gradus. Alia igitur via incedere libet, quæ nos tandem deducit ad analogiam* Joannis Bernoulli *sine supposita identitate* Brachystochronæ *cum curvatura radii per medium non uniformiter densum.*

(o) In Actis Erudit. A. 1697 p. 203.
(p) Ibid. p. 217.
(q) Ibid. p. 212.
(r) Ibid. p. 207 & seqq.

Tab. XIV. Fig. 144.

PROBLEMA 52.

357. *Invenire curvam brachystochronam sive celerrimi descensus.*

RESOLUTIO.

Sint semiordinatæ PM, *pm* & Q*n* infinite propinquæ, & P*p*=*p*Q; erunt arcus M*m* & *mn* infinite parvi, & demissis perpendicularibus MR & *m*O, erectaque perpendiculari *n*S ipsi *pm* continuatæ in S occurrente, erit MR=*m*O=*n*S & RS respectu arcus M*n* constans.

Sit jam AP=x, PM=y; erit P*p*=PQ=MR=*n*S=dx, *m*R=dy & M*m*=$V(dx^2+dy^2)$. Sit RS=b; erit *m*S=O*n*=$b-dy$, adeoque *mn*=$V(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)$.

Quoniam motus per M*m* est æquabilis, erit toto tempusculo descensus celeritas constans, nempe ea, quæ descensu per altitudinem AP acquisita. Ex eadem ratione celeritas in descensu per arculum *mn* constans est, nempe ea, quæ descensu per altitudinem AQ acquisita. Sit prior=c, posterior=C, erit tempus descensus per M*m*=$V(dx^2+dy^2):c$ & tempus per *mn*=$V(dx^2+b^2-2bdy+dy^2):C$ (§. 34), consequenter tempus descensus per M*m*+*mn*=dt=

$$\frac{V(dx^2+dy^2)}{c}+\frac{V(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}{C}.$$

Quoniam tempusculum minimum est, & dx constans, dy vero variabilis, erit (§. 63 *Anal. infinit.*).

$$ddt=\frac{dyddy}{cV(dx^2+dy^2)}+\frac{dyddy-2bddy}{CV(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}=0$$

hoc est

$$\frac{dy}{cV(dx^2+dy^2)}=\frac{b-dy}{CV(dx^2+b^2-2bdy+dy^2)}$$

sive

$$\frac{mR}{c.\,Mm}=\frac{mS}{C.\,mn}$$

$$C.\,mn.\,mR=c.\,Mm.\,mS$$

adeoque

$$Mm:mn=C.\,mR:c.\,mS$$

Jam in hypothesi *Galilæana* C=VAp & c=VAP (§. 87).

Quare M*m*: *mn*=*m*R. VAp: *m*S. VAP

Quæ est proprietas curvæ brachystochronæ a *Jacobo Bernoulli* alia via erutæ.

Quodsi fiat M*m*=*mn*, erit C. *m*R=c. *m*S, adeoque

$$c:C=mR:mS$$

$$\&\ c:mR=C:mS$$

hoc est, elementa semiordinatarum

rum mR & mS five nO ſunt ut celeritates acquiſitæ, ſeu ad has celeritates in ratione conſtante: id quod eſt fundamentum ſolutionis *Joannis Bernoulli* ex dioptricis principiis ab ipſo derivatum.

Quodſi jam arcus $Mm = V(dx^2 + dy^2)$ ſumatur conſtans, dx fiet variabilis. Sit celeritas in M acquiſita $= v$ & ratio conſtans ipſius dy ad eandem $= Mm : a$, erit

$$dy : v = V(dx^2 + dy^2) : a$$

$$ady = vV(dx^2 + dy^2)$$

$$a^2dy^2 = v^2dx^2 + v^2dy^2$$

$$a^2dy^2 - v^2dy^2 = v^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{v^2dx^2}{a^2 - v^2}$$

$$dy = \frac{vdx}{V(a^2 - v^2)}$$

Formula hæc generalis eſt & in omni hypotheſi gravitatis, etiam utcunq; variabilis, obtinet. Quodſi jam ſubſtituatur valor ipſius v ex data gravitatis hypotheſi, prodibit formula ſpecialis.

Sit itaque in hypotheſi gravitatis conſtantis

$v^2 = ax$, adeoque $v = Vax$

erit $$dy = \frac{dxVax}{V(a^2 - ax)}$$

$$= \frac{dxVx}{V(a-x)}$$

$$= \frac{xdx}{V(ax - x^2)}$$

Eſt vero $xdx : V(ax - x^2)$ differentia inter $adx : 2V(ax - x^2)$ & $(adx - 2xdx) : 2V(ax - x^2)$. Ergo

$$dy = \frac{adx}{2V(ax-x^2)} - \frac{(adx - 2xdx)}{2V(ax-x^2)}$$

$$y = \int \frac{adx}{2V(ax-x^2)} - \int \frac{(adx - 2xdx)}{2V(ax-x^2)}$$

$$= \int \frac{adx}{2V(ax-x^2)} - V(ax - x^2)$$

Eſt vero $V(ax - x^2)$ ſemiordinata circuli DH diametro $CB = a$ deſcripti (§. 377 *Analyſ.*) & $\int(adx : 2V(ax - x^2))$ arcus CH (§. 157 *Anal. infin.*). Quamobrem y = arcui CH − DH = PM. Eſt vero in cycloide MH = arcui BH (§. 575 *Analyſ.*) & AC = PM + MH + HD = arc. CH + arc. HB (§. 574 *Analyſ.*). Ergo in eadem arc. CH = PM + HD, conſequenter PM eſt æqualis differentiæ inter arcum CH & ejus ſinum HD. Tab. XV. Fig. 145.

Curva igitur celerrimi deſcenſus ſive brachyſtochrona eſt cyclois, adeoque eadem cum tautochrona (§. 352).

COROLLARIUM.

358. Quoniam in cycloide PM = arc. CH−

CH–HD (§. 357); si utrumque multiplicationis membrum multiplices per dimidium circuli genitoris radium = $\frac{1}{2}$ OC, prodibit

$\frac{1}{2}$ OC. PM = $\frac{1}{2}$ OC. arc. CH – $\frac{1}{2}$ OC. HD
$\frac{1}{2}$ OC. arc. CH = Sect. COH (§. 435 *Geom.*)
$\frac{1}{2}$ OC. HD = △ COH (§. 392 *Geom.*)

$\frac{1}{2}$ OC. PM = Sect. COH – △ COH = segmento HIC (§ 436 *Geom.*)

Est adeo cyclois externa segmentorum circularium repræsentatrix.

SCHOLION 1.

359. *Elegantem hanc cycloidis proprietatem, etsi ad mechanicam non spectet, hic tamen annotari consultum fuit, ubi ex demonstratis tanta facilitate fluit. Poterat vero etiam ex formula analytica deduci. Etenim elementum arcus* AC = adx : $2\sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 157 Anal. infin.), *qui in* $\frac{1}{2}$ CO = $\frac{1}{4}$ a *ductus producit elementum sectoris* = $a^2dx : 8\sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 435 Geom.). *Quodsi porro* DH *altitudinem* △ COH = $\sqrt{(ax-x^2)}$ *in basin ejus dimidiam* $\frac{1}{2}$ CO = $\frac{1}{4}$ a *ducas, prodibit area* △ COH = $\frac{1}{4}a\sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 392 Geom.), *cujus adeo elementum* = $(a^2dx-2axdx) : 8\sqrt{(ax-x^2)}$. *Quare si hoc elementum trianguli ab elemento sectoris auferas, relinquetur elementum segmenti* HIC = $axdx : 4\sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 436 Geom.). *Est vero elementum ipsius* PM = $xdx : \sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 357). *Quodsi ergo idem in* $\frac{1}{4}$ a *seu* $\frac{1}{2}$ CO *ducas, prodibit* $axdx : 4\sqrt{(ax-x^2)}$ *elementum sectoris modo repertum, consequenter sector* = $\frac{1}{4}a\int(xdx : \sqrt{(ax-x^2)}) = \frac{1}{2}$ CO. PM.

SCHOLION 2.

360. *Quodsi detur altitudo, per quam grave ad locum datum in linea curva celerrime descendere debet, cyclois describenda est per duo puncta data. Quamobrem ut problema ad praxin transferri possit, ostendendum adhuc erit, quomodo cyclois per data duo puncta describatur.*

PROBLEMA 53.

361. *Describere cycloidem per data duo puncta* A & C *transeuntem.* Tab. XV. Fig. 146.

RESOLUTIO.

1. Jungantur puncta data A & C recta AC &
2. Describatur cyclois quæcunque ABD, circulo genitore END, quæ rectam AC in B secet.
3. Fiat deinde AB : AC = ED : FG, erit FG diameter circuli genitoris cycloidis per puncta A & C transeuntis: quo dato
4. Cyclois ACG describi potest (§. 573 *Anal.*).

DEMONSTRATIO.

Id unice demonstrandum, esse AB : AC = ED : FG, quod ut fiat, ducantur rectæ SP & TQ ad AH perpendiculares, quæ erunt inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Et quoniam HA, DE & GF perpendiculares ad AF *per constr.* erunt quoque eædem inter se parallelæ

(§. *cit.*

(§. *cit. Geom.*). Et SP ad ED, TQ ad FG perpendiculares (§. 230 *Geom.*), consequenter (§. 268 *Geom.*) AB : AC = SB : TC = AS : AT = EP : FQ, ob EP = AS & AT = FQ (§. 168 *Arithm.*). Sed SB = arc. BN − PN & TC = arc. FR − QR (§. 357). Ergo FP : FQ = arc. EN − PN : arc. FR − QR (§. 167 *Arithm.*), consequenter DE. EP : DE. FQ = segm. EN : segm. FR (§. 185 *Arithm.*), quia scilicet $\frac{1}{2}$ DE (arc. EN − PN) = segm. EN & $\frac{1}{2}$ DE (arc. FR − QR) = segm FR (§. 436 *Geom.*). Est vero DE : EN = EN : EP & FG : FR = FR : FQ (§. 330 *Geom.*), adeoque DE. EP = EN^2 & FG. FQ = FR^2 (§. 377 *Geom.*), consequenter $EN^2 : FR^2$ = segm. EN : segm. FR (§. 167 *Arithm.*). Sunt itaque segmenta EN & FR similia (§. 406 *Geom.*) & hinc etiam arcus cognomines similes sunt, consequenter EP : FQ = ED : FG (§. 12 *Trigon.*). Quare cum sit AB : AC = EP : FQ *per demonstrata*; erit etiam AB : AC = ED : FG (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Potest idem multo brevius ex principiis nostris similitudinis ostendi, alibi propositis (s); scilicet cum omnes cycloides sint inter se similes, erunt omnes lineæ eodem modo ad eas determinatæ proportionales. Sed AB & AC sunt chordæ arcuum cycloidicorum eandem basin AF sub eodem angulo secantes, adeoque eodem modo determinatæ, & diametri circulorum genitorum sunt rectæ ex medio basium normaliter erectæ, consequenter itidem eodem modo determinatæ. Patet ergo esse diametros circulorum genitorum ED & FG ipsis AB & AC proportionales. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

362. *Patet hinc præstantia principiorum nostrorum similitudinis, ob quam merentur, quæ in Geometriam recipiantur, & ob quam etiam in eandem ipsis aditum aperuimus. Sane si quis analysin similitudinis invenire vellet, ex istis principiis deducenda forent, quæ ad eam pertinent. Per eam vero analysin, quæ ad similitudinem spectant, multo facilius reperirentur, quam per analysin magnitudinum, qua nunc sola utimur in Geometria.*

SCHOLION 2.

363. *Supposuimus in demonstratione, segmenta circulorum similia esse in ratione duplicata chordarum, nempe* $EN^2 : FR^2$ = segm. EN : segm. FR *vi principiorum Geometriæ, ex quibus id facile colligitur. Quodsi quis non videat, quo-*

(s) In Actis Erudit. A. 1715 p. 213 & seqq.

quomodo idem inde inferatur, demonstrationem hic subjicere licet per modum lemmatis & quidem multo universalius.

LEMMA 1.

Tab. XIV. Fig. 146. 364. *Sectores similes & segmenta similia circuli habent rationem duplicatam radiorum, subtensarum & ipsorum arcuum: immo segmenta similia curvarum similium habent rationem duplicatam subtensarum & ipsorum arcuum, aliarumque linearum quarumcunque eodem modo determinatarum.*

DEMONSTRATIO.

Sector FOR æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus FR, altitudo radius FO, & sector ENQ æqualis est triangulo rectangulo, cujus basis est arcus EN, altitudo radius EQ (§. 415 *Geom.*). Est vero sector FOR similis sectori ENQ *per hypoth.* quare cum sectores per rationem arcuum ad radios discerni possint, erunt arcus FR & EN radiis suis FO & EQ proportionales (§. 24 *Arithm.*), consequenter triangula, quibus sectores æquales sunt, inter se similia sunt (§. 183 *Geom.*). Sunt igitur sectores in ratione duplicata radiorum & arcuum (§. 398 *Geom.*). *Quod erat unum.*

Quoniam arcus FR & EN similes sunt, cum alias segmenta per eorum ad peripheriam rationem discerni possent, contra hypothesin (§. 24 *Arithm.*), in triangulis FOR & EQN anguli cognomines sunt æquales (§. 141 *Geom.*), consequenter cum utrobique crura sibi invicem sint æqualia (§. 40 *Geom.*), ipsa triangula similia sunt (§. 183 *Geom.*), adeoque in ratione duplicata radiorum (§. 398 *Geom.*). Est igitur sector FRO : sect. EQN = △ FRO : △ ENQ (§. 167 *Arithm.*), consequenter sect. FRO − △ FRO : sect. EQN − △ ENQ = sect. FRO : sect. EQN (§. 189 *Arithm.*). Ergo cum sect. FRO − △ FRO = segmento FR & sect. EQN − △ ENQ = segment. EN, quod per se patet, segment. FR : segm. EN = sector FRO : sect. EQN (§. 168 *Arithm.*). Sunt vero sectores FRO & EQN in ratione duplicata radiorum FO & EQ, atque arcuum FR & EN *per demonstr.* Ergo & segmenta FR & EN in ratione duplicata radiorum & arcuum sunt (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Arcus FR & EN sunt similes *per hypoth.* Ergo eorum sinus (§. 12 *Trigon.*), consequenter & sinuum duplæ (§. 2 *Trig.*) chordæ sunt arcubus proportionales (§. 178 *Arithm.*). Sunt vero sectores atque segmenta in ratione dupli-

caca

cata arcuum, *per demonstrata*. Ergo & in ratione duplicata chordarum (§. 167. 260 *Arithm.*).

Idem vero multo universalius de quibuscunque curvarum similium segmentis similibus demonstratur.

Tab. XV. Fig. 147. Si curvæ fuerint similes, rectæ constantes, quæ æquationem ingrediuntur, eandem inter se rationem habent, cum alias per eam distingui possent, (§. 24 *Arithm.*). Quare si porro segmenta similia esse debent, necesse est ut abscissæ AP & A*p* ad rectas illas constantes *a* & *b* utrobique in eadem sint ratione (§. *cit.*), consequenter AP : A*p* = *a* : *b*. Quare si AP = *x*; erit A*p* = *bdx* : *a*. Et quoniam semiordinatæ PM & *pm*, chordæ AM & *am*, arcusque cognomines eodem modo determinantur; erit AM : *am* = arc. AM : arc. *am* = PM : *pm* = AP : *ap* = *a* : *b* (§. 120 *Geom.*).

Quare si PM = *y*; erit *pm* = *by* : *a*. Est vero elementum curvæ AMP = *ydx*, alterius *amp* = $b^2ydx : a^2$ (§. 98 *Anal. infin.*), adeoque curvilineum AMP : *amp* = $\int ydx : \frac{b^2}{a^2}\int ydx$ = $a^2 : b^2$ = $AM^2 : am^2$ = $PM^2 : pm^2$ = $AP^2 : ap^2$. Porro quia AP : PM = *ap* : *pm per demonstr.* & anguli ad P & *p* recti *per construct.* △ APM ∽ △ *apm* (§. 18; *Geom.*), consequenter △ APM : △ *apm* = $AM^2 : am^2$ (§. 398 *Geom.*). Cum itaque sit APM : *apm* = △ APM : △ *apm* (§. 167 *Arithm.*), erit segment. AM : segm. *am* = APM : *apm* (§. 189 *Arithm.*) = $AM^2 : am^2$ = $PM^2 : pm^2$ = $AP^2 : ap^2$ = arc. AM^2 : arc. am^2 (§. 167 *Arithm.*), consequenter in ratione duplicata linearum quarumcunque aliarum eodem modo determinatarum, veluti si ex P & *p* demittantur in AM & *am* perpendicula PL & *pl*, rectarum PL & *pl*, *per demonstrata. Quod erat tertium.*

SCHOLION.

365. *Qui ad demonstrationem partis ultimæ lemmatis præsentis attendit, is fœcunditatem & utilitatem principiorum nostrorum similitudinis abunde perspiciet: quæ in philosophia prima tanquam sede genuina ex notionibus puris independenter ab omni imagine derivavimus* (t).

DEFINITIO 41.

366. *Curva synchrona est*, ad cujus singula puncta D, *m*, M eodem tempore minimo grave pervenit. Tab. XV. Fig. 148.

SCHOLION.

367. *Curvam hanc primus invenit* Joannes Bernoulli (u). *Ex hactenus autem*

O 2

(t) Ontolog. §. 215 & seqq.
(u) Vid. Acta Erudit. A. 1697.

autem traditis mira facilitate eam deducere licet.

PROBLEMA 54.

Tab. XV. Fig. 148. 368. *Construere curvam synchronam* DmM, *data altitudine perpendiculari* CD, *per quam grave dato tempore descendit, quo ad singula puncta synchronæ pervenit.*

RESOLUTIO.

1. Describantur cycloides quotcunque CM, Cm &c. commune initium in C habentes (§. 573 *Analys.*).
2. Erigatur in communi initio C ad basin CA perpendicularis CD, quæ sit altitudini datæ æqualis, per quam grave dato tempore descendit, seu, quod perinde est, per quam datur tempus, quo grave ad singula puncta D, *m*, M synchronæ minimo tempore pervenit (§. 357).
3. Fiat arcus AN æqualis mediæ proportionali inter diametrum circuli genitoris AB & altitudinem CD.
4. Ex puncto N ducatur basi AC parallela NM secans cycloidem in M: erit punctum M in synchrona.

Eodem modo in cycloidibus ceteris C*m* determinantur puncta in synchrona ope circulorum genitorum ipsis respondentium.

DEMONSTRATIO.

AB : *arc.* AN = *arc.* AN : CD *per constr.*

$$AN = \sqrt{AB}.\sqrt{CD}$$

$$AN.\sqrt{AB} = AB.\sqrt{CD}$$

$$\frac{AN.\sqrt{AB}}{AB} = \sqrt{CD}.$$

Est vero AN. $\sqrt{AB}$: AB tempus descensus per arcum cycloidis CM (353) & $\sqrt{CD}$ tempus descensus per altitudinem CD (§. 87). Quare grave eodem tempore pervenit ad punctum M, quo ad punctum D descendit. Quoniam itaque eodem modo ostenditur, quod ad quodvis punctum *m* eodem tempore perveniat, quo per AD descendit; curva D*m*M est synchrona (§. 366).

DEFINITIO 42.

369. *Curva æquilibrationis dicitur*, in qua existens pondus vel sacoma semper æquilibrium faciat cum ponte sublicio circa axem convertibili.

SCHOLION.

370. *Problema hoc solverunt* (x) Marchio Hospitalius & Jacobus Bernoulli *diversa ratione*. Joannes Bernoulli

(x) In Actis Erudit. A. 1695 p. 56 & 65.

noulli (y) *identitatem curvæ æquilibrationis cum cycloide descripta ex circumvolutione rotæ super rota æquali demonstravit & problema generalius per communem Geometriam solvit.*

PROBLEMA 55.

Tab. XV. Fig. 149.

371. *Invenire curvam æquilibrationis.*

RESOLUTIO.

Sit pons sublicius AB, centrum gravitatis in B habens & circa axem A versatilis. Sit funis BCM trochleæ C circumductus, cujus una extremitas B pontem, altera A sacoma sustinet. Cum potentiæ laterales agentes juxta directiones BC & BA æquipolleant ponderi pontis agentis juxta directionem CA (§.241. 280); si CA exponit pondus pontis absolutum, BC exponet potentiam juxta BC agentem, cum qua æquilibratur pondus M. Similiter cum pondus M ad descensum sollicitetur juxta directionem CM & in curvam agat juxta directionem MK ad curvam normalem; si CM consideretur ut pars ponderis M, quæ æquivalet potentiæ ut BC, integrum pondus M erit ut CK (§§. *cit.*). Quare si sit quædam recta b ut pondus absolutum M, erit CK : CM $= b$: BC.

Sit jam CP $= x$, PM $= y$, BC $+$ CM $= a$; erit CM$= V(x^2+y^2)$ & hinc BC $= a - V(x^2+y^2)$. Est vero subnormalis PK $= ydy : dx$ (§.35 *Anal. infin.*) & hinc CK$=$CP $+$PK$= x + ydy : dx = (xdx + ydy) : dx$. Quare cum sit

CK : CM $= b$: BC *per demonstr.*

erit

$$\frac{xdx+ydy}{dx} : V(x^2+y^2) = b : a - V(x^2+y^2)$$

$$xdx + ydy : dx V(x^2+y^2) =$$

$$bdx\, V(x^2+y^2) = axdx + aydy - xdx\, V(x^2+y^2) - ydy V(x^2+y^2)$$

$$bdx = \frac{axdx + aydy}{V(x^2+y^2)} - xdx - ydy$$

$$bx = aV(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$bx + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = aV(x^2+y^2)$$

quæ est æquatio ad curvam æquilibrationis, cui, si libuerit, etiam quantitas quædam constans addi, vel ab eadem demi potest (§. 95 *Anal. infin.*).

Ut curva hæc construatur, radio CD $= a$ describatur semicirculus FDE & ducatur DG ad FE normalis. Fiat CG $= z$, erit GD $= V(a^2 - z^2)$ (§. 417 *Geom.*) & (§. 268 *Geom.*).

CG : CD $=$ CP : CM

$z : a = x :$

O 3 Est

(y) In Actis Erudit. A. 1695 p. 60.

Est itaque $\frac{z\,.\,CM}{a} = x$

Porro CD : DG = CM : PM

$a : V(a^2 - z^2) = CM : y$

$\frac{CM.\,V(a^2 - z^2)}{a} = y$

Ergo $\frac{1}{2}x^2 = z^2.CM^2 : 2a^2$

$\frac{1}{2}y^2 = (a^2 - z^2).CM : 2a^2$

Quodsi hi valores in æquatione ad curvam substituantur, prodibit

$$a.CM = \frac{bz.CM}{a} + \frac{z^2.CM^2}{a^2} + \frac{a^2.CM^2 - z^2CM^2}{2a^2}$$

$$= \frac{bz.CM}{a} + \frac{1}{2}CM^2$$

$$2a = \frac{2bz}{a} + CM$$

$$CM = 2a - \frac{2bz}{a}$$

Punctum itaque quodlibet M facille determinatur, cum non alia re opus sit, quam ut ad radium circuli CD seu longitudinem funis BC + CM, duplum rectæ illius, quæ pondus absolutum sacomatis exponit, & rectam CG pro lubitu assumendam quæratur tertia proportionalis, ac ex diametro circuli FE auferatur.

Si sit $a = b$, erit $CM = 2a - 2z = 2GE$: qui est casus omnium simplicissimus.

Quando CM degenerat in CN, hoc est, quando fit a, curva semicirculum in N secat, tumque est

$$a = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$0 = a - 2bz : a$$

$$\frac{a^2}{2b} = z^2$$

Patet adeo, CG esse tertiam proportionalem ad $2b$ & a, si curva peripheriam circuli secat.

Quoniam subtangens $= ydx : dy$ (§. 20 *Anal. infin.*) & vi superiorum

$$dx = \frac{aydy - ydyV(x^2 + y^2)}{(b + x)V(x^2 + y^2) - ax}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - y^2\,V(x^2 + y^2)}{(b + x)V(x^2 + y^2) - ax}$$

Quare si $CM = V(x^2 + y^2) = a$

erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{ay^2 - ay^2}{(b + x)a - ax} = 0$

Ergo ubi curva peripheriam circuli secat, subtangens evanescit, adeoque semiordinata eam tangit, consequenter N est punctum infinum, sicque in nostro casu mechanico arcus CN sufficit.

Quodsi

Tab. XV. Fig. 150. Quodsi in situ pontis horizontalis AI longitudo funis $IC = CE = CN = a$ & præterea $b = a$, vel $b > a$; tota curvæ portio CMN sufficit; si vero $CI < CN$, & in situ horizontali pondus jam fuerit in M, satisfacit portio MN, quoniam tum CM est differentia inter CN & CI.

Si sit $CI = c$, reliqua sint ut ante, erit

$$CM = \frac{2a - 2bz}{a} = a - c$$

$$a + c = \frac{2bz}{a}$$

$$\frac{a^2 + ac}{2b} = z$$

Punctum adeo M determinatur, si fiat $CG = (a^2 + ac) : 2b$, quæ est quarta proportionalis ad $2b$, a & $a+c$, hoc est, ad duplam lineam, quæ pondus M exprimit, radium circuli CE seu funis integri longitudinem ob $IC + CM = CE$ & compositam ex radio & portione funis IC.

Sit $CM = 0$

erit $2a - 2bz : a = 0$

Tab. XV. Fig. 151. $a^2 - az = 0$

$a^2 : b = z$

Habemus itaque $b : a = a : z$. Quare si $b = a$; erit $a = z$, adeoque punctum D cadit in E, consequenter diameter FE curvam in centro C tangit.

Si $b > a$, etiam $a > z$ (§. 149 *Arithm.*), recta igitur CD definiens punctum curvæ C adhuc in peripheriam EN cadit, consequenter curva ultra centrum continuari potest, adeoque in centro C axem FE secat. n. 2.

Quando itaque CD coincidit in E, erit $z = a$, adeoque cum sit

$$x = \frac{z \cdot CM}{a}$$

$$= z\sqrt{(x^2 + y^2)} : a$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 = x^2 + y^2$$

$$y = 0$$

Curva ergo ultra centrum continuata axem secat in K. Quare cum ex constructione appareat, ab altera parte describi posse partem similem, curva in centro C nodum habet.

Si in æquatione ad curvam

$$a^2x^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + bx^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + bxy^2 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{4}y^4$$

fiat $y = 0$

erit $a^2x^2 = b^2x^2 + \frac{1}{4}x^4 + bx^3$

$$a^2 = b^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + bx$$

$$a = b + \tfrac{1}{2}x$$

$$2a = 2b + x$$

Quan-

Quando itaque $b > a$; erit

$$-x = 2b - 2a$$

Unde intelligitur, punctum K a centro distare intervallo $2b - 2a$.

Tab. XV. Fig. 151. n. 3. Si vero fuerit $a > b$; erit

$$x = 2a - 2b$$

Ex quo apparet, curvam secare axem infra centrum C in L, ita & CL sit $2a - 2b$.

Quodsi in æquatione ad curvam valor ipsius x sumatur negativus & ponatur $y = 0$, prodibit distantia puncti O a centro C, ubi axem secat. Nimirum cum ob $y = 0$; sit

$$a^2 = b^2 + bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

erit ob valorem ipsius x negativum

$$a^2 = b^2 - bx + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$a = \tfrac{1}{2}x - b$$

$$2a + 2b = x$$

$$= CO$$

Curva igitur in omni casu in se redit.

Quodsi maxima curvæ latitudo determinanda, cum sit

$$\frac{aydy - ydy = bdx + xdx - axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \qquad \frac{}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

erit ob $dy = 0$ (§. 63 *Anal. infin.*)

$$bdx + xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$$

$$(b+x)\sqrt{(x^2+y^2)} = ax$$

$$\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ax}{b+x} = CM$$

Ut igitur CM in casu maximi inveniri possit, valor ejus, quem supra reperimus $= 2a - 2bz : a$, exprimatur etiam hic per z, ita ut pro x substituatur valor ipsius per z expressus. Est vero juxta superiora $CM = ax : z$. Quare cum hic sit $CM = ax : (b+x)$; erit

$$z = b + x$$

$$z - b = x$$

$$CM = \frac{ax}{z} = \frac{az - ab}{z}$$

Habemus itaque

$$\frac{az - ab}{z} = 2a - \frac{2bz}{a}$$

$$a^2z - a^2b = 2a^2z - 2bz^2$$

$$2bz^2 - a^2z = a^2b$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; 2b$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} = \tfrac{1}{2}a^2$$

$$z^2 - \frac{a^2z}{2b} + \frac{a^4}{16b^2} = \frac{a^4}{16b^2} + \tfrac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{a^4 + 8a^2b^2}{16b^2}$$

$$z - \frac{a^2}{4b} = \frac{a}{4b}\sqrt{(a^2 + 8b^2)}$$

$$\frac{\frac{a^2}{4b} - z =}{}$$

$$z = \frac{a^2 \mp V(a^2 + 8b^2)}{4b}$$

Quodsi $a=b$, erit $= \frac{a^2 \mp V(a^2 + 8a^2)}{4a}$

$$= \tfrac{1}{4}a \mp \tfrac{3}{4}a$$

Tab. XV. Fig. 151. Quando in hoc casu $z = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{4}a = a$, cum sit $a = CE$, curva axem in centro tangit juxta superiora. Ergo in casu maximi satisfacit radix falsa, nempe $z = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{3}{4}a = -\tfrac{1}{2}a$: quod indicio est, valorem ipsius z sumi debere ex altera parte, nempe versus O in recta CO.

Quando $b > a$, curva KCNO duplicem habet maximam semiordinatam, alteram nempe infra centrum, alterã supra idem, adeoque radix utraq; servit, affirmativa infra centrũ, negativa supra idem.

In casu denique tertio, ubi $a < b$, radix positiva est major radio. Sed cum $z =$ CG radio CE major fieri nequeat, *vi construct.*; radix negativa hic itidem locum habet: id quod denuo innuit, maximam applicatam cadere ultra centrum versus O.

SCHOLION.

372. *Illud hic notatu dignum est, quod pro diversa relatione quantitatum constantium* a *&* b, *quæ æquationem ingrediuntur, curvæ ductus admodum variet, ita ut oculorum judicio pro curvis non haberentur, quæ per eandem æquationem definiuntur.*

(*Wolfii Math. Tom* 2.)

THEOREMA 51.

373. *Si circulus X super alio æquali V rotetur, ita ut punctum rotationis vel sit in ipsa peripheria, vel extra eam, vel intra peripheriam circuli rotantis; curva hoc puncto descripta erit curva æquilibrationis.* Tab. XV. Fig. 152.

DEMONSTRATIO.

Sit punctum rotationis extra peripheriam, veluti in M, & initium rotationis in V, ita ut initio punctum O cadat in V. Dico curvam CMN, quæ hac rotatione describitur, esse curvam æquilibrationis. Ducatur recta RS, quæ centra circulorum Y & X connectit & recta SM, in qua est punctum describens M producatur, donec radio RV per initium rotationis V continuato in H occurrat. Quoniam arcus TV & TO, mensuræ angulorum R & S (*§.* 57 *Geom.*), æquales sunt per genesin curvæ CMN; erit RH=HS (*§.* 186 *Geom.*). Fiat RC=SM & ex centro C radio CD=RV=SO describatur circulus & ex C per M ducatur radius CD, ex puncto vero D demittatur perpendicularis GD, quemadmodum in constructione curvæ æqui librationis fecimus (§. 371). Fiat porro ut ibidem

RV=OS=CD=a, SM=RC=b, CG =z. Quoniam RH=HS *per demonstr.* & RC=SM *per constr.* erit etiam CH=RM (*§. 91 Arithm.*), adeoque HC : HM=HR : HS, consequenter angulus GCD= HRT (§. 183 *Geom.*). Quare cum porro ob RT=TS & HR = HS angulus ad T rectus sit (*§.* 179. 147 *Geom.*), & ad G itidem rectus *per construct.* erit (*§.* 267 *Geom.*).

$$CG : CD = RT : RH$$
$$z : a = a :$$

Est itaque RH = $a^2 : z$, adeoque CH=RH−RC= $\frac{a^2}{z} - b$.

Porro ob ang. CHD=ang. HRS *per demonstrata*; erit CM ipsi RS parallela (§ 255 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$HR : RS = HC : CM$$
$$\frac{a^2}{z} : 2a = \frac{a^2}{z} - b :$$
sive $a^2 : 2a = a^2 - bz :$

Ergo $CM = \frac{2a^3 - 2abz}{a^2}$
$$= 2a - \frac{2bz}{a}$$

Est itaque punctum M in curva æquilibrationis, consequenter curva rotatione circuli X super circulo Y puncto M descripta curva æquilibrationis (*§.* 371).

Idem eodem modo ostenditur in iis casibus, ubi punctum describens O fuerit in peripheria, vel punctum describens K fuerit intra peripheriam circuli.

PROBLEMA 56.

374. *Data curva* AB *invenire curvam aliam* LM, *super qua in quocunque puncto pondus* M *datum sit in æquilibrio cum pondere alio* B *dato.* Tab. XV. Fig. 133.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Ducatur recta KO rectam CH ad angulos rectos secans. Quoniam CH est linea verticalis *per hypoth.* erit KO linea horizontalis (§. 210). Demittantur perpendiculares BK & ME in lineam horizontalem KO ex punctis curvarum B & M, in quibus pondera æquilibrata constituuntur, quæ dicantur B & M; erit I centrum gravitatis ponderum constans commune (§. 124). Quare B : M=EI : IK (§. 144). Est vero ob K & E rectos (§. 78 *Geom.*) & verticales ad I æquales (*§.* 156 *Geom.*), ME : KB=EI : IK (§. 267 *Geom.*). Quare B : M= ME : KB (*§.* 167 *Arithm.*) Demittantur ex M & B perpendiculares ad CH, nempe PM & BH; erit EM = IP & KB= IH (*§.* 226 *Geom.*), adeoque B : M=IP : IH (§. 167 *Arithm.*).

Quare

Quare si per hanc analogiam reperiatur recta IP, datis ponderibus & recta IH (§. 271 *Geom.*), & ducta PS ad CI perpendicularis portione funis CM tanquam radio ex puncto C intersecetur; erit in M punctum curvæ æquilibrationis quæsitum.

Quodsi æquatio ad curvam AB detur, facile reperiri potest æquatio ad curvam æquilibrationis per communes Algebræ regulas.

CAPUT IX.
DE
MOTU PENDULORUM.

DEFINITIO 43.

376. *Pendulum* est grave quodlibet, ita suspensum, ut circa punctum aliquod vi gravitatis ascensus & descensus reciprocos continuare possit. Ascensus ille & descensus reciprocus *Oscillatio* penduli vocatur.

DEFINITIO 44.

Tab. III. Fig. 44. 377. *Pendulum simplex* est quod constat unico pondere instar puncti considerato & linea inflexili gravitatis experte circa centrum C convertibili AC appenso.

DEFINITIO 45.

378. *Pendulum compositum* est quod pluribus ponderibus constat, eandem distantiam tum inter se, tum a centro, circa quod oscillationes fiunt, constanter servantibus.

DEFINITIO 46.

379. *Axis oscillationis* est recta lineæ horizontali apparenti parallela transiens per centrum, circa quod pendulum oscillatur.

THEOREMA 51.

380. *Pendulum in* B *adductum per arcum circuli* BA *descendit & ad punctum æque altum* D *per arcum æqualem ascendit, inde denuo in* A *descendit ac ad* B *ascendit, sicque reciprocos ascensus & descensus continuat.* Tab. III. Fig. 44.

DEMONSTRATIO.

Sit HI linea horizontalis & BD ipsi parallela. Si globus A, quem instar puncti consideramus, cum solius gravitatis ratio hic habeatur (§. 377), in B adducitur, linea directionis BH, utpote ex centro gravitatis B ad lineam horizontalem HI perpendicularis, cadit ex-

tra basin, quæ est in puncto C. Globus igitur in hoc situ quiescere nequit, sed descendit (§. 222). Cum autem filo BC retineatur, ne perpendiculariter per BH descendere possit, per arcum circuli BA descendit (§. 131 *Geom.*). Ubi centrum gravitatis ad imum pervenit, ea vi globus instruitur, quæ cadendo per KA acquiritur (§. 303) adeoque ipsum ad altitudinem æqualem elevare potest (§. 322). Quare cum filum impediat, ne juxta tangentem AI progrediatur, per arcum AD ipsi AB æqualem (§. 291 *Geom.*) ascendit. Vi igitur, quam cadendo acquisiverat, omni absorpta per eundem arcum AD relabitur vi gravitatis ascensurus ex A in B & ita porro *Q.e.d.*

SCHOLION.

381. *Experientia theoremati non contradicit, etsi sine fine continuatæ oscillationes ei parum respondeant. Aeris enim resistentia & frictio circa centrum C partem aliquam ejus vis absumunt, quæ cadendo acquisita fuerat: unde fieri nequit, ut ad eandem præcise altitudinem elevetur globus, ex qua delapsus. Quoniam itaque ascensus continua capit decrementa, oscillatio tandem sistitur & pendulum in situ CA, in quo centrum gravitatis infimum occupat locum, quiescit.*

Tab. IV. Fig. 45.

THEOREMA 52.

382. *Si pendulum simplex inter duas semicycloides CB & CD suspendatur, quarum circuli generatores habent diametrum CF dimidiæ longitudini fili CA æqualem, ita ut filum oscillantis iis circumplicetur: oscillationes omnes utcunque inæquales erunt isochronæ seu æquidiuturnæ in medio non resistente.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim penduli filum CE semicycloidi BC circumplicetur, a centro gravitatis globi E, qui instar puncti consideratur (§. 377), ex evolutione cyclois BEAD describitur (§. 330 *Analys. infinit.*). Sed omnes descensus & ascensus in cycloide sunt æquidiuturni (§. 311). Ergo oscillationes penduli sunt æquidiuturnæ (§. 376). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

383. Quodsi longitudine penduli CA describatur circulus ex centro C, cum portio cycloidis prope verticem A eodem fere motu describatur, arcus exiguus circuli cum cycloide propemodum coincidit. Unde in arcubus circuli exiguis oscillationes pendulorum sunt ad sensum isochronæ, utcunque in se inæquales.

COROLLARIUM 2.

384. Quo longiora itaque sunt pendula in arcubus circuli oscillantia; eo majores oscillationes isochronæ sunt.

SCHOLION 1.

385. *Experientia non abludit. Quodsi enim*

enim duo fuerint pendula ejusdem longitudinis, quorum unum in majorem, alterum in minorem arcum, utrumque tamen in arcum non nimis magnum, oſcillando excurrat; in oſcillationibus centum vix aliquam differentiam notabis.

SCHOLION 2.

386. *Penduli inter duas ſemicycloides oſcillantis tam theoria, quam praxis debetur illuſtri* Hugenio (z).

PROBLEMA 55.

387. *Determinare durationem oſcillationis in Cycloide.*

RESOLUTIO.

Tab. Sit diameter circuli genitoris
III. ſeu altitudo totius Cycloidis AB
Fig. $=2a$; HB altitudo, ex qua deſcendit
46. pendulum per arcum illius QB $=2r$, $HP=x$, erit $PB=2r-x$. Sit porro tempus per $QB=t$ & ſuper HB deſcribatur ſemicirculus HNB ducanturque PM atque pm infinite propinquæ ad HB perpendiculares: erit $PN=\sqrt{(2rx-xx)}$, $Pp=NO=Rm=dx$, & celeritas in P, adeoque & in N (§. 303), acquiſita $=\sqrt{x}$ (§. 83), conſequenter, cum infiniteſima Mm motu uniformi percurratur, tempus per $Mm=dt=Mm:\sqrt{x}$ (§. 39). Conſtat vero (§. 131 *Analyſ. infinit.*) eſſe $Mm:mR=BS:BP$ & $AB:BS=BS:BP$ (§. 350 *Geom.*). Eſt itaque BS ad BP in ratione ſubduplicata AB ad BP, (§. 216 *Arithm.*), hoc eſt, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{PB}$, conſequenter $Mm:mR=\sqrt{AB}:\sqrt{PB}$ (§. 167 *Arithm.*). Unde $Mm=mR.\sqrt{AB}:\sqrt{PB}$ & $dt=dx\sqrt{a}:\sqrt{(2rx-x^2)}=2rdx\sqrt{a}:2r\sqrt{(2rx-x^2)}$. Eſt vero $rdx:\sqrt{(2rx-xx)}=Nn$ (§. 157 *Analyſ. infinit.*) Ergo $dt=2\sqrt{a}.Nn:2r$ & $\int dt=\int Nn.2\sqrt{a}:2r$. Jam quando $\int dt$ ſive t tempus denotat, quo grave per arcum cycloidis BQ deſcendit, $\int Nn$ in ſemiperipheriam circuli degenerat. Quare ut $2r$ ſeu diameter circuli ad ſemiperipheriam ejus, ita $2\sqrt{a}$ ad tempus per arcum BQ, conſequenter cum $2\sqrt{a}=2a:\sqrt{a}$ denotet tempus deſcenſus perpendicularis per BA (§. 39. 83); patet tandem (§. 168 *Arithm.*) ſequens

Theorema: Tempus integræ oſcilla- Tab.
tionis per arcum quemcunque Cycloi- III.
dis GDQ eſt ad tempus deſcenſus per- Fig.
pendicularis per diametrum circuli ge- 39.
nitoris AD ut peripheria circuli ad diametrum.

COROLLARIUM.

388. Hinc denuo conſequitur, quod jam ſuperius aliunde demonſtratum (§. 311), tempus deſcenſus per quoslibet arcus cycloidis eſſe æquidiuturnum, oſcillationes item in omnibus arcubus cycloidis eſſe æquidiuturnas.

 THEO-

(z) Vide Horologium Oſcillatorium ſive demonſtrationes de motu pendulorum ad horologia aptato geometricas.

THEOREMA 53.

389. *Gravitatis actio minor est in iis Terræ regionibus, ubi oscillationes ejusdem penduli sunt tardiores: major vero, ubi eædem celeriores.*

DEMONSTRATIO.

Tempus oscillationum in cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per diametrum circuli genitoris ut peripheria circuli ad diametrum (§. 387), adeoque in ratione constante (§. 413 *Arithm.*). Quare si oscillatio ejusdem penduli fit tardior, descensus quoque gravium perpendicularis tardior evadit: si ille redditur celerior; hic quoque celerior fit necesse est. In primo igitur casu minus spatium cadendo conficit grave, quam in altero, adeoque in illo motus minori vi acceleratur, quam in altero, consequenter gravitas minor est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

390. Cum adeo experientia docuerit, oscillationes ejusdem penduli esse tardiores prope æquatorem, quam in remotioribus versus polum regionibus; gravitas corporum minor est versus æquatorem, quam versus polos.

SCHOLION.

391. *Observavit hoc primus* Richerius A. 1672. *itinere in insulam* Cayennæ, *qua ab æquatore 5 fere gradibus distat, facto, ubi pendulum Parisiense singulis minutis secundis oscillans, cujus longitudo erat pedum 3, linearum $8\frac{5}{9}$, minuenda erat linea una cum quadrante, ut adhuc oscillationes singulis minutis secundis absolveret* (a). A. 1677. Hallejus *ad insulam* S. Helenæ *navigans reperit horologium suum ibi tardius moveri, quam Londini, sed differentiam non notavit. Similes observationes habuere* A. 1682. Varin & des Hayes A. 1697. Couplet *filius* & A. 1704. *Feuillée* (b).

THEOREMA 57.

392. *Si duo pendula* CA *&* EF *in arcus similes* DAB *&* GFH *excurrant; tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata longitudinum* CA *&* EF. Tab. III. Fig. 47.

DEMONSTRATIO.

Tempus descensus per DA est ad tempus descensus per GF in ratione subduplicata DA ad GF (§. 314). Sed tempora ista sunt oscillationum per arcus DB & GH dimidia. Ergo & tempora oscillationum sunt in ratione subduplicata arcuum DA & GF (§. 178 *Arithm.*), consequenter & radiorum CA & EF, quibus arcus similes DA & GF *per hypoth.* describuntur (§. 412 *Geom.* & 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

CO-

(a) Vid. Acta Eruditorum A. 1695. p. 30.
(b) Vid. *Newtonus* in Principiis lib. 3. prop. 19. p. m. 419.

COROLLARIUM.

393. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes DA & GF excurrentium sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes conficiuntur.

THEOREMA 57.

394. *Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit intra tempus *a* numerus oscillationum penduli unius = *b*, alterius = *mb*. Cum oscillationes singulæ ejusdem penduli supponantur æquidiuturnæ, erit tempus, quo pendulum primum oscillationem unam conficit, = *a* : *b*, & tempus, quo alterum oscillationem unam absolvit, = *a* : *mb* (§. 302 *Arithm.*). Sunt ergo tempora, quibus singulæ oscillationes fiunt, ut *a* : *b* ad *a* : *mb*, hoc est, ut *amb* ad *ab* (§. 178 *Arithm.*) seu ut *mb* ad *b* (§. 181 *Arithm.*). Sed ut *mb* ad *b* ita est numerus oscillationum penduli secundi ad primum. Sunt itaque numeri oscillationum eodem tempore confectarum reciproce ut tempora singularum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

395. Longitudines igitur pendulorum in arcus similes, eosque parvos excurrentium sunt in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 303).

THEOREMA 58.

396. *Longitudines pendulorum intra cycloides suspensorum sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulæ oscillationes fiunt.*

DEMONSTRATIO.

Ut diameter circuli ad peripheriam ita tempus descensus per altitudinem cycloidis seu dimidiam penduli longitudinem ad tempus unius oscillationis (§ 387). Sunt igitur tempora descensus per duorum pendulorum dimidias longitudines ut tempora duarum oscillationum ab iisdem confectarum (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed altitudines descensus perpendicularis sunt in ratione duplicata temporum (§. 86). Ergo etiam altitudines, hoc est, pendulorum longitudines dimidiæ, consequenter & integræ (§. 178 *Arithm.*), sunt in ratione duplicata temporum, quibus oscillationes per cycloides absolvuntur (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

397. Sunt igitur & in ratione duplicata numerorum oscillationum eodem tempore confectarum, sed reciproce sumtorum (§. 304).

CO-

COROLLARIUM 2.

398. Tempora oscillationum in cycloidibus diversis sunt in ratione subduplicata longitudinis pendulorum.

PROBLEMA 56.

399. *Data longitudine alicujus penduli, una cum numero oscillationum in tempore dato confectarum, invenire longitudinem alterius penduli, quod eodem tempore datum oscillationum numerum conficiat.*

RESOLUTIO.

Quæratur ad quadratum numeri oscillationum, quas in tempore dato absolvere debet pendulum quæsitum, ad quadratum numeri oscillationum penduli dati & longitudinem penduli dati numerus quartus proportionalis; erit is longitudo penduli quæsita (§. 397).

E. gr. Juxta *Hugenium* (c) longitudo penduli, cujus oscillationes singulæ singulis minutis secundis absolvuntur, est pedum Parisinorum 3 & linearum $8\frac{1}{2}$. Quæritur pendulum, quod intra minutum primum 200 oscillationes conficiat. Cum numerus oscillationum penduli dati sit intra minutum primum 60 & ejus longitudo 881 linearum dimidiatum (§. 26 *Geom.*); erit longitudo penduli quæsiti $= 3600 \cdot 881 : 40000 = 79\frac{29}{100}$ lin. dim. seu $39\frac{78}{100}$ lin.

PROBLEMA 57.

400. *Dato numero oscillationum, quæ a pendulo datæ longitudinis in dato tempore absolvuntur, invenire numerum oscillationum ab alio pendulo datæ itidem longitudinis in dato tempore conficiendarum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur numerus quartus proportionalis ad longitudines pendulorum inverse sumtas & quadratum numeri oscillationum quæsiti (§. 397).
2. Quare si inde extrahatur radix, habebitur numerus oscillationum quæsitus.

E. gr. Quæritur, quot oscillationes intra minutum primum absolvat pendulum, cujus longitudo est 7929 istiusmodi partium, qualium pendulum singulis minutis secundis oscillans est 88100. Reperietur numerus oscillationum $= \sqrt{(88100 \cdot 3600 : 7929)} = \sqrt{40000} = 200$.

THEOREMA 40.

401. *Celeritas penduli in puncto infimo B est ad celeritatem cadendo per duplam longitudinem AB acquisitam ut chorda arcus, quem describit, EB ad diametrum circuli AB.* Tab. III. Fig. 36.

DEMONSTRATIO.

Celeritas per arcum EB acquisita æquatur celeritati per PB acquisitæ (§. 255). Est ergo ad celeritatem per AB acquisitam in ratione

(c) In Horolog. Oscillat. part. 4. prop. 25. f. 152.

tione subduplicata BP ad BA (§. 87). Sed BA : BE = BE : BP (§. 330 *Geom.*) adeoque BA ad BE est ratio subduplicata BA ad BP (§. 216. 159 *Arithm.*). Ergo celeritas per arcum BE est ad celeritatem per BA acquisitam ut chorda BE ad BA (§. 156 *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

402. Cum adeo sit ut celeritas per arcum EB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam ut chorda EB ad AB & ut celeritas per arcum DB acquisita ad celeritatem per AB acquisitam, ut chorda DB ad AB (§. 401); celeritates per arcus EB & DB acquisitæ sunt ut chordæ cognomines (§. 195 *Arithm.*).

SCHOLION.

403. *Alia adhuc theoremata non inelegantia de pendulis habet* Newtonus(d): *quæ analytice facillime demonstrantur ex superioribus. Eum igitur in finem sequens addimus problema.*

PROBLEMA 60.

404. *Determinare tempus oscillationis dimidiæ per arcum exiguum in hypothesi gravitatis uniformis, sed massæ minime proportionalis.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 154. Sit in C centrum, circa quod pendulum oscillatur. Sint NA & MA arcus exigui, per quos oscillatur, seu oscillationes dimidiæ. Sit BA dupla penduli longitudo & BNA semicirculus ex centro C descriptus; dicatur

$CA = a$, $AP = x$
$AQ = b$

erit $AB = 2a$

$QP = b - x$

& (§. 330 *Geom.*)

$AB : AN = AN : AQ$
$2a : AN = AN : b$
$AB : AM = AM : AP$
$2a : AM = AM : x$

adeoque

$AM = \sqrt{ax}$ $AN = \sqrt{2ab}$

Quoniam arcus AM & AN admodum exigui; ab arcubus non different notabiliter subtensæ cognomines. Quare etiam arcus $AM = \sqrt{2ax}$ & arcus $AN = \sqrt{2ab}$, consequenter $NM = AN - AM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$, cujus differentiale nM reperitur $= \frac{1}{2} x^{-1:2} dx \sqrt{2a} = -dx\sqrt{a} : \sqrt{2x}$.

Sit porro gravitas $= g$, massa $= m$. Quoniam gravitas uniformis seu constans *per hypoth.* erit celeritas in n utpote cadendo per altitudinem $QP = b - x$ acquisita $= \sqrt{2g(b-x)} : \sqrt{m}$ (§. 113).

Quoniam motus per arculum infinite parvum nM æquabilis, erit

(d) In Princip. Phil. nat. mathem. lib. 2. prop. 24 & ej. coroll. p. m. 294 & seqq.

erit tempusculum dt directe ut spatium seu arculus nM & reciproce ut celeritas in n acquisita (§.39), consequenter

$$dt = \frac{nM}{\text{Cel. per NM}} = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

$$t = \int \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$$

Est vero $-bdx : 2\sqrt{(bx-x^2)}$ elementum arcus QR, radio $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}$ AQ descripti, cujus sagitta QP $= b-x$, ob valorem negativum (§. 157 *Anal. infin.*). Ergo $-dx : \sqrt{(bx-x^2)}$ = elemento arcus AR per $\frac{1}{2}$ AQ diviso. Fiat itaque

$$\frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-x^2)}} = dz$$

erit $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{2dz}{b}$

adeoque $dt = \frac{-dx\sqrt{am}}{2\sqrt{(gbx-gx^2)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$t = \frac{z.\sqrt{am}}{b\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\text{arc. QR.} \sqrt{\text{AB}}. \sqrt{m}}{\text{AQ}. \sqrt{g}}$$

Quodsi jam fiat QP = QA, arcus QR degenerabit in semiperipheriam QRA, eritque t tempus dimidiæ oscillationis, hoc est, descensus per arcum NA absolvitur tempore $t = \frac{\text{QRA}. \sqrt{\text{AB}}. \sqrt{m}}{\text{AQ}. \sqrt{g}}$

Patet, QRA : AQ designare rationem peripheriæ ad diametrum, & $\sqrt{\text{AB}}$ esse ut tempus descensus perpendicularis per AB seu altitudinem duplæ longitudini penduli æqualem (§.87). Quare si fuerit g ut m, seu gravitas massæ proportionalis, quemadmodum in hypothesi *Galilæana* (§. 114), erunt

Theorema: Oscillationes pendulorum in arcubus exiguis circularibus ad tempus descensus perpendicularis ponderis appensi per altitudinem duplæ longitudinis penduli æqualem seu circuli diametrum, ut semiperipheria circuli ad diametrum, seu oscillationes integræ sunt ad tempus descensus perpendicularis per diametrum ut peripheria circuli ad diametrum.

THEOREMA 59.

405. *Tempora sunt in ratione composita ex directis subduplicatis longitudinum pendulorum & massarum atque reciproca subduplicata gravitatum uniformium.*

DEMONSTRATIO.

Sint longitudines pendulorum L & l, tempora oscillationum T & t,

& t, massæ M & m, gravitates G & g; erit $T = \frac{QNA.\sqrt{2M.L}}{AQ.\sqrt{G}}$ & $t = \frac{QNA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\sqrt{g}}$ (§.404), adeoque

$$T:t = \frac{QNA.\sqrt{2M.L}}{AQ.\sqrt{G}} : \frac{QNA.\sqrt{2m.l}}{AQ.\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{M.L}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{m.l}}{\sqrt{g}} \text{ (§.181 Arithm.)}$$

$= \sqrt{M}.\sqrt{L}.\sqrt{g} : \sqrt{m}.\sqrt{l}.\sqrt{G}$ (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

406. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum longitudines æquales sunt, sunt in ratione composita ex ratione gravitatum & ratione duplicata temporum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in theoremate præcedente, erit

$$T:t = \frac{\sqrt{ML}}{\sqrt{G}} : \frac{\sqrt{ml}}{\sqrt{g}}$$

adeoque $T^2 : t^2 = \frac{ML}{G} : \frac{ml}{g}$ (§. 260 *Arithm.*).

Et hinc $T^2G : t^2g = ML : ml$ (§. 184 *Arithm.*).

Quare cum sit $L = l$ *per hypoth*, erit $T^2G : t^2g = M : m$ (§. 183 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

407. Quodsi fuerit $T = t$; erit $G : g = M : m$, hoc est, si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ sive massæ sunt ut gravitates.

COROLLARIUM 2.

408. Quodsi fuerit $G = g$, erit $T^2 : t^2 = M : m$ (§ 181 *Arithm.*), hoc est, si gravitates sunt æquales, massæ sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 3.

409. Quodsi fuerit $M = m$; erit $T^2G = t^2g$ (§. 151 *Arithm.*), adeoque $G . g = t^2 : T^2$ (§. 299 *Arithm.*), hoc est, si massæ sunt æquales, gravitates sunt in ratione duplicata reciproca temporum.

COROLLARIUM 4.

410. Quoniam $T^2G : t^2g = ML : ml$, vi *demonstr. præc.* si sit $T = t$ & $M = m$, erit $G : g = L : l$ (§. 151 *Arithm.*), hoc est, si & tempora, & massæ æqualia sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum.

COROLLARIUM 5.

411. Et quia $T^2G : t^2g = ML : ml$; erit etiam $T^2Gl : t^2gL = M : m$ (§. 185 178 *Arithm.*), hoc est, massæ pendulæ sunt ut quadrata temporum & gravitates directe, & ut longitudines pendulorum inverse.

SCHOLION 1.

412. *His principiis usus est* Newtonus

Q 2 nus

nus (c) *in comparandis corporibus inter se quoad quantitatem materiæ in singulis. Factis autem experimentis quam accuratissimis se semper invenisse fatetur, quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse. Hinc etiam pendet ratio comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis ad cognoscendam variationem gravitatis.*

COROLLARIUM 6.

413. Quodsi fuerit $M=m$, erit $T^2Gl = t^2gL$ (§. 149 *Arithm.*) consequenter $T^2 : t^2 = gL : Gl$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g}.\sqrt{L} : \sqrt{G}.\sqrt{l}$ (§. 260 *Arithm.*), hoc est, si massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione composita ex directa longitudinum pendulorum & reciproca gravitatum subduplicata.

COROLLARIUM 7.

414. Quodsi fuerit $M=m$ & $T=t$, erit $gL = Gl$ (*§. præc.*); consequenter $G : g = L : l$, hoc est, pendula isochrona habent gravitates seu vires acceleratrices longitudinibus pendulorum proportionales.

COROLLARIUM 8.

415. Quodsi fuerit $M=m$ & $L=l$, erit $T^2G = t^2g$ (§. 415), consequenter $T^2 : t^2 = g : G$ (§. 299 *Arithm.*), adeoque $T : t = \sqrt{g} : \sqrt{G}$ (§. 260 *Arithm.*), hoc est, si massæ & longitudines funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata reciproca gravitatum.

COROLLARIUM 9.

416. Quodsi fuerit $M=m$ & $G=g$, erit $T^2 l = t^2 L$ (§. 413), consequenter $T^2 : t^2 = L : l$, adeoque $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{l}$, hoc est, si gravitates acceleratrices & massæ funependulorum fuerint æquales, tempora sunt in ratione subduplicata longitudinum.

SCHOLION 2.

417. *Cum in pendulis vis ponderis, quæ sollicitatur, in uno puncto concentrata concipiatur (§. 225), neque massa per se, nisi quatenus a causa gravitatis animatur, ad motum aliquid conferat, si pondera massis proportionalia sunt, adeoque æquales quantitates materiæ seu massæ æquales a gravibus eodem modo animentur; nulla habetur massarum ratio. Perinde igitur est in hoc casu, ac si in omnibus pendulis massæ essent æquales. Unde in hac naturæ consentanea hypothesi valent, quæ in casu massarum æqualium demonstravimus.*

THEOREMA 61.

418. *Numeri oscillationum duorum pendulorum quorumcunque in arcubus exiguis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum, atque directa subduplicata gravitatum massas animantium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim numeri oscillationum N & n a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutorum reciproce ut tempora, quibus sin-

(c) Vid. Princip. lib. 2. prop. 24. Cor. 7. p. m. 275.

singulæ oscillationes fiunt (§. 394). Enimvero tempora oscillationum sunt in ratione composita ex rationibus subduplicatis directis massarum & longitudinum pendulorum & subduplicata reciproca massas animantium gravitatum, seu ut $\sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$ ad $\sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G}$ (§. 405). Quare numeri oscillationum a duobus pendulis æqualibus temporibus absolutarum sunt in ratione composita ex reciprocis subduplicatis massarum & longitudinum & directa subduplicata gravitatum massas animantium, seu $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{m}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{M}.\sqrt{g}$. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

419. Quodsi fuerit $m = M$, erit $N : n = \sqrt{l}.\sqrt{G} : \sqrt{L}.\sqrt{g}$, hoc est, si massæ duorum pendulorum fuerint æquales, numeri oscillationum eodem tempore in arcubus exiguis absolutarum sunt in ratione composita ex subduplicata reciproca longitudinum pendulorum & directa subduplicata gravitatum massas animantium.

COROLLARIUM 2.

420. Quodsi fuerit $M = m$ & $L = l$; erit $N : n = \sqrt{G} : \sqrt{g}$, hoc est, multitudines vibrationum, eodem tempore a duobus pendulis æqualibus peractarum, se habent in subduplicata ratione directa virium pendula agitantium.

SCHOLION 1.

421. *Si cui libuerit, is ex analogia* $N : n = \sqrt{G}.\sqrt{l}.\sqrt{m} : \sqrt{g}.\sqrt{L}.\sqrt{M}$ *plura theoremata deducet, quemadmodum supra in simili casu factum.*

SCHOLION 2.

422. *Quæ hactenus de pendulorum motu demonstrata sunt, plerumque tantum succedunt, si filum, ex quo pondus suspenditur, gravitate careat & totius ponderis gravitas in punctum individuum sit coacta: quæ nempe superius supposuimus. Quamobrem in praxi filo utendum est tenui & globo exiguo sed ex materia quantumvis gravi conflato. Quodsi vero filum aut virga sit gravis & pondus magnum; leges modo demonstratæ valde turbantur: neque enim pendulum amplius simplex est, sed compositum, perinde nimirum est, ac si plura pondera eidem virgæ inflexili & gravitatis experti in diversis locis applicarentur, quæ singula diversa celeritate moventur. Enimvero non sufficit, quemadmodum supra in æquiponderantibus, invenire centrum gravitatis commune & in eo applicare ponderum summam, ut verus penduli motus exploretur; sed alia ratione determinandum est illud punctum, in quo colligenda est omnis penduli gravitas, ut eadem præstet cum composito. Eum igitur in finem addimus caput sequens.*

CAPUT X.
DE
CENTRO OSCILLATIONIS.

DEFINITIO 47.

423. *Centrum oscillationis* est punctum, in quo si colligatur penduli compositi totius gravitas, oscillationes singulæ eodem adhuc tempore conficiuntur, quo ante.

COROLLARIUM.

424. Ejus itaque a puncto suspensionis distantia æquatur longitudini penduli simplicis, cujus oscillationes sunt cum oscillationibus compositi isochronæ.

DEFINITIO 48.

425. *Pes horarius* est longitudo penduli simplicis, quod singulas oscillationes conficit singulis minutis secundis.

THEOREMA 62.

Tab. IV. Fig. 48. 426. *Si plura pondera D, F, H, B, quorum gravitas in punctis D, F, H, B, concipitur collecta, in virga inflexili AB eandem inter se & a puncto suspensionis A distantiam constanter conservent & circa A oscillationes suas perficiat pendulum hoc modo compositum; prodibit distantia centri oscillationis O a puncto suspensionis OA, si singula pondera in quadrata distantiarum ducantur & aggregatum per summam momentorum eorundem ponderum dividatur.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi pendulum celeritate semel acquisita agitaretur, æqualibus temporibus pondera D, F, H, B constanter describerent arcus *d*D, *f*F, *g*H & *b*B distantiis a puncto suspensionis A*d*, A*f*, A*g*, A*b* proportionales. Patet adeo, celeritatem semel acquisitam descensum ponderum non alterare. Sola igitur spectanda est vis gravitatis, quæ incrementa celeritatis efficit. Concipiamus itaque punctum O esse centrum oscillationis. Quando itaque pendulum percurrit angulum infinite parvum BAC; summa ponderum in centro oscillationis O applicata arcum OP describet (§. 423). Quare cum vis gravitatis eodem modo agat in pondera singula D, F, H, B, quo in summam eorundem O, nisi retinaculum AB obstaret; singula per spatiola ipsi OP æqualia transferrentur, quia motus in instanti est uniformis, adeoque celeritates spatiolis propor-

portionales (§. 33). Quare si KN per P ipsi DB parallela ducatur, DK, FL, HM, BN (cum arcus infinite parvi a chordis eorum non differant) exponent celeritates a ponderibus D, F, H & B in instanti acquirendas, si libere descenderent. Gravitas vero cum solo nisu agat (§. 4), vis mortua est (§. 9); consequenter vires motuum acceleratrices sunt in ratione composita ponderum & celeritatum (§. 278). Deperditur itaque in E vis ut D.EK & in F vis ut F.GL: contra vero in H accrescit vis ut H.MI & in B vis ut B.NC, seu quod perinde est, ob decrementum virium in D & F vi in P aliquid accrescit, sed incrementum in H accremento in P rursus aliquid detrahit. Cum autem sit vis in D ad vim in B uti AB ad AD; vis in F ad vim in B uti AB ad AF; vis denique in H ad vim in B uti AB ad HB (§. 153); reperiuntur accrementa virium in B ut (D.EK.AD): AB & (F.GL.AF): AB, quod vero inde rursus detrahitur ut (H.MI.AH): AB. Habemus adeo

$$B \cdot NC = [D \cdot EK \cdot AD + F \cdot GL \cdot AF - H \cdot MI \cdot AH] : AB.$$

& hinc

$$B \cdot AB \cdot NC + H \cdot MI \cdot AH = D \cdot EK \cdot AD + F \cdot GL \cdot AF$$

Jam cum GL ipsi EK & MI ipsi NC sit parallela, ob rectos E, G, I, C (§. 38 *Analyſ. infinit.*) & EG = DF, GP = FO, PI = HO, IC = BH; erunt EK & GL ipsis OD & OF, MI & NC ipsis OH & OB proportionales (§. 268 *Geom.*), consequenter substitutis pro EK, GL, MI, NC proportionalibus OD, OF, OH, OB.

$$B \cdot AB \cdot OB + H \cdot OH \cdot AH = D \cdot OD \cdot AD + F \cdot OF \cdot AF.$$

Denique cum sit

$$H \cdot AH^2 = H \cdot HA \cdot HO + H \cdot HA \cdot AO$$

$$B \cdot AB^2 = B \cdot BA \cdot BO + B \cdot BA \cdot AO$$

$$D \cdot OA \cdot DA = D \cdot AD \cdot AD + D \cdot AD \cdot OD$$

$$F \cdot OA \cdot FA = F \cdot FA \cdot FA + F \cdot OF \cdot FA.$$

Si utrinque addantur in æquatione inventa $D \cdot DA^2 + F \cdot FA^2 + H \cdot HO \cdot HA + B \cdot AO \cdot BA$, prodibit

$$D \cdot DA^2 + F \cdot FA^2 + H \cdot AH^2 + B \cdot AB^2 = (D \cdot DA + F \cdot FA + H \cdot HA + B \cdot BA)\, AO$$

Consequenter

$$AO = \frac{D \cdot DA^2 + F \cdot FA^2 + H \cdot HA^2 + B \cdot BA^2}{D \cdot DA + F \cdot FA + H \cdot HA + B \cdot BA}$$

Q. e. d.

co-

SCHOLION 1.

427. *Quodsi non evidens videatur, esse* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$ & $HA^2 = HA.HO + HA.AO$, *itemque* $OA.DA = AD.AD + DA.OD$ & $OA.FA = AF.AF + AF.FO$; *idem facile ostenditur hoc modo. Cum sit* $HA = HO + OA$ (§. 86 Arithm.), erit $HA^2 = HO^2 + 2\,HO.OA + OA^2$ (§. 261 Arithm.). *Et quoniam* $HA = AO + OH$ (§. 86 Arithm.); erit $HA.HO = (AO + OH)\,HO = HO.OA + HO^2$ & $HA.AO = (AO + OH)\,AO = AO^2 + OH.AO$ (§. 93 Arithm.), *consequenter* $HA^2 = HA.HO + HA.AO$ (§. 87 Arithm.). *Similiter cum sit* $AB^2 = AO^2 + 2\,AO.OB + OB^2$ & $AB.BO = (AO + OB)\,OB = AO.OB + OB^2$ & $AB.AO = (AO + OB)\,AO = AO^2 + AO.OB$; *erit* $AB^2 = AB.BO + AB.AO$. *Et quia* $OA = AD + OD$ (§. 86 Arithm.), *erit* $OA.DA = (AD + OD)\,DA = AD.AD + AD.OD$ (93 Arithm.). *Similiter quia* $AO = AF + FO$; *erit* $OA.FA = AF.AF + AF.FO$.

SCHOLION 2.

428. Joannes Bernoulli (f) *ex simplicissimis principiis mechanicis theoriam de centro oscillationis* ab Hugenio (g) *inventam* & a Jacobo Bernoulli *fratre* (h) *ex natura vectis demonstratam, quemadmodum modo uberius exposuimus, deduxit* & *ad agitationem pendulorum in liquoribus deduxit. Operæ igitur pretium nos facturos existimamus, si viri ingeniosissimi methodum hic dilucidemus.*

PROBLEMA 61.

429. *Determinare centrum oscillationis in pendulo composito.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Sit virga inflexilis AL gravitatis expers, onusta ponderibus quotcunque C, D &c. in distantiis quotcunque AC, AD &c. ab axe oscillationis A; determinandum est centrum oscillationis Z seu longitudo penduli simplicis AZ composito AL isochroni. Tab. XVI. Fig. 155.

Sit itaque C massa ponderis in C; D vero massa ponderis in D: quæ pondera animantur a gravitate naturali G; erit pondus in C = G. C & momentum ejus G. C. AC, quod *vim agitativam penduli* appellat *Bernoullius.* Eodem prorsus modo reperitur vis agitativa penduli in D = G. D. AD & ita porro, si plura fuerint pondera (§. 153).

Assumatur jam pro arbitrio punctum P & quæratur tum massa ponderis, tum gravitas, a qua animanda, ut pondus ibidem habeat momentum ponderi C æquale, adeoque ipsi C substitui possit. Ni-

(f) In Actis Erudit. A. 1714. p. 257 & seqq.
(g) In Horolog. oscillat. part. 4 f. 91 & seqq.
(h) In Actis Erudit. A. 1691 p. 317.

Nimirum cum gravitates seu vires acceleratrices massarum sint ut celeritates, quas producunt in instanti, celeritates autem in tempusculo infinite parvo, quo per angulum infinite parvum ex AL in A(L) movetur pendulum, sint ut C(C) ad P(P) (§.33), consequenter ut AC ad AP (§.138. 412 *Geom.*); erit ut AC ad AP ita gravitas in C ad fictitiam in P, a qua animandum pondus in P in locum ipsius C surrogandum, consequenter gravitas in $P = \frac{AP.G.}{AC}$ Quodsi massa hujus ponderis ponatur P; erit pondus $= \frac{G.P.AP}{AC}$ & momentum $= \frac{G.P.AP^2}{AC}$, quod cum sit æquale momento ponderis in C, erit

$$\frac{G.P.AP^2}{AC} = C.G.AC$$

$$P = \frac{C.AC^2}{AP^2}$$

Eodem prorsus modo reperitur pondus in P substituendum ponderi in D: nimirum massa ejus $= \frac{AD^2.D}{AP^2}$: gravitas, qua animanda, $= \frac{AP.G}{AD}$

Est itaque pondus, quod in P substitui debet pro pondere, quod est in C, $\frac{AP.G.}{AC}\ \frac{C.AC^2}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP}$ & pondus, quod pro D in P substituendum $= \frac{AP.G.}{AD}\ \frac{AD^2.D}{AP^2} = \frac{AD.D.G}{AP}$

Quoniam hæc pondera a gravitatibus particularibus animantur, invenienda est porro gravitas communis, quæ animat uniformiter massarum seu corporum aggregatum.

Sit ea gravitas $= x$: erit

$$\frac{AC^2.Cx}{AP^2} + \frac{AD^2.Dx\ \&c.}{AP^2} = \frac{AC.C.G}{AP} + \frac{AD.D.G\ \&c.}{AP}$$

$$AC^2.Cx + AD^2.Dx\ \&c. = (AC.CG + AD.D\ \&c.)\ AP.G$$

$$x = \frac{(AC.C + AD.D\ \&c.)\ AP.G}{AC^2.C + AD^2.D\ \&c.}$$

hoc est gravitas communis reperitur dividendo ponderum summam per summam massarum.

Cum adeo pendulum AP, quod animatur a gravitate fictitia

$\frac{AC.C + AD.D \&c.\, AP.G}{AC^2.C + AD^2.D}$ sit composito AL isochronum, pendula vero simplicia isochrona habeant gravitates longitudinibus proportionales (§.414); longitudo penduli simplicis AZ fictitio AL isochroni & a gravitate naturali G animandi reperitur, si fiat:

$$AC.C + AD.D \&c.\ AP.G : G = \frac{AC^2.C + AD^2.D \&c.}{AP} : AZ$$

Erit enim (§.181. 183 *Arithm.*) $AC.C + AD.D \&c. : AC^2.C + AD^2.D \&c. = 1 : AZ$

consequenter

$$AZ = \frac{AC^2.C + AD^2.D \&c.}{AC.C + AD.D}$$

quæ est regula *Hugeniana* (i) in propositione præcedente demonstrata; sed in eo casu, ubi pondera quæ pendulum componunt, sunt in eadem recta, aut saltem, in eodē plano, in quo est axis oscillationis.

Tab. XVI. Fig. 156. Ponamus jam pondera C, D &c. non esse in eadem recta seu in plano, in quo est axis oscillationis sed quomodocunque in plano quodam verticali circa axem A oscillante disposita, ita tamen ut situm non mutent. Sit AH linea verticalis plani & per centrum suspensionis A ducatur AH ad verticalem AM normalis, adeoque horizontalis (§. 210), radio AC describatur arcus cC & ex C demittatur perpendicularis CK ad AH; erit gravitas absoluta in C ad gravitatem respectivam, qua impellitur radius AC in ratione AC ad AK (§. 272) sive RC, adeoque

$$AC : RC = G : \frac{G.RC}{AC}$$

Est ergo vis agitativa in $C = \frac{G.RC}{AC}$

Eodem modo reperitur gravitas respectiva in $D = \frac{G.DS}{AD}$. Et, si gravitas absoluta in $P = M$, respectiva ibidem $\frac{M.PQ}{AP}$.

Sit jam punctum P pro arbitrio assumtum, in quo substituendum est pondus aliquod pro C idem cum ipso momentum habens. Constat primum ex antecedentibus, si radio AP describatur arcus Pp, fore

$$AC : AP = \frac{G.RC}{AC} : \frac{M.QP}{AP}$$

adeoque $AC^2 : AP^2 = G.RC : M.QP$ (§. 185 *Arithm.*).

AP².

(i) Prop. 5. part. 4. de Horolog. oscillat. f. 58.

$$AP^2 . G . RC = AC^2 . M . QP$$

$$\frac{AP^2 . G . RC}{AC^2 . QP} = M$$

Quodsi N denotet gravitatem absolutam, qua animatur pondus pro D substituendum, reperietur eodem modo

$$N = \frac{AP^2 . G . DS}{AD^2 . QP}$$

Sit jam massa ponderis gravitate M animandi = T. Quoniam ejus momentum æquale est momento ponderis C, in cujus locum surrogatur; erit

$$RC . C . G = \frac{T . AP^2 . G . RC . QP}{AC^2 . QP}$$

$$C = \frac{T . AP^2}{AC^2}$$

$$\frac{C . AC}{AP^2} = T$$

Eodem modo invenitur massa V corporis in P pro altero D substituendi & gravitate N animandi $= \frac{AD^2 . D}{AP^2}$

Quoniam gravitas communis, qua ponderum aggregatum in P animatur, est $\frac{T . M + V . N + \&c.}{T + V}$

Vi antecedentium cum sit

$$T . M = \frac{C . AC^2 . AP^2 . G . RC}{AP^2 . AC^2 . QP} = \frac{C . G . RC}{QP}$$

& $V . N = \frac{D . AD^2 . AP^2 . G . DS}{AP^2 . AD^2 . QP} = \frac{D . G . DS}{QP}$

$$T + V = \frac{AC^2 . C + AD^2 . D}{AP^2}$$

erit $\frac{T . M + V . N}{T + V}$

$$= \frac{AP^2 . C . G . RC + AP^2 . D . G . DS}{QP . AC^2 . C + QP . AD^2 . D}$$

$$= \frac{C . RC + D . DS}{C . AC^2 + D . AD^2} . \frac{AP^2 . G}{QP}$$

Habemus adeo gravitatem fictitiam, qua animandum est pendulum AP, ut sit composito isochronum in instanti, quia RC, SD &c. variabiles in motu penduli.

Tandem itaque ut ante infertur:

$$\frac{C . RC + D . SD}{C . AC^2 + D . AD^2} . \frac{AP^2 . G}{PQ} : G = AP : AZ$$

$(C . RC + D . SD) AP : C . AC^2 + D . AD^2 = 1 : AZ$ (§. 185 *Arithm.*)

Quamobrem

$$AZ = \frac{C . AC^2 + D . AD^2}{C . RC + D . SD} . \frac{QP}{AP}$$

Quæ est longitudo penduli fictitii in instanti composito isochroni ob RC, SD, QP variabiles.

Sit jam in F centrum gravitatis, erit ob parellelas FE & QP (§. 268 *Geom.*)

$$QP : AP = FE : AF$$

adeoque $AF = \frac{AP . FE}{QP}$

= quantitati constanti.

Erit etiam ob centrum gravitatis in F (§. 153)

$$(C+D) EF = RC . C + SD . D$$

adeoque si AP transit per centrum gravitatis F, hoc est, si sit *linea centri* phrasi *Hugeniana*; erit

$$AZ = \frac{C . AC^2 + D . DA^2 \&c.}{(C+D \&c.) AF}$$

Atque hæc est regula *Hugeniana* pro inveniendo centro oscillationis in pendulo quocunque composito, quam ipsius verbis enunciat sequens

Theorema. Si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis & summa productorum dividatur per id, quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

COROLLARIUM 1.

430. Si pondera omnia fuerint æqualia, nempe D = F = H = B &c. = P & numerus ponderum *n*; erit

$$AO = \frac{P.AD^2 + P.FA^2 + P.HA^2 + P.BA^2 \&c.}{nP.AR}$$

Tab. IV. Fig. 48.

hoc est, $AO = \frac{AD^2 + FA^2 + HA^2 + BA^2 \&c.}{nAR}$

COROLLARIUM 2.

431. Quoniam D. AD est momentum ponderis D (§. 153); si momenta considerentur ut pondera ad rectam AB applicata; centrum oscillationis coincidet cum centro gravitatis communi horum ponderum (§. 429) adeoque momentis in ponderum locum surrogatis eodem modo determinatur centrum oscillationis, quo supra centrum gravitatis commune investigavimus (§. 157).

COROLLARIUM 3.

432. Si figura plana circa axem RI ita oscilletur, ut is semper maneat in plano oscillante seu (quod perinde est) ordinatis figuræ MN constanter sit parallelus; singulæ pondusculi cujuscunque MN*nm* partes ab axe oscillationis RI æqualiter distant (§. 216 *Geom.*), nec aliter oscillatur e. gr. particula G ac si in puncto L suspenderetur. Est adeo momentum integri pondusculi MN*nm* (si fuerit $AP = LG = x$, $MN = 2y$, $Pp = dx$,) $= 2yxdx$, consequenter distantia centri oscillationis ab axe $= 2\int yx^2dx : 2\int yxdx$ (§. 157) $= \int yx^2dx : \int yxdx$. Quodsi adeo ex æquatione speciali ad figuram aliquam datam valor ipsius *y* substituatur & elementa debita ratione integrentur; prodibit distantia centri oscillationis ab axe in terminis ordinariis.

Tab. I. Fig. 9.

PRO-

PROBLEMA 62.

Tab. 1. Fig. 2. 433. *Determinare centrum oscillationis in linea recta AB.*

RESOLUTIO.

Sit $AB = a$, $AD = x$, erit particula infinite parva $DP = dx$, momentum hujus ponduſculi xdx, conſequenter diſtantia centri oſcillationis in parte AD a puncto ſuſpenſionis $A = \int x^2 dx : \int x dx = \frac{1}{3} x^3 : \frac{1}{2} x^2 = \frac{2}{3} x$. Quodſi pro x ſubſtituatur a, prodibit diſtantia centri oſcillationis in recta integra $AB = \frac{2}{3} a$.

SCHOLION.

434. *Hac ratione definitur centrum oſcillationis fili ferrei circa alterum extremum oſcillantis.*

PROBLEMA 63.

Tab. 1. Fig. 9. 435. *Determinare centrum oſcillationis rectanguli RIHS in puncto medio A lateris RI ſuſpenſi & circa axem RI oſcillantis.*

RESOLUTIO.

Si fuerit $RI = SH = a$, $AP = x$, erit $Pp = dx$ & elementum areæ, conſequenter unum ponduſculum $= adx$ & momentum ejus $axdx$ (§. 153). Quare (§. 433) $\int ax^2 dx : \int axdx = \frac{1}{3} ax^3 : \frac{1}{2} ax^2 = \frac{2}{3} x$ indefinite exprimit diſtantiam centri oſcillationis ab axe oſcillationis in ſegmento RCDI. Quodſi igitur pro x ſubſtituatur integri rectanguli altitudo $RS = b$; prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{2}{3} b$.

PROBLEMA 64.

436. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri SAH circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantis.* Tab. 1. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sit altitudo $AE = a$, $AP = x$, $EH = \frac{1}{2} b$, $PV = y$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PV = AE : EH$$

$$x : y = a : \tfrac{1}{2} b$$

$$ay = \tfrac{1}{2} bx$$

$$y = bx : 2a$$

Hinc $\int yx^2 dx = \int \frac{bx^3 dx}{2a} = \frac{bx^4}{8a}$

$$\int yxdx = \int \frac{bx^2 dx}{2a} = \frac{bx^3}{6a}$$

& $\dfrac{\int yx^2 dx}{\int yxdx} = \dfrac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8} x = \frac{3}{4} x$.

Quodſi pro x ſubſtituatur altitudo integra $AE = a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis in triangulo æquicruro ASH a vertice $A = \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} AE$.

PROBLEMA 65.

437. *Determinare centrum oſcillationis trianguli æquicruri SAH circa baſin SH oſcillantis.* Tab. 1. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sint omnia, ut in problemate præcedente, erit PE $= a - x$. Unde

$$\int yx^2dx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x)^2 = \int\left(\tfrac{1}{2}abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}\right) = \tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$$

$$\int yxdx = \int \frac{bxdx}{2a}(a-x) = \int\left(\tfrac{1}{2}bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}\right) = \tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$$

&

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \left(\tfrac{1}{4}abx^2 - \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{8a}\right):\left(\tfrac{1}{4}bx^2 - \frac{bx^3}{6a}\right) = \frac{(24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4)}{96a}:\frac{(6abx^2 - 4bx^3)}{24a}$$

$$= \frac{6a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8abx^3} = \frac{6a - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}.$$

Habemus adeo distantiam centri oscillationis ab axe in segmento SZVH.

Quodsi pro x substituatur a, prodibit distantia centri oscillationis in integro triangulo SAH $= (6a^2 - 8a^2 + 3a^2):(6a - 4a) = \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}$ AE.

PROBLEMA 66.

438. *Determinare centrum oscillationis in triangulo æquicruro* Tab.
SAH, quod filo inflexili & gravitatis I.
experte Ah *suspensum circa* Fig.
axem ri *basi SH parallelum oscillatur.* 9.

RESOLUTIO.

Sit A$h = c$, reliqua sint ut supra (§. 437): erit P$h = c + x$. Unde

$$\int yx^2dx = \int(c+x)^2\frac{bxdx}{2a} = \int\left(\frac{bc^2xdx}{2a} + \frac{bcx^2dx}{a} + \frac{bx^3dx}{2a}\right) = \frac{bc^2x^2}{4a} + \frac{bcx^3}{3a} + \frac{bx^4}{8a} = \frac{24bc^2x^2 + 32bcx^3 + 12bx^4}{96a}$$

$$= \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}$$

$$\int yxdx = \int(c+x)\frac{bxdx}{2a} = \int\left(\frac{bcxdx}{2a} + \frac{bx^2dx}{2a}\right) = \frac{bcx^2}{4a} + \frac{bx^3}{6a} = \frac{6bcx^2 + 4bx^3}{24a}$$

$$= \frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}.$$

$$\frac{\int yx^2dx}{\int yxdx} = \left(\frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{24a}\right):\left(\frac{3bcx^2 + 2bx^3}{12a}\right) = \frac{6bc^2x^2 + 8bcx^3 + 3bx^4}{6bcx^2 + 4bx^3}$$

$= \dfrac{6c^2 + 8cx + 3x^2}{6c + 4x}$, qui est valor di-

stan-

ſtantiæ centri oſcillationis ab axe *ri* in ſegmento trianguli AZV.

Quodſi pro x ſubſtituatur trianguli altitudo AE $= a$, prodibit diſtantia centri oſcillationis ab axe oſcillationis *ri* in triangulo integro SAH $(6c^2 + 8ac + 3a^2) : (6c + 4a)$.

SCHOLION.

439. *Ex unico hoc exemplo intelligitur, quid in caſu ſimili aliarum figurarum factu opus ſit.*

PROBLEMA 67.

440. *Determinare centrum oſcillationis in infinitis parabolis & curvis agnatis circa axem RI baſi SH parallelum oſcillantibus.*

Quoniam (§. 163) $\int xydx = \int x^{(r+n):n}dx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$

erit $\int x^{(r+2n):n}dx = \frac{n}{r+3n} x^{(r+3n):n}$

& $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{(r+2n)\, x^{(r+3n):n}}{(r+3n)\, x^{(r+2n):n}}$

$= \frac{r+2n}{r+3n} x.$

E. gr. In parabola Apolloniana $r = 1$, $n = 2$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{5}{7}$ AE.

In paraboloide cubicali $r = 1$, $n = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{7}{10}$ AE.

In paraboloide biquadratico $r = 1$, $n = 4$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{9}{13}$ AE.

In curva, ad quam $ax^2 = y^3$, $r = 2$, $n = 3$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{8}{11}$ AE.

In curva, ad quam $a^2x^3 = y^5$, $r = 3$, $n = 5$. Ergo diſtantia centri oſcillationis ab axe $= \frac{13}{18}$ AE.

PROBLEMA 68.

441. *Invenire centrum oſcillationis in parabola SAH circa baſin SH agitata.*

RESOLUTIO.

Sit AE $= b$, AP $= x$, MP $= y$; erit $ydx = x^{1:2}dx$, EP $= b - x$ & diſtantia centri oſcillationis $= \int x^{1:2}dx\,(b-x)^2 : \int x^{1:2}dx\,(b-x)$. Quoniam itaque $\int x^{1:2}dx\,(b-x)^2 = \int b^2x^{1:2}dx - \int 2bx^{3:2}dx + \int x^{5:2}dx = \frac{2}{3}b^2x^{3:2} - \frac{4}{5}bx^{5:2} + \frac{2}{7}x^{7:2} = \frac{70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2}}{105}$, & Tab. I. Fig. 9.

$\int x^{1:2}dx\,(b-x) = \int bx^{1:2}dx - \int x^{3:2}dx = \frac{2}{3}bx^{3:2} - \frac{2}{5}x^{5:2} = \frac{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}}{15}$;

erit diſtantia centri oſcillationis

$= \frac{15(70b^2x^{3:2} - 84bx^{5:2} + 30x^{7:2})}{105(10bx^{3:2} - 6x^{5:2})}$

$= \frac{35b^2 - 42bx + 15x^2}{35b - 21x}$

Quodſi fiat $x = b$, erit diſtantia cen-

centri oscillationis totius parabolæ SAH a basi SH

$$= \frac{35b^2 - 42b^2 + 15b^2}{35b - 21b}$$

$$= \frac{8b^2}{14b}$$

$$= \tfrac{4}{7}b = \tfrac{4}{7}\,\mathrm{AE}.$$

PROBLEMA 69.

442. *Invenire centrum oscillationis in infinitis parabolis SAH circa basin SH agitatis.*

RESOLUTIO.

Quoniam pro infinitis parabolis $y^m = x$ (§. 519 *Analys.*);

$$y = x^{1:m}$$

$$ydx = x^{1:m}dx$$

$$x^2ydx = x^{1:m}dx\,(b-x)^2$$
$$= x^{1:m}dx\,(b^2 - 2bx + x^2)$$
$$= b^2x^{1:m}dx - 2bx^{1+1:m}dx + x^{2+1:m}dx$$

$$\int x^2ydx = \frac{m}{m+1}b^2x^{1+1:m} - \frac{2}{2m+1}bx^{2+1:m} + \frac{m}{3m+1}x^{3+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)(2m+1)x^{3+1:m}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)}$$

$$\int xydx = \int bx^{1:m}dx - \int x^{1+1:m}dx$$

$$= \frac{m}{m+1}bx^{1+1:m} - \frac{m}{2m+1}x^{2+1:m}$$

$$= \frac{m(2m+1)bx^{1+1:m} - (m+1)x^{2+1:m}}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{\int x^2ydx}{\int xydx} = \frac{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)b^2x^{1+1:m} - 2m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)bx^{2+1:m} + m(m+1)^3(2m+1)^2x^{3+1:m}}{m(m+1)(2m+1)^2(3m+1)bx^{1+1:m} - m(m+1)^2(2m+1)(3m+1)x^{2+1:m}}$$

$$= \frac{(2m+1)(3m+1)b^2 - (2m+2)(3m+1)bx + (m+1)(2m+1)x^2}{(2m+1)(3m+1)b - (m+1)(3m+1)x}$$

Quodsi fiat $x = b$, cum sit

$$(2m+1)(3m+1) = 6m^2 + 5m + 1$$

(2m+

$(2m+2)(3m+1) = 6m^2+8m+2$
$(m+1)(2m+1) = 2m^2+3m+1$
$(m+1)(3m+1) = 3m^2+4m+1$
reperietur diſtantia centri oſcillationis in infinitis parabolis a baſi SH =

$$\frac{2m^2b^2}{(3m^2+m)b} = \frac{2mb}{3m+1} = \frac{2m}{3m+1} AE.$$

Sit jam $m=2$, prodibit eadnm diſtantia $= \frac{4}{7}$ AE, ut ante (§. 441).

LEMMA 2.

Tab. XVI. Fig. 157. 443. *Si in triangulo quocunque MAN ducitur utcunque recta AP; erit* $AM^2 . PN + AN^2 . PM = AP^2 . MN + PM.PN.MN$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $o=P$ (§. 156 *Geom.*) & ang. MAD=MND (§. 315 *Geom.*), erit AM : AP = ND : NP (§. 267 *Geom.*).

adeoque AM. NP = AP. ND (§. 297 *Arithm.*).

Similiter $u=y$ (§. 156 *Geom.*) & ang. ANM=ADM (§. 315 *Geom.*), conſequenter (§. 267 *Geom.*)

AN : AP = MD : MP

adeoque AN.MP = AP. MD (§. 297 *Arithm.*):

Eſt vero MN. AD = AM. ND + AN. MD (§. 324 *Analyſ.*).

Quare cum ſit AD = AP + PD (§. 86 *Arithm.*); erit etiam MN. AP + MN. PD = AM. ND + AN. MD, conſequenter $MN. AP^2 + MN. PD. AP = AM. ND. AP + AN. MD. AP$ (§. 93 *Arithm.*). Quare cum ſit *per demonſtrata*

ND.AP = AM.NP

MD.AP = AN.MP

atq; AP.PD = MP.PN (§. 381 *Geom.*); erit $MN.AP^2 + MN.MP.PN = AM^2 . NP + AN^2 . MP$. *Q. e. d.*

SCHOLION.

444. *Utimur hoc lemmate in determinando centro oſcillationis in figuris, quæ* in latus agitantur, *hoc eſt, circa axem ad planum figuræ normalem. Ejus enim determinatio difficilior eſt in hoc caſu, quam in præcedente, ubi agitatio fit in planum: quemadmodum videre eſt apud* Hugenium (k). *Calculum differentialem ad hoc negotium applicavit* Jacobus Bernoulli (l). *Nos primum regulam generalem demonſtrabimus eamque deinde ad problemata ſpecialia applicabimus, quemadmodum in caſu præcedente factum.*

PROBLEMA 70.

445. *Determinare centrum gravitatis in figuris in latus agitatis.* Tab. XVI. Fig. 158.

RESOLUTIO.

Ponamus Figuram AMN agitari

S in

(k) in Horolog. oſcillat. part. 4. ſ. 91. & ſeqq.
(l) In Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1703. p. m. 56 327.

in latus, hoc est, ita ut planum figuræ AP si ad axem oscillationis normale. Consideremus primum duo puncta M & N tanquam pondera æqualia, aut sumantur pro punctis potius rectarum MP & PN portiones infinite parvæ; erit eorum centrum gravitatis commune ob MP = PN in P (§. 154), atque adeo pondus in P = M + N (§. 125), consequenter distantia centri oscillationis penduli hujus compositi $= \frac{M.AM^2 + N.AN^2}{(M+N)\,AP}$ (§. 429). Est vero M=N & MP = PN *per hypoth.* Ergo distantia centri oscillationis $= \frac{PN.AM^2 + PM.AN^2}{(M+N)\,AP}$. Est vero $PN.AM^2 + PM.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$ (§. 443), consequenter $M.AM^2 + N.AN^2 = MN.AP^2 + MN.MP.PN$, hoc est, ob M=N, & PM = PN adeoque MN = PM + PN, $\frac{M.AM^2 + N.AN^2}{P.AP} = \frac{P.AP^2 + P.MP.MP}{P.AP}$. Jam cum recta MN in innumera istiusmodi ponduscula resolvi possit, qualia sunt M & N = dp; si PM sumatur variabilis & dicatur y, AP vero x, summa ponduscolorum duorum M & N = dp; erit pro duobus ponduscolis distantia centri oscillationis $\frac{x^2dp + y^2dp}{xdp}$, consequenter pro omnibus ponduscolis secundum rectam MN constitutis distantia centri oscillationis $= \frac{2\int x^2dp + 2\int y^2dp}{2\int xdp} = \frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$. Enimvero cum ponduscula dp sint parallelogrammula, quorum latitudo est differentiale dy, altitudo differentiale abscissæ, adeoque $dp = dxdy$ & dx respectu dy constans est; erit $\int dp = dx \int dy$. Similiter quia y variabilis est respectu x, quod ejus intuitu pro constante habetur; erit $\int x^2dy = x^2y$ & $\int y^2dy = \frac{1}{3}y^3$ & $\int xdy = xy$, consequenter si jam y sumatur pro integra semiordinata PM; erit distantia centri oscillationis in integra figura plana oscillante MAN $= \frac{\int x^2ydx + \int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$. Non alia igitur re opus est, quam ut pro y ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y & y^2.

COROLLARIUM 1.

446. $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ exprimit distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata (§. 432). Quare si distantia centri oscil-

oscillationis in figura in latus agitata desideretur; ad illam nonnisi adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx}$, ubi data vel jam inventa præsupponitur.

COROLLARIUM 2.

447. Liquet etiam hinc, distantiam centri oscillationis in figura in planum agitata & in eadem in latus agitata, siquidem ita visum fuerit, una reperiri posse.

PROBLEMA 71.

Tab. I. Fig. 9. 448. *Determinare centrum oscillationis rectanguli RIHS ex puncto medio A lateris RI suspensi & in latus agitati.*

RESOLUTIO.

Si fuerit RI = SH = a. AP = x. erit distantia centri oscillationis ab axe sive a puncto A pro agitatione in planum = $\frac{2}{3} x$ seu pro integro rectangulo = $\frac{2}{3} b$ &, ob $y = a$, $\int xydx = \int axdx = \frac{1}{2} ax^2$ (§.435) & $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{1}{3} a^3 dx = \frac{1}{3} a^3 x$. Quare $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx}$ seu particula adjicienda, ut prodeat distantia centri oscillationis rectanguli in latus agitati (§.446), = $\frac{2a^3 x}{3ax^2} = \frac{2a^2}{3x}$, seu si porro fiat $x = b$, = $\frac{2a^2}{3b}$. Est igitur distantia quæsita = $\frac{2}{3} b + \frac{2a^2}{3b}$.

PROBLEMA 72.

449. *Determinare centrum oscillationis rectanguli æquicruri SAH ex vertce suspensi & in latus agitati.* Tab. I. Fig. 9.

RESOLUTIO.

Sit altitudo AE = a, AP = x, EH = $\frac{1}{2} b$, PV = y; erit distantia centri oscillationis in planum agitati trianguli = $\frac{3}{4} x$, aut totius trianguli = $\frac{3}{4} a$, $\int yxdx = \frac{bx^3}{6a}$ & $y = \frac{bx}{2a}$ (§.436). Quare $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{b^3 x^3 dx}{24a} = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$, consequenter particula adjicienda $\frac{\int \frac{1}{3} y^3 dx}{\int xydx} = \frac{b^3 x^4}{96a^3} : \frac{bx^3}{6a} = \frac{6ab^3 x^4}{96a^3 bx^3} = \frac{b^2 x}{16a^2}$

Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri ex vertice suspensi & in latus agitati = $\frac{3}{4} x + b^2 x : 16a^2$. Quodsi fiat $x = a$; erit distantia centri oscillationis trianguli æquicruri = $\frac{3}{4} a + \frac{b^2}{16a}$.

PROBLEMA 73.

450. *Determinare centrum oscil-* Tab. I. Fig. 9.

cillationis trianguli æquicruri SAH in medio basis SH suspensi & in latus agitati.

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, erit PE $= a - x$, $\int yxdx = \frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$ & distantia centri oscillationis trianguli in planum agitati $= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$, aut integri trianguli $= \frac{1}{2} a$. Sed $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{b^3 x^4}{96a^3}$ (§.494). Ergo pars addenda $= \frac{24ab^3x^4}{96a^3(abx^2 - 4bx^2)} = \frac{3b^2x^2}{72a^3 - 48a^2x}$ consequenter, si fiat $x = a$, pro triangulo integro $\frac{3a^2b^2}{72a^3 - 48a^3} = \frac{3b^2}{24a} = \frac{b^2}{8a}$. Est igitur distantia centri oscillationis trianguli æquicruri in medio basis suspensi & in latus agitati $= \frac{1}{2} a + \frac{b^2}{8a}$

PROBLEMA 74.

451. *Determinare centrum oscillationis parabolæ ex vertice suspensæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

In Parabola in planum agitata distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{5}{7} x$ &, si parameter $= 1$, $y^2 = x$ adeoque $y^3 = x^{1+1:2}$ & $\int yxdx = \frac{2}{5} x^{5:2}$ (§.440). Quare cum porro sit $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \int \frac{1}{3} x^{3:2} dx = \frac{2}{15} x^{5:2}$; erit pars adjicienda $= \frac{2}{15} x^{5:2} : \frac{2}{5} x^{5:2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Est nempe parameter unitas, adeoque $\frac{1}{3}$ pars tertia parametri: quæ si dicatur b, erit pars adjicienda $= \frac{1}{3} b$. Habemus adeo distantiam centri oscillationis a vertice parabolæ in latus agitatæ $= \frac{5}{7} x + \frac{1}{3} b$.

PROBLEMA 75.

452. *Determinare centrum oscillationis in infinitis parabolis in latus agitatis, & ex vertice suspensis.*

RESOLUTIO.

In infinitis parabolis & curvis agnatis in planum agitatis distantia centri oscillationis a vertice est $\frac{r+2n}{r+3n} x$, $\int xydx = \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n}$ &, quia $y = x^{r:n}$, $y^3 = x^{3r:n}$ (§. 439). Quoniam itaque $\int \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{n}{3(3r+n)} x^{(3r+n):n} = \frac{n}{(9r+3n)} x^{(3r+n):n}$; erit pars adjicienda $= \frac{n}{9r+3n} x^{(3r+n):n} : \frac{n}{r+2n} x^{(r+2n):n} = \frac{r+2n}{9r+3n} x^{(2r-n):n}$. Est itaque di-

stan-

ſtantia centri oſcillationis in infinitis parabolis aliisque curvis in latus agitatis $\frac{r+2n}{r+3n}\,x + \frac{r+2n}{9r+3n}\,x^{(2r-n):n}$.

Quoniam in parabola Apolloniana $r=1$, $n=2$, erit $\frac{r+2n}{r+3n} = \frac{1+4}{1+6} = \frac{5}{7}$, $\frac{r+2n}{9r+3n} = \frac{1+4}{9+6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $\frac{2r-n}{n} = \frac{2-2}{2} = 0$, adeoque $x^{(2r-n):n} = x^0 = 1$. Eſt adeo in parabola Apolloniana diſtantia centri oſcillationis a vertice $\frac{5}{7}x + \frac{1}{3}b$, ſi nempe parameter $= b$, prorſus ut in problemate præcedente (451).

PROBLEMA 76.

453. *Determinare centrum oſcillationis parabolæ ex dimidia baſi ſuſpenſæ & in latus agitatæ.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 9. In parabola SAH circa baſin SH in planum agitata diſtantia centri oſcillationis a baſi eſt $\frac{4}{7}b$, ſeu $\frac{4}{7}$ AE &, ſi parameter $=1$, $y^3 = x^{3:2}$ & $\int xydx = 10bx^{3:2} - 6x^{5:2}$ (§. 441). Quare cum porro ſit $\int \frac{1}{3}y^3dx = \frac{2}{15}x^{5:2}$; erit $\int \frac{1}{3}y^3dx : \int xydx$, ſeu pars addenda $\frac{2x^{5:2}}{10bx^{3:2} - 6x^{5:2}} = \frac{x}{5b-3x}$ $=$ (ſi parameter 1 fiat $= a$) $\frac{ax}{5b-3x}$, conſequenter ſi fiat $x=b$, prodibit pars adjicienda $= \frac{ab}{5b-3b} = \frac{1}{2}a$.

Eſt igitur diſtantia centri oſcillationis parabolæ ex dimidia baſi ſuſpenſæ & in latus agitatæ $= \frac{4}{7}b + \frac{1}{2}a$.

PROBLEMA 77.

454. *Invenire centrum oſcillationis in figuris ſolidis rotatione genitis.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut in formula ſuperiori $\frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp}$ Tab. XVI. Fig. 158. figuris ſolidis convenienter explicetur valor ponduſculi dp. Deſignat autem dp elementum Solidi, quod habetur ducendo in ſe invicem differentialia abſciſſæ PQ & ſemiordinatæ QK atque ſemiordinatam QK. Sit PQ $= y$, AP $= x$, QK $= v$, erit elementum $vdydx$, conſequenter cum $\int vdy$ exprimat ſegmentum PQLN, quod concipitur inſtar ponduſculi in QP collectum, ſi PM ſit $= y$, $\int vdy$ exprimit integrum ſemicirculum in lineam rectam MN collectum inſtar ponderis. Sit adeo ratio radii ad ſemiperipheriam $= r:p$; erit ſemiperipheria radio PM $= y$ deſcripta $= \frac{py}{r}$, conſequenter area ſemicirculi $= \frac{py^2}{r}$, adeoque ponduſculum dp in valore $\int x^2dp$ ſubſtituen-

tuendum $= \frac{py^2dx}{r}$; unde $\int x^2dp = \int \frac{px^2y^2dx}{r} = \frac{p}{r}\int x^2y^2dx$. Quodsi idem valor substituatur in $\int xdp$; reperietur idem $\frac{p}{r}\int xy^2dx$. Substituatur valor ipsius dp etiam in formula y^2dp; erit ponduſculum puncto Q respondens y^2vdydx, consequenter ponduſcula respondentia lineæ $QP = dx\int vy^2dy$. Dicatur radius circuli $PN = t$: erit $v = V(t^2-y^2)$, adeoque $\int vy^2dy = \int y^2dyV(t^2-y^2)$. Est vero $\int y^2dy V(t^2-y^2) = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ (§. 455). Ergo omnia ponduſcula respondentia lineæ QP sunt $\frac{1}{4}t^2dx \int vdy - \frac{1}{4}yv^3dx$. Jam $\int vdy$ exprimit segmentum circuli PQKL, adeoque degenerat in semicirculum radio PM descriptum, quando PQ efficitur ipsi PM æqualis, adeoque $t = y$. In eo igitur casu cum area semicirculi sit $\frac{py^2}{r}$, est $\int \frac{1}{4}t^2dx\int vdy = \frac{py^4dx}{4r}$. Et quoniam in M semiordinata QN evanescit, erit $v = o$, adeoque etiam $\frac{1}{4}yv^3 = o$. Prodit adeo tandem $\frac{\int x^2dp + \int y^2dp}{\int xdp} = \frac{pr\int x^2y^2dx + \frac{1}{4}pry^4dx}{pr\int xy^2dx} = \frac{\int x^2y^2dx + \int\frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx}$, ut adeo in casu speciali non alia re opus sit, quam ut pro y substituatur valor ex æquatione curvæ, vel figuræ, cujus rotatione solidum generatur, quemadmodum problemata sequentia docent.

SCHOLION 1.

455. *Diximus, si t sit constans quantitas & $v = V(t^2-y^2)$, esse $\int vy^2dy = \frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$. Id vero facile probatur, differentiando utrumque integralis membrum: quo facto restituitur differentiale ad integrandum propositum (§. 92. Analyſ. infin.). Quodsi ergo $\frac{1}{4}t^2\int vdy - \frac{1}{4}yv^3$ differentietur, cum t constans sit, prodit $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}v^3dy - \frac{3}{4}yv^2dv$. Jam quia $v = V(t^2-y^2)$ per hypoth. $vdv = -ydy$ & $v^2 = t^2-y^2$. Quare his valoribus in $\frac{3}{4}yv^2dv$ & $\frac{1}{4}v^3dy$ substitutis; differentiale emergit $\frac{1}{4}t^2vdy - \frac{1}{4}t^2vdy + \frac{1}{4}vy^2dy + \frac{3}{4}vy^2dy = \frac{4}{4}vy^2dy = vy^2dy$, quod erat elementum ad integrandum propositum.*

SCHOLION 2.

456. *Quoniam solida rotatione figurarum circa axen fixum genita eodem modo agitantur, in quamcunque partem fiat agitatio; non hic attendenda venit differentia,* qua-

qualem in figuris planis inter agitationem in planum & in latus consideravimus, adeoque in omni casu eadem formula satisfacit.

PROBLEMA 78.

457. *Determinare centrum oscillationis in cylindro ex centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 159. Sit altitudo cylindri AB $= a$, CB $= b$, AP $= x$. Quoniam omnes circuli basi paralleli æquales sunt, erit in cylindro PM $=$ CB, hoc est, $y = b$. Unde habemus (§. 454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4dx$$
$$xy^2dx = b^2xdx,$$

adeoque
$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}b^2x^3$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}b^2x^2$$

Quare distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $= \frac{\frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x}$. Quodsi fiat $x = a$; prodit distantia centri oscillationis pro integro cylindro $\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

SCHOLION.

458. *Equidem* Dechales (m) *centri oscillationis distantiam in Cylindro ex centro basis suspensi tantummodo facit* $\frac{2}{3}a$; *sed ipse non diffitetur suo tempore theoriam centri oscillationis nondum fuisse excultam: immo vix fando quid audiverat de regula* Hugeniana, *quæ in Horologio Oscillatorio demonstratur* (n).

PROBLEMA 79.

459. *Determinare centrum oscillationis in Cono ex vertice suspensi.*

RESOLUTIO.

Si altitudo Coni AC $= a$, radius basis BC $= b$, AP $= x$ PM $= y$; erit $y = bx : a$ (§. 268. *Geom.*). Quare (§. 454). Tab. II. Fig. 15.

$$x^2y^2dx = b^2x^4dx : a^2$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^4x^4dx : a^4$$
$$xy^2dx = b^2x^3dx : a^2$$

adeoque
$$\int x^2y^2dx = b^2x^5 : 5a^2$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = b^4x^5 : 20a^4$$
$$\int xy^2dx = b^2x^4 : 4a^2$$

Distantia igitur centri oscillationis a puncto suspensionis $= \left(\frac{b^2x^5}{5a^2} + \frac{b^4x^5}{20a^4}\right) : \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{4}{5}x + \frac{b^2x}{5a^2}$. Quodsi jam porro fiat $x = a$; prodit distantia centri oscillationis pro cono integro $= \frac{4}{5}a + \frac{b^2}{5a}$.

PROBLEMA 80.

460. *Determinare centrum oscillationis Sphæræ.*

(m) in Mundo Mathem. Tom. 2. Stud. lib. 3. prop. 65. f. m. 321.
(n) vide prop. præc. 64.

RESOLUTIO.

Si diameter sphæræ $= 2r$, erit $y^2 = 2rx - x^2$ (§. 377. *Analyſ.*), adeoque $y^4 = 4r^2x^2 - 4rx^3 + x^4$. Habemus adeo (§. 453).

$$x^2y^2dx = 2rx^3dx - x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = r^2x^2dx - rx^3dx + \tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = 2rx^2dx - x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{2}rx^4 - \tfrac{1}{5}x^5$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{3}r^2x^3 - \tfrac{1}{4}rx^4 + \tfrac{1}{20}x^5$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4$$

Eſt itaque diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $= \frac{\frac{1}{4}rx^4 + \frac{1}{3}r^2x^3 - \frac{3}{20}x^5}{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}$ = (multiplicando per 12 & dividendo per x^3) $\frac{3rx + 4r^2 - \frac{9}{5}x^2}{8r - 3x} = \frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$. Quodſi fiat $x = 2r$, prodit diſtantia centri oſcillationis pro Sphæra integra $\frac{30r^2 + 20r^2 - 36r^2}{40r - 30r} = \frac{14}{10}r = \frac{7}{5}r$. Si pro r ponatur diameter d, quia $d = 2r$, adeoque $\frac{1}{2}d = r$, erit eadem diſtantia $= \frac{7}{10}d$.

COROLLARIUM.

461. Si in formula $\frac{15rx + 20r^2 - 9x^2}{40r - 15x}$ fiat $x = r$; prodit diſtantia centri oſcillationis in hemiſphærio $\frac{15r^2 + 20r^2 - 9r^2}{40r - 15r} = \frac{26r}{25}$, ubi nempe ex vertice fuerit ſuſpenſum.

PROPBLEMA 81.

462. *Determinare centrum oſcillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Si parameter parabolæ genetricis a; erit $y^2 = ax$ (§. 388 *Analyſ.*), adeoque $y^4 = a^2x^2$. Habemus adeo (§. 454).

$$x^2y^2dx = ax^3dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}a^2x^2dx$$
$$xy^2dx = ax^2dx$$

adeoque $\int x^2y^2dx = \frac{1}{4}ax^4$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}a^2x^3$$
$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}ax^3$$

Quamobrem diſtantia centri oſcillationis a vertice $= \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$.

Si diameter baſis fuerit b, & altitudo Conoidis $= c$; erit parameter $= b^2 : c$ (§. 391 *Analyſ.*). Quodſi ergo x degenerat in c; prodit diſtantia centri oſcillationis a vertice in Conoide integro $= \frac{3}{4}c + bb : 4c$.

PROBLEMA 82.

460. *Determinare centrum oſcillationis in omnibus Conoidibus para-*

parabolicis in infinitum circa verticem agitatis.

RESOLUTIO.

Si parameter fuerit 1, pro omnibus parabolis in infinitum erit $y = x^{1:m}$ (§. 519. *Analys.*), adeoque $y^2 = x^{2:m}$ & $y^4 = x^{4:m}$. Habemus itaque (§. 454).

$$x^2y^2dx = x^{2+2:m}dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}x^{4:m}dx$$
$$xy^2dx = x^{1+2:m}dx$$

$$\int x^2y^2dx = \frac{m}{3m+2}x^{2+2:m}$$
$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \frac{m}{4m+16}x^{1+4:m}$$
$$\int xy^2dx = \frac{m}{2m+2}x^{2+2:m}$$

Est igitur distantia centri oscillationis in infinitis Conoidibus parabolicis circa verticem agitatis $\frac{2m+2}{3m+2}x + \frac{2m+2}{4m+16}x^{-1+2:m}$ $= \frac{2m+2}{3m+2}x + \frac{m+1}{2m+8}x^{-1+2:m}$

Ponatur $m = 2$, prodit $\frac{6}{8}x + \frac{3}{12}x^{-0}$, hoc est, ob $x^0 = 1$ (§. 55. *Analys.*), $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Si parameter, quam posuimus $= 1$, fiat a; erit distantia centri oscillationis in Conoide parabolico circa verticem agitato $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a$, prorsus ut ante (§. 462).

PROPLEMA 83.

464. *Determinare centrum oscillationis in Conoide hyperbolico circa verticem agitato.*

RESOLUTIO.

Quoniam planum describens est hyperbola, si axis transversus dicitur a, parameter, b, erit $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ (459. *Analys.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 + \frac{2b^2x^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Habemus igitur (§. 454).

$$x^2y^2dx = bx^3dx + \frac{bx^4dx}{a}$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}b^2x^2dx + \frac{b^2x^3dx}{2a} + \frac{b^2x^4dx}{4a^2}$$
$$xy^2dx = bx^2dx + \frac{bx^3dx}{a}$$

adeoq; $\int x^2y^2dx = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{bx^5}{5a}$

$$= \frac{5abx^4 + 4bx^5}{20a}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{12}b^2x^3 + \frac{b^2x^4}{8a} + \frac{b^2x^5}{20a^2}$$

$$= \frac{160a^2b^2x^3 + 240abx^4 + 96b^2x^5}{12a \cdot 160a^2}$$

= 10

$$= \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{3}bx^3 + \frac{bx^4}{4a}$$

$$= \frac{4abx^3 + 3bx^4}{12a}$$

Prodit itaque

$$\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{3.5abx^4 + 3.4bx^5}{5.4abx^3 + 5.3bx^4}$$

$$= \frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x}$$

$$\frac{\int \frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b^2x^3 + 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{10a.4abx^3 + 10a.3bx^4}$$

$$= \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$$

Est adeo distantia centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico $\frac{15ax + 12x^2}{20a + 15x} + \frac{10a^2b + 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$

Quodsi fiat $x = a$, prodibit distantia Centri oscillationis a vertice in Conoide hyperbolico, cujus altitudo axi transverso æqualis, $\frac{15a^2 + 12a^2}{20a + 15a} + \frac{10a^2b + 15a^2b + 6a^2b}{40a^2 + 30a^2} = \frac{27}{35}a + \frac{31}{70}b$.

PROBLEMA 84.

465. *Determinare centrum oscillationis in sphæroide elliptico ex vertice, seu altero axis majoris extremo suspenso.*

RESOLUTIO.

Si axis transversus fuerit a, parameter b; erit $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ (420. *Analys.*), adeoque $y^4 = b^2x^2 - \frac{2bx^3}{a} + \frac{b^2x^4}{a^2}$. Reperitur adeo, uti in problemate præcedente (§. 464),

$$\int x^2y^2dx = \frac{5abx^4 - 4bx^5}{20a}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{12a \cdot 10a}$$

$$\int xy^2dx = \frac{4abx^3 - 3bx^4}{12a}$$

adeoq; $\frac{\int x^2y^2dx}{\int xy^2dx} = \frac{15ax - 12x^2}{20a - 15x}$

$$\frac{\int \frac{1}{4}y^4dx}{\int xy^2dx} = \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 - 30ax}$$

Est igitur distantia centri oscillationis a vertice $\frac{15ax - 12x^2}{20ax - 15x} + \frac{10a^2b - 15abx + 6bx^2}{40a^2 + 30ax}$.

Quodsi

Quodsi fiat $x=a$, prodit distantia centri oscillationis a vertice pro integro sphæroide circa axem majorem agitato $\frac{15a^2 - 12a^2}{20a - 15a} + \frac{16a^2b - 15a^2b}{40a^2 - 30a^2} = \frac{3}{5}a + \frac{1}{10}b$.

Si fiat axis minor $=c$, erit $b=c^2:a$ (423. *Analys.*), adeoque distantia centri oscillationis in Sphæroide $=\frac{3a}{5} + \frac{c^2}{10a}$.

PROBLEMA 85.

466. *Determinare centrum oscillationis in Cono ex Centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 15. Sit Semediameter basis BC $= b$, CP $= x$, AC $= a$, erit AP $= a-x$, consequenter ob AC : BC = AP : PM (§.327. *Geom.*), PM $= y = (ab - bx) : a = b - bx : a$, $y^2 = b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$ & $y^4 = b^4 - \frac{4b^4x}{a} + \frac{6b^4x^2}{a^2} - \frac{4b^4x^3}{a^3} + \frac{b^4x^4}{a^4}$. Habemus adeo (§.454):

$$x^2y^2dx = b^2x^2dx - \frac{2b^2x^3dx}{a} + \frac{b^2x^4dx}{a^2}$$

$$\frac{1}{4}y^4dx = \frac{1}{4}b^4dx - \frac{b^4xdx}{a} + \frac{6b^4x^2dx}{4a^2} - \frac{b^4x^3dx}{a^3} + \frac{b^4x^4dx}{4a^4}$$

$$xy^2dx = b^2xdx - \frac{2b^2x^2dx}{a} + \frac{b^2x^3dx}{a^2}$$

$$\int x^2y^2dx = \frac{1}{3}b^2x^3 - \frac{b^2x^4}{2a} + \frac{b^2x^5}{5a^2} = \frac{10a^2b^2x^3 - 15ab^2x^4 + 6b^2x^5}{30a^2}$$

$$\int \frac{1}{4}y^4dx = \frac{1}{4}b^4x - \frac{b^4x^2}{2a} + \frac{b^4x^3}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{4a^3} + \frac{b^4x^5}{20a^4}$$

$$= \frac{5a^4b^4x - 10a^3b^4x^2 + 10a^2b^4x^3 - 5ab^4x^4 + b^4x^5}{20a^4}$$

$$\int xy^2dx = \frac{1}{2}b^2x^2 - \frac{2b^2x^3}{3a} + \frac{b^2x^4}{4a^2} = \frac{6a^2b^2x^2 - 8ab^2x^3 + 3b^2x^4}{12a^2}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $\frac{20a^2x - 30ax^2 + 12x^3}{30a^2 - 40ax + 15x^2} + \frac{15a^4b^2 - 30a^3b^2x + 30a^2b^2x^2 - 15ab^2x^3 + 3b^2x^4}{30a^4x - 40a^3x^2 + 15a^2x^3}$

Quodsi

Quodsi fiat $x = a$, erit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in cono integro $= \frac{20a^3 - 30a^3}{30a^2 - 40a^2} + \frac{12a^3}{15a^2} + \frac{15a^4b^2}{30a^5}$ $\frac{-30a^4b^2 + 30a^4b^2 - 15a^4b^2 + 3a^4b^2}{-40a^5 + 15a^5}$ $= \frac{3}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

Si altitudo coni fuerit semidiametro basis æqualis, erit $a = b$, adeoque $b^2 . a = a$. Unde distantia centri oscillationis in Cono rectangulo a puncto suspensionis $\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}a = a$.

PROBLEMA 86.

467. *Determinare centrum oscillationis in hemisphærio ex centro basis suspenso.*

RESOLUTIO.

Quoniam abscissæ hic computantur a centro, si radius circuli sit r, erit $y^2 = r^2 - x^2$ (377. *Analys.*) & $y^4 = r^4 - 2r^2x^2 + x^4$. Habemus itaque (§. 454).

$$x^2y^2dx = r^2x^2dx - x^4dx$$
$$\tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}r^4dx - \tfrac{1}{2}r^2x^2dx + \tfrac{1}{4}x^4dx$$
$$xy^2dx = r^2xdx - x^3dx$$

$$\int x^2y^2dx = \tfrac{1}{3}r^2x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 = \frac{5r^2x^3 - 3x^5}{15}$$

$$\int \tfrac{1}{4}y^4dx = \tfrac{1}{4}r^4x - \tfrac{1}{6}r^2x^3 + \tfrac{1}{20}x^5 = \frac{15r^4x - 10r^2x^3 + 3x^5}{60}$$

$$\int xy^2dx = \tfrac{1}{2}r^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 = \frac{2r^2x^2 - x^4}{4}$$

Est itaque distantia centri oscillationis a puncto suspensionis $\frac{20r^2x - 12x^3}{30r^2 - 15x^2} + \frac{15r^4 - 10r^2x^2 + 3x^4}{30r^2x - 15x^3}$, aut, reductione ad eandem denominationem facta, multiplicando primum membrum per x, $\frac{10r^2x^2 - 9x^4 + 15r^4}{30r^2x - 15x^3}$.

Quodsi fiat $x = r$, prodibit distantia centri oscillationis a puncto suspensionis in hemisphærio integro $= \frac{10r^4 - 9r^4 + 15r^4}{30r^3 - 15r^3} = \frac{16}{15}r$.

SCHOLION.

468. *Non absimili modo inveniri potest centrum oscillationis Conoidis & sphæroidis dimidii ex centro basis suspensi. Potest etiam punctum suspensionis* h *extra figuram assumi, ut distantia pendusculi* P *ab axe oscillationis sit* li *atque ab abscissa figuræ* AP *differat quantitate* Ah, *veluti si figura oscillans ex filo suspendatur: quo in casu* Hugenius *reperit in sphæra ex filo tenui suspensa distantiam centri oscillationis esse longitudinem fili & radium atque duas quintas tertiæ proportionalis ad compositam ex semidiametro sphæræ ac longitu-* Tab. I. Fig. 9.

gitudine fili & semidiametrum ipsum (o). *hoc est, si filum = l, radius = r,* $l + r + \frac{2r^2}{5(l+r)}$

PROBLEMA 87.

469. *Determinare quantitatem pedis horarii.*

RESOLUTIO.

1. Horologium pendulo inter duas semicycloides suspenso & singulas oscillationes singulis minutis secundis aut eorum semissibus absolvente (§. 382) instructum & secunda temporis scrupula indice peculiari monstrans ad motum stellarum ea ratione componatur, quæ inferius in Astronomia exponitur.
2. Globus plumbeus ex filo tenui suspensus (§. 377) leniter impellatur, ut nonnisi exiguos arcus describat, quo singulæ oscillationes sint isochronæ (383) & tamdiu augeatur, vel minuatur fili longitudo, donec oscillationes singulis minutis secundis absolvantur.
3. Quoniam longitudo fili cum radio & duæ quintæ tertiæ proportionalis ad compositam ex semidiametro & longitudine fili atque semidiametrum ipsam definiunt distantiam centri oscillationis ab axe (§. 468); earundem pars tertia quantitatem pedis horarii constituit. (§. 425).

SCHOLION 1.

470. Hugenius (p) *hoc modo invenit, pedem horarium esse ad Parisiensem ut* 881 *ad* 864 *hoc est, longitudo penduli simplicis oscillationes singulas singulis minutis secundis absolventis esse trium pedum Parisiensium cum octo lineis & dimidia. Monet autem pedem Parisiensem ad Rhenanum esse ut* 144 *ad* 139, *hoc est, quinque suis lineis diminui debere, ut alterum relinquat.*

SCHOLION 2.

471. *Quodsi gravitas omnibus in locis eadem esset; pes horarius mensura foret universalis & perpetua, quemadmodum* Hugenius *contendit: sed cum eandem variari nunc constet pro diversa ab æquatore distantia* (§. 390); *nonnisi iis in locis eadem penduli simplicis minuta secunda metientis longitudo, quorum latitudines non nimis discrepant. Quo itaque mensura vere universalis haberetur, opus præterea esset, ut ratio longitudinum penduli prædicti in diversis latitudinibus una determinaretur. Nec hoc forte attentione omni prorsus indignum censeri debet, hactenus nec per experimenta constare, nec demonstratum esse, quod eodem in loco intra amplum temporis intervallum, veluti aliquot seculorum decursum, gravitas non mutetur.*

(o) in Horol. Oscill. part. 4. prop. 22. f. 142.
(p) Horol. Oscillat. part. 4. prop. 25. f. 152 & 153.

THEOREMA 63.

472. *Spatium descensus perpendicularis gravium intra minutum secundum temporis est ad semissem longitudinis penduli simplicis, cujus oscillationes minutis secundis respondent, in ratione duplicata peripheriæ ad diametrum circuli.*

DEMONSTRATIO.

Sit pes horarius ter sumtus seu longitudo penduli simplicis, cujus oscillationes minutis secundis horariis respondent (§. 425) $= a$, tempus descensus per dimidiam illam longitudinem $= t$, altitudo quæsita $= x$, ratio diametri ad peripheriam $= d : p$; erit $t = d:p$ (§. 387). Est vero $t^2 : 1 = \frac{1}{2} a : x$ (87) adeoque $t^2 x = \frac{1}{2} a$, hoc est, si valor ipsius t modo inventus substituatur, $d^2 x : p^2 = \frac{1}{2} a$ seu $d^2 x = \frac{1}{2} ap^2$. Ergo $x : \frac{1}{2} a = p^2 : d^2$. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

473. Quoniam $d:p = 113:355$ (§. 431 *Geom.*) & $a = 3' 8\frac{1}{2}'''$ seu 737 linearum dimidiarum pedis Parisiensis (§. 470); erit $x = ap^2 : 2d^2 = 737 . 126025 : 25538 = 1818''' = 15' 1'' 8'''$ seu $15' 1''$ quam proxime.

SCHOLION.

474. *Hæc cum experimentis accuratissimis prorsus convenire observavit* Hugenius (q).

CAPUT X.
DE
MOTU RROJECTORUM.

DEFINITIO 49.

475. *Grave perpendiculariter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis.

DEFINITIO 50.

476. *Grave horizontaliter projici* dicitur, si impellitur secundum lineam directionis horizontali apparenti parallelam.

DEFINITIO 51.

477. *Grave oblique projici dicitur,* si impellitur secundum lineam directionis, quæ cum horizontali apparente angulum efficit obliquum.

DEFINITIO 52.

478. *Angulus elevationis* RAB est, quem efficit linea directionis corporis Tab. IV. Fig. 50.

(q) in Horolog. Oscillat. part. 4. prop. 25. f. 155.

poris projecti AR cum linea horizontali AB.

THEOREMA 64.

479. *Si corpus grave perpendiculariter projicitur, perpendiculariter ascendit.*

DEMONSTRATIO.

Grave impellitur secundum lineam directionis, quæ ad horizontalem perpendicularis (§. 475). Quare cum gravitas secundum eandem directionem vi impressæ resistat (§. 215); directionem mutare nequit, sed motum tantum retardat (§. 77). Grave igitur perpendiculariter projectum perpendiculariter ascendit (§. 71). *Q. e. d.*

THEOREMA 65.

Tab. IV. Fig. 49. 480. *Si corpus grave horizontaliter projicitur, motu suo parabolam describit in medio non resistente.*

DEMONSTRATIO.

Corpus enim projectum vi impressa uniformiter urgetur secundum rectam AR (§. 71); sed vi gravitatis secundum rectam AC, quæ ad rectam AR lineæ horizontali *ex hypothesi* parallelam perpendicularis (§. 215). Jam si vi impressa corpus pervenisset in Q, vi gravitatis descendit interea per QM adeoque in M reperitur. Quoniam vero motus secundum directionem AR semper est uniformis, *per demonstr.* spatia QA & qA sunt ut tempora (§. 32). Sed spatia QM & qm sunt ut temporum quadrata (§. 80). Est ergo $AQ^2 : Aq^2 = QM : qm$, hoc est, $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$ (257 *Geom.*) Via igitur, quam grave horizontaliter projectum decurrit, AMm est parabola (§. 402. *Analys. fin.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

481. *Equidem cum gravia versus centrum telluris tendant* (§. 213), *recta* QM & qm *in eodem concurrere debent, adeoque parallela non sunt* (§. 82 Geom.). *Enimvero si tota altitudo* AC, *per quam decidit grave secundum directionem* AR *projectum sit exigua admodum pars distantia a centro telluris* (§. 216); *pro parallelis citra errorem experimento ullo definiendum haberi possunt.*

THEOREMA 66.

482. *Si corpus grave oblique sive sursum, sive deorsum projicitur in medio non resistente, motu suo parabolam describit.* Tab. IV. Fig. 50.

DEMONSTRATIO.

I. Sit linea directionis corporis sursum projecti AR. Cum corpus projectum, si gravitatis actio cessaret, eandem uniformiter describeret (§. 71); positis AQ, Qq, qh

qh & *h*R æqualibus erunt AQ & A*q* ut tempora (§. 32). Quodsi AB sit linea horizontalis, & QM, *qm* &c. ita ducantur, ut continuatæ in T, *t* &c. sint ad AB perpendiculares; erunt QM, *qm* &c. altitudines, per quas vi gravitatis descendit interea corpus projectum, dum ex A in Q, *q* &c. pervenisset (§. 215). Quare si AS ducatur ad AB perpendicularis; erit rectis QM, *qm* &c. parallela (§. 256 *Geom.*). Ductis porro PM, *pm* &c. ipsi AR parallelis; erit PM = AQ, *pm* = A*q* &c. AP = QM, A*p* = *qm* &c. (§. 257. *Geom.*), adeoque AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$, (§. 86). Est igitur AMB parabola, cujus diameter AS (§. 416. *Analyf. finit.*). *Quod erat unum.*

Tab. IV. Fig. 51. II. Sit similiter linea directionis corporis deorsum projecti AR in partes æquales AQ, Q*q* &c. divisa & RS linea horizontalis. Ducta AS ad RS perpendiculari & QM, *qm* &c. eidem AS, PM vero, *pm* &c. ipsi AR parallelis: eodem, quo ante, modo demonstratur, esse AP : A*p* = $PM^2 : pm^2$. Quare AM*m* denuo est parabola, cujus diameter AS (§. *cit. Analyf. finit.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

483. Est ergo parameter diametri parabolæ AS tertia proportionalis ad AP & PM, sive QM & AQ. (§. *cit. Analyf. finit.*), hoc est, ad spatium, per quod grave dato tempore descendit, & ad celeritatem spatio, quod vi impressa eodem tempore describit, definiendam (§. 14).

COROLLARIUM 2.

484. Cum spatium uno minuto secundo a gravi quocunque perpendiculariter cadendo confectum notum sit, nempe $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium (§. 472); parameter diametri parabolæ describendæ invenitur, si spatii, quod uno minuto secundo projectile vi impressa percurrit, quadratum per $15\frac{1}{12}$ pedum Parisiensium dividatur (§. 302. *Arithm.*)

COROLLARIUM 3.

485. Si ergo velocitas projectorum eadem, spatia eodem tempore vi impressa descripta æqualia sunt (§. 33), consequenter eadem parabolarum, quas motu composito percurrunt, parameter invenitur (§. 177. *Arithm.*)

COROLLARIUM 4.

486. Si a parametro diametri subtrahatur ipsius altitudinis AP quadruplum, parameter axis relinquitur (§. 416. *Analyf. finit.*), cujus quarta pars est distantia verticis axis a foco parabolæ (§. 396. *Analyf. finit.*). Parabola igitur describi potest, data celeritate projectorum (§. 400. *Analyf. finit.*) & §. 484. *Mech.*)

COROLLARIUM 5.

487. Linea directionis projectilis AR para-

parabolam in A tangit (§. 414. 415. *Analyſ. finit.*)

DEFINITIO 53.

488. *Semita* eſt parabola, quam corpus horizontaliter vel oblique projectum deſcribit.

DEFINITIO 54.

Tab. IV. Fig. 50. 489. *Amplitudo* (ſcilicet ſemitæ) eſt recta horizontalis AB ſemitam AMB ſubtendens.

THEOREMA 67.

490. *Projectile temporibus æqualibus per æqualia ſpatia horizontalia defertur.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMB ſemita, AB amplitudo ejus, AR linea directionis projectilis in partes æquales AQ, Qq &c. diviſa. Demittantur perpendiculares QT, *qt*, &c. erunt AT, T*t* &c. ſpatia horizontalia, per quæ projectile defertur, dum partes ſemitæ AM, M*m*, &c. percurrit. Quoniam projectile vi ſola impreſſa uniformiter deſcriberet rectas AQ, Qq &c. (§. 71); AQ, Qq &c. ſunt ut tempora (§. 31). Eſt vero AQ:Q*q*=AT:T*t* (§. 268. *Geom.*). Ergo AT & T*t* ſunt ut tempora, conſequenter temporibus æqualibus etiam AT & T*t* æquantur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 88.

491. *Dato angulo elevationis* RAB *una cum amplitudine* AB, *invenire parametrum diametri* AS *ſemitæ* AMS.

RESOLUTIO.

Sit ſinus anguli elevationis $= a$, coſinus $= b$, ſinus totus $= t$, amplitudo AB $= c$, parameter $= x$. Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis RAB (§. 3. 11. *Trigon.*) adeoque

$$b : a = AB : BR$$
$$b : a = c : \frac{ac}{b}$$

Eſt itaque BR = AS (§. 257. *Geom.*) $= ac : b$.

Porro $b : t = AB : AR$

$$b : t = c : \frac{tc}{b}$$

Eſt itaque AR = SB (§. cit) $= tc : b$.

Quare ob $x \cdot AS = SB^2$ (§. 416. *Analyſ. finit.*)

$$acx : b = c^2t^2 : b^2$$
$$ax = ct^2 : b$$
$$x = ct^2 : ab$$

Æquatio penultima in hanc reſolvitur analogiam $a : \frac{t^2}{b} = c : x$. Eſt

vero $\frac{t^2}{b}$ secans anguli elevationis RAB (§. 26. *Trigon.*). Habemus itaque sequens

Theorema, Amplitudo semitæ AB est ad parametrum diametri AS ut sinus anguli elevationis RAB, ad ejus secantem.

COROLLARIUM I.

492. Quoniam $ax = ct^2 : b$ (§. 491), adeoque $2ax = 2ct^2 : b$ (§. 93. *Arithm.*) erit etiam $2abx : 2t^2 = c$, consequenter $t : 2ab = \frac{1}{2} x : c$. Est vero $\frac{2ab : t}{t}$ sinus dupli anguli elevationis BAR (§. 325. *Analys. finit.*). Ergo semiparameter est ad amplitudinem AB ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

493. Si eadem projectorum celeritas, parameter eadem est (§. 485). Quare cum sit semiparameter semitæ in uno casu ad amplitudinem ut sinus totus ad sinum dnpli anguli elevationis, & semiparameter semitæ in altero casu ad amplitudinem ut sinus totus ad sinum dupli anguli elevationis (§. 492); amplitudines sunt ut sinus angulorum duplorum elevationis, celeritate projectorum existente eadem, (§. 196. *Arithm.*) & ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem in hoc casu constans est (§. 173. *Arithm.*).

THEOREMA 86.

494. *Si eadem maneat projectilis celeritas, amplitudo* AB *maxima est sub angulo elevationis 45°: æquales vero sunt amplitudines sub angulis elevationis a semirecto æqualiter differentibus.*

DEMONSTRATIO.

Cum ratio sinus anguli dupli elevationis ad amplitudinem constans sit, celeritate projectilis existente eadem (§. 493); crescente sinu anguli dupli elevationis crescit amplitudo. Quare cum sinus anguli elevationis 45° dupli sit radius, quo major sinus non datur; maxima sit necesse est amplitudo sub sinu anguli elevationis 45°. *Quod erat unum.*

Jam cum idem sit sinus angulorum a recto æqualiter differentium, e. gr. 80° & 100° (§. 5. *Trig.*), anguli autem dupli a recto æqualiter differant, si simpli a semirecto differant æqualiter; amplitudines eo in casu æquales sint necesse est (§. 493). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

495. Quoniam ut sinus totus ad sinum anguli elevationis dupli ita semiparameter ad amplitudinem (§. 492) & sinus totus sinui anguli elevationis dupli æqualis, si is 45°; sub angulo elevationis 45° amplitudo semiparametro æquatur.

PRO-

PROBLEMA 89.

496. *Data amplitudine maxima, determinare amplitudinem sub angulo elevationis alterius cujuscunque, celeritate manente eadem.*

RESOLUTIO.

Quoniam sinus totus est sinus dupli anguli elevationis, quando amplitudo maxima (§. 494); fiat ut sinus totus ad sinum anguli dupli elevationis cujuscuuque alterius; ita amplitudo maxima ad quæsitam (§. 493).

E. g. Sit jactus maximus, seu semirectus alicujus tormenti 6000 passuum & quæratur longitudo jactus graduum 30. Reperietur is 5196 passuum.

Log. sin. tot.	100000000
Log. sin. 60	99375306
Log. 6000	37781512
Log. quæs.	437156818,

cu in tabulis respondent 5196.

PROBLEMA 90.

497. *Data celeritate projectilis invenire amplitudinem maximam.*

RESOLUTIO.

Cum celeritas projectilis detur per spatium, quod vi impressa dato tempore, e. gr. uno secundo minuto, percurrere valet; non alia re opus est, quam ut parameter semitæ inveniatur (§. 484). Hujus enim semissis est amplitudo quæsita (§. 495).

E. gr. Sit ea projectilis celeritas, qua intra unum minutum secundum 1000 pedes Parisienses seu 12000″ conficere valeat. Quodsi itaque 144000000 per 181 dividas, prodibit parameter semitæ maximæ 795580″ seu 66298 pedum. Ergo amplitudo maxima 33149. Quæ adeo intra hunc terminum constituta sunt, projectile attingere potest.

PROPBLEMA 91.

498. *Data amplitudine maxima invenire celeritatem projectilis seu spatium horizontale intra minutum secundum conficiendum.*

RESOLUTIO.

Cum duplum amplitudinis maximæ sit parameter semitæ (§. 495); inter duplum amplitudinis maximæ & spatium, quod intra minutum secundum conficit grave perpendiculariter cadendo, nempe 181 digitorum, qualium 12 est pes Parisiensis, quæratur numerus medius continue proportionalis (§. 302) *Arithm.* Is enim erit spatium a projectili intra unum minutum secundum conficiendum (§. 495)

Si amplitudo maxima 500 pedum Parisiensium; erit parameter maxima 1000 pedum seu 12000 digitorum & hinc spatium quæsitum $= \sqrt{(12000.181)}$ $= 120$ pedum Parisiensium cum 9 unciis seu digitis.

PROBLEMA 92.

Tab. IV. Fig. 50. 499. *Determinare altitudinem maximam* tm, *ad quam grave oblique projectum ascendit.*

RESOLUTIO.

Sit AB = a, BR = b, AT = x; erit $AR^2 = SB^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Porro (§. 268 *Geom.*)

$$AB : BR = AT : TQ :$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Et (§. 416 *Analyſ. finit.*)

$$SB^2 : AQ^2 = BR : QM.$$
$$a^2 + b^2 : \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} = b : \frac{bx^2}{a^2}$$

Quare $TM = bx : a - bx^2 : a^2$. Cum vero *tm* ſit maximum aliquod, *per hypoth.* erit (§. 63 *Analyſ. infinit.*)

$$bdx : a - 2bxdx : a^2 = 0$$
$$ab - 2bx = 0$$
$$ab = 2bx$$
$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Theorema. Si amplitudo AB bifariam dividatur in *t* & ex puncto *t* erigatur perpendicularis *tm*; erit *tm* altitudo maxima, ad quam grave juxta directionem AR projectum aſcendit.

THEOREMA 69.

500. *Si altitudo maxima* tm, *ad quam grave juxta directionem* AR *projectum aſcendit, continuetur usque ad lineam directionis AR; erit recta* qm *inter ſemitam* AmB *& lineam directionis* AR *intercepta eidem æqualis: &, ſi in extremitate ſemitæ erigatur perpendicularis* BR, *erit* tm = ¼ BR.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB : At = AR : Aq (§. 268 *Geom.*), & At = ½ AB (§. 498); erit etiam Aq = ½ AR. Eſt vero $AR^2 : Aq^2 = BR : qm$ (§. 416 *Analyſ. fin.*). Quare cum $Aq^2 = \frac{1}{4} AR^2$, *per demonſtrat.* erit quoque $qm = \frac{1}{4}$ BR. *Quod erat unum.*

Sed, ob AB : At = BR : tq (§. 268 *Geom.*) & At = ½ AB (§. 498) tq = ½ BR, hinc ½ tq = ¼ BR. Eſt vero qm = ¼ BR *per demonſtr.* Ergo $qm = \frac{1}{2} tq$ (§. 87. *Arithm.*). = *tm*. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 93.

501. *Data amplitudine* AB *& angulo elevationis* BAR, *determinare altitudinem jactus maximam* tm.

RESOLUTIO.

Si AR ſumatur pro ſinu toto, erit BR ſinus, AB coſinus anguli elevationis BAR (§. 3. 11. *Trigon.*) Quare ſi fiat ut coſinus anguli elevationis ad ſinum ejusdem ita ampli-

plitudo AB ad quartum; reperietur BR, cujus quarta pars est altitudo jactus maxima *tm* (§. 499).

COROLLARIUM.

502. Quoniam data celeritate projectilis amplitudo maxima (§. 497) & inde porro amplitudo sub angulo elevationis quocunque invenitur (§ 496); data celeritate, maxima quoque jactus altitudo inveniri potest (§. 501).

THEOREMA 70.

Tab. IV. Fig. 50. 503. *Altitudo jactus* tm *est ad octavam parametri partem ut sinus versus anguli dupli elevationis ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Sit sinus anguli elevationis BAR $= a$, cosinus $= b$, sinus totus $= t$ parameter $= x$; erit amplitudo AB $= abx : t^2$ (§. 496) & (§. 501).

$$b : a = AB : BR$$
$$b : a = \frac{abx}{t^2} : \frac{a^2 x}{t^2}$$

Ergo $tm = \frac{1}{4} BR$ (§. 500) $= a^2 x : 4t^2 = 2a^2 x : 8t^2$. Est vero $(b^2 - a^2) : t$ cosinus anguli dupli elevationis (§. 325. *Analys. finit.*) & hinc sinus versus ejusdem anguli dupli $t - (b^2 + a^2) : t$ (§. 2. *Trigon.*) $= (t^2 - b^2 + a^2) : t$ consequenter ob $t^2 - b^2 = a^2$ (§. 16 *Trig.*), idem sinus versus $= 2a^2 : t$. Est adeo ut t sinus totus ad $2a^2 : t$ sinum versum anguli dupli elevationis, ita $\frac{1}{8}x$ octava parametri pars ad altitudinem *tm*. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. 1.

504. Quoniam ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in uno casu, ita octava parametri pars ad altitudinem jactus & ut sinus totus ad sinum versum anguli dupli elevationis in altero quocunque casu, ita octava parametri pars ad altitudinem (§. 503), velocitate autem existente eadem parameter quoque in diversis angulis elevationis eadem est (§. 484); erunt altitudines jactuum sub diversis angulis elevationum ut sinus versi eorundem angulorum duplorum (§. 196. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

505. Si sinus anguli elevationis in uno casu a, in altero c, velocitate existente eadem, altitudines jactuum sunt ut $a^2 x : 4t^2$ ad $c^2 x : 4t^2$ (§. 503), hoc est, ut a^2 ad c^2 (§. 181 *Arithm.*), adeoque in ratione duplicata sinuum angulorum elevationum.

PROBLEMA 94.

506. *Data celeritate projectilis, altitudine feriendi* In *& ejus distantia horizontali* AI, *invenire jactus angulum elevationis.*

RESOLUTIO.

Cum data celeritate projectilis parameter diametri AS detur (§. 483); sit ea $= a$. Sit præterea I$u = b$, AI $= c$, sinus totus $= t$, tangens anguli quæsiti $= x$. Quodsi

AI sumatur pro sinu toto, erit hI tangens anguli hAI (§.7 *Trigon.*). Est itaque

$$t : x = AI : Ih$$
$$t : x = c : \frac{cx}{t}$$

Ergo $hn = Ar = cx : t - b$ & $rn^2 = acx : t - ab$ (§. 416 *Anal. fin.*). Est vero etiam $rn^2 = Ah^2 + Ih^2$ (§. 417 *Geom.*) $= c^2 + c^2x^2 : t^2$. Quare

$$c^2 + c^2x^2 : t^2 = acx : t - ab$$
$$c^2x^2 : t^2 - acx : t = -ab - c^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 \qquad \frac{1}{4}a^2$$
$$c^2x^2 : t^2 - acx : t + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - ab - c^2$$
$$cx : t - \frac{1}{2}a = V(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)$$
$$cx : t = \frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)$$
$$x = [\frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)]t : c$$

Est igitur ut c ad $\frac{1}{2}a + V(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)$ ita sinus totus t ad tangentem anguli elevationis quæsitum RAB.

COROLARIUM I.

507. Si $ab + c^2 = \frac{1}{4}a^2$ seu $\frac{1}{4}a = b + c^2 : a$ erit $x = at : 2c$, adeoque in hoc casu est $2c : a = t : x$, hoc est, ut dupla distantia objecti feriendi AI ad parametrum, ita sinus totus ad tangentem anguli elevationis.

COROLLARIUM 2.

508. Si $ab + c^2 > \frac{1}{4}a^2$; $V(\frac{1}{4}a^2 - ab - c^2)$ radix imaginaria evadit (§. 71 *Anal. finit.*), adeoque valor ipsius x est impossibilis (§. *cit.*) Quare in hoc casu data celeritate objectum attingi nequit.

THEOREMA 71.

509. *Tempora jactuum sub diversis elevationis angulis, velocitate existente eadem, sunt ut sinus angulorum elevationis.*

DEMONSTRATIO.

Si sinus totus $= t$, sinus anguli elevationis BAR $= a$, cosinus $= b$, parameter semitæ $= x$; erit secans anguli elevationis $= t^2 : b$, adeoque $\frac{t^2}{b} : a = x :$ AB (§. 491), consequenter AB $= abx : t^2$. Quare cum sit (§. 33 *Trigon.*) Tab. IV. Fig. 50.

$$b : t = AB : AR$$
$$b : t = \frac{abx}{t^2} : \frac{ax}{t}$$

adeoque AR $= ax : t$; erit ut sinus totus t ad sinum anguli elevationis in casu uno ita parameter ad AR & ut sinus totus ad sinum anguli elevationis in casu alio ita parameter ad AR in casu alio. Quoniam vero celeritas in utroque casu eadem, *per hypoth.* parameter quoque eadem est (§. 485). Ergo ut sinus angulorum ele-

elevationis ita sunt rectæ AR in diversis elevationum angulis (§. 196 *Arithm.*. Enimvero rectæ AR sunt spatia, quæ projectilia eadem celeritate uniformiter describunt, cessante gravitatis actione (§. 71) Tempora igitur jactuum sunt ut ista spatia (§. 32), consequenter ut sinus angulorum elevationis. *Q. e. d.*

PROBLEMA 95.

510. *Data celeritate projectilis una cum angulo elevationis* RAB, *invenire amplitudinem* AB, *altitudinem jactus* tm *& semitam* AmB *describere.*

RESOLUTIO.

1. Ad rectam horizontalem AB erigatur perpendicularis AD, quæ sit altitudo, unde projectile cadendo celeritatem datam acquirere valet (§. 92).
2. Super AD describatur semicirculus AQD, lineam directionis AR secaturus in Q.
3. Per Q ducatur ipsi AB parallela C*m* fiatque CQ = Q*m*.
4. Ex puncto *m* demittatur ad AB perpendicularis *mt*.
5. Denique per verticem *m* describatur parabola A*m*B parametro 4CD. (§. 393. *Analys. fin.*)

Dico hanc esse semitam quæsitam, 4CQ ejus amplitudinem & *tm* jactus altitudinem.

DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad C & *m* sint recti *per constr.* & verticales ad Q æquales (156. *Geom.*), sit etiam CQ = Q*m per constr.* erit *qm* = AC (§. 251. *Geom.*). Est vero *t m* = AC (§. 257 *Geom.*). Ergo *qm* = *mt* (87. *Arithm.*) consequenter *tm* est altitudo jactus (§. 500) & projectile parabolam A*m*B describit, cujus adeo amplitudo AB = 2 A*t* (§. 499) = 2 C*m* = 4 CQ, ob CQ = Q*m per constr.* *Quod erat primum, secundum & tertium.*

Denique quia A*t* = C*m* (§ 257 *Geom.*) = 2 CQ: $At^2 = 4CQ^2$. = 4 DC. AC (§. 327. 377. *Geom.*) = 4 DC. *t m per demonstr.* Ergo 4 DC est parameter parabolæ in vertice *m* (§. 388. *Analys. finit.*). *Quod erat ultimum.*

COROLLARIUM 1.

511. Data igitur projectilis celeritate, dantur amplitudines & altitudines omnium jactuum, qui fieri possunt, eadem opera. Ducta enim EA, erit sub angulo elevationis EAB altitudo AI, amplitudo 4IE; sub angulo elevationis FAB altitudo AH, amplitudo 4HF (§. 510).

CORLLARIUM 2.

512. Cum AB sit ad AD perpendicularis, *per hypoth.* circulum in A tangit (§. 304.

(§. 304. *Geom.*). & hinc angulus ADQ angulo elevationis RAB æqualis (§. 323. *Geom.*). consequenter AIQ est duplus anguli elevationis (§. 313. *Geom.*). Est itaque CQ quarta pars amplitudinis (§. 510) sinus rectus; AC altitudo jactus (§. *cit.*) sinus versus anguli dupli elevationis (§. 2. *Trigon.*).

SCHOLION.

513. *Hinc facili opera deducuntur, quæ supra per analysin invenire docuimus, ut ejus in hisce usum ostenderemus.*

PROBLEMA 96.

Tab. IV. Fig. 50. 514. *Data altitudine jactus* tm *aut amplitudine* AB, *una cum angulo elevationis* RAB *invenire projectilis celeritatem, qua ab initio fertur, hoc est, altitudinem* AD, *unde cadendo istiusmodi celeritatem acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Cum AC = *tm* sit sinus versus, CQ = ¼ AB (§. 511) sinus rectus anguli AIQ (§. 2. *Trig.*), quem esse anguli elevationis RAB duplum ex demonstratione problematis 95 (§. 510) constat: quæratur ad sinum versum anguli dupli elevationis, sinum totum & altitudinem jactus: vel ad sinum rectum anguli dupli elevationis, sinum totum & quartam amplitudinis partem numerus quartus proportionalis: erit is radius IQ sive IA, cujus duplum AD est altitudo quæsita (§. *cit.*).

SCHOLION.

515. *Potuisset quoque curva projectionis analytice investigari & quidem in omni gravitatis hypothesi possibili: quod ut appareat, sequens subjungere lubet problema.*

PROBLEMA 97.

516. *Invenire curvam projectionis, directionibus gravium suppositis parallelis, in medio non resistente.*

RESOLUTIO.

I. Ponamus corpus grave horizontaliter projici secundum directionem AR, AMm esse curvam projectionis, AQ abscissam, Q*m* semiordinatam, aut, si mavis AP abscissam, PM semiordinatam. Sit AP = QM = *x*, AQ = PM = *y*. Intelligatur semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua: erit arculus curvæ infinite parvus M*m* = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, adeoque M*m*² = $dx^2 + dy^2$ (§. 144. *Analys. infin.*) Quoniam projectile in medio non resistente movetur *per hypoth.* motus, quo vi impressa movetur, æquabilis (§. 71). Porro cum grave, dum motu composito per M*m* fertur (§. 241), per spatiolum infinite pavum MO = P*p* descendens isto tempusculo etiam æqualiter mo- Tab. IV. Fig. 49.

vea-

veatur; erit tam MO, quam Om in ratione composita celeritatis & temporis (§. 34). Quodsi ergo ponamus AQ sive PM exponere tempus (§. 31); erit tempusculum, quo projectile per arculum Mm defertur, $= dy$. Fiat celeritas projectili impressa, quæ constans est, 1: erit Om ut dy. Sit porro celeritas a gravi cadendo in M acquisita $= v$; erit MO ut vdy. Habemus itaque Mm^2 ut $dy^2 + v^2 dy^2$, consequenter

$$dy^2 + v^2 dy^2 = dy^2 + dx^2$$

adeoque $v^2 dy^2 = dx^2$

$$vdy = dx$$

$$dy = dx : v$$

$$y = \int v^{-1} dx$$

Data igitur celeritate v a gravi in M acquisita per x; reperietur æquatio ad curvam projectionis.

Jam in hypothesi *Galilæi* $v = \sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 87).

Ergo $dy = x^{-1:2} dx$

hoc est, $y = \frac{1}{2} x^{1:2} = 2\sqrt{x}$

$$y^2 = 4x$$

Est ergo in hypothesi *Galilæana* Curva projectionis parabola, cujus parameter 4. (§. 388 *Anal. fin.*): quemadmodum superius demonstratum (§. 480). Quoniam $x : y = y : 4$, hoc est, AP : PM = PM : 4, sive QM : AQ = AQ : 4; parameter curvæ projectionis est tertia proportionalis ad spatium, quod in tempore quocunque grave cadendo conficit, & spatium, quod vi impressa describit: quemadmodum supra reperimus (§. 480).

Sit in hypothesi *Baliana* v ut x; erit

$$dy = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$$

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

$$= lx \text{ (§. 243. Analys. infin.)}$$

Sunt igitur abscissæ AQ, Aa &c. ut logarithmi semiordinatarum QM, *qm* &c. consequenter curva projectionis est Logarithmica, cujus subtangens = 1 (§. 553. *Analys. finit.*)

II. Quodsi directio AR fuerit ad horizontem AB obliqua, seu si grave oblique projiciatur (§. 477), eodem modo solutio procedit. Ducatur *pm* ipsi AR parallela & intelligatur alia eidem infinite propinqua. Fiat Tab. IV. Fig. 50.

$Aq = pm = y$, $qm = Ap = x$; erit arculus infinite parvus curvæ projectionis semiordinatis istis interceptus $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, adeoque quadratum ejusdem $= dx^2 + dy^2$ ut ante. Sit celeritas constans, qua mobile fertur $= 1$. celeritas vero per $qm = Ap$ acquisita $= v$; tempusculo per arculum infinite parvum consumto in spatiolis dy & dx erit $dy : dx = 1 : v$ (§. 38), adeoque in hypothesi *Galilæi* $dy : dx = 1 : x^{1:2}$. Prodit igitur ut ante

$$\frac{dx}{x^{1:2}} = x^{-1:2}\,dx = dy$$

$$2x^{1:2} = 2\sqrt{x} = y$$

$$4x = y^2$$

Unde patet in hoc quoque casu curvam projectionis esse parabolam, quemadmodum supra ostendimus (§. 482).

SCHOLION.

517. *Supposuimus directiones parallelas, propterea quod lineæ in centro Telluris concurrentes pro parallelis haberi possunt citra errorem assignabilem in iis distantiis, in quibus experimenta capere licet. Quod si tamen desideraveris problema solvi in hypothesi linearum directionis convergentium; solutionem dudum dedit Vir summus* Nevtonus (r): *dederunt deinde Geometræ celeberrimus* Hermannus (s) *aliique ab eodem laudati* (t). *Nos sequentem subjungimus, ne quid in hoc argumento desiderari possit.*

PROBLEMA 98.

518. *Invenire curvam projectionis in hypothesi gravitatis cujuscunque directionibus in centro Telluris convergentibus.*

RESOLUTIO.

Sit curva projectionis AMR & Tab. XVI.
linea directionis ex centro Telluris C ducta CN. Intelligatur Cn radius ipsi CN infinite propinquus, Fig. 160.
radio CA = CN = Cn descripto arcu AB. Ducantur porro radiis CM & Cm arcus concentrici PM & pm. Sit denique AH altitudo, per quam grave cadendo acquirit eam celeritatem, qua vi impressa movetur, ac deinde per curvam AMR descendat vi impressa & velocitate vi gravitatis quomodocunque accelerata. Dicatur jam AH $= a$, AP $= x$, AC $= b$, arcus AN $= y$; erit Pp = RM $= dx$, N$n = dy$, PC = MC = mC (§. 4. *Analys. infin.*) $= b - x$. Porro propter sectores

(r) in Princip. Philos. natur. Mathem. prop. 41, lib. 1.
(s) in Phoronomia lib. 1. prop. 23. §. 162.
(t) loc. cit. §. 164.

res similes CNn & CRm, erit (§. 131. 412. *Geom.*).

$$CN : Cm = Nn : Rm$$
$$b : b-x = dy :$$

adeoque $Rm = (b-x)\ dy : b$

$$mR^2 = (b-x)^2\ dy^2 : b^2$$
$$MR^2 = dx^2$$

$$Mm^2 = \frac{b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2}{b^2}$$

Sit jam celeritas, qua projectile urgetur per MR vi gravitatis, seu quæ cadendo per altitudinem AP acquiritur $= z$; altera vero, qua per arculum mM motu composito fertur, seu quæ cadendo per HP acquiritur $= v$. Quoniam in spatiolis infinite parvis Mm & RM motus æquabilis; MR : Mm = z : v (§. 33), consequenter

$MR^2 : Mm^2 = z^2 : v^2$ (§. 260 *Arithm.*)

hoc est, $dx^2 : \frac{b^2dx^2 + (b-x)^2\ dy^2}{b^2} = z^2 : v^2$

$$b^2dx^2 : b^2dx^2 + (b-x)^2dy^2 = z^2 : v^2$$

$$v^2b^2dx^2 = b^2z^2dx^2 + (b-x)^2\ z^2dy^2$$

$$v^2b^2dx^2 - b^2z^2dx^2 = (b-x)^2z^2dy^2$$

$$bdx\sqrt{(v^2-z^2)} = zdy\ (b-x)$$

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(v^2-z^2)}}{z(b-x)}$$

$$y = \int \frac{bdx\sqrt{(v^2-z^2)}}{z\ (b-x)}$$

Quodsi jam valor ipsius v atque z exprimatur per x ex hypothesi gravitatis; prodibit æquatio ad curvam projectionis specialem.

In hypothesi *Galileana* $v = \sqrt{HP} = \sqrt{(a+x)}$ & $z = \sqrt{AP} = \sqrt{x}$ (§. 87). Substitutis itaque hisce valoribus in æquatione differentiali generali; prodit specialis

$$dy = \frac{bdx\sqrt{(a+x-x)}}{(b-x)\sqrt{x}}$$
$$= \frac{bdx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}}$$

Pendet adeo *constructio* hujus curvæ a Quadratura alterius curvæ, cujus abscissa x, semiordinata vero $ab\sqrt{a} : (b-x)\sqrt{x} = a^2b : (b-x)\sqrt{ax}$. Nimirum si Areæ hujus curvæ dividuntur per a, seu rectam AH, unde projectile acquirit celeritatem, qua a vi impressa movetur; prodeunt arcus respondentes HN eo modo, quem jam exposuimus, cum de curva isochrona in hypothesi directionum in centro Telluris convergentium ageremus (§. 336).

bdx

336). Constructur autem Curva, a cujus quadratura pendet constructio Curvæ projectionis, ope parabolæ circa axem AC parametro AH descripta, ut semiordinata abscissæ AP respondens sit $\sqrt{ax} =$ PS. Est enim ut PS ad AH ita AH ad tertiam proportionalem & ut CP ad CA ita tertia hæc proportionalis ad semiordinatam Curvæ quadrandæ.

Fiat $b = \infty$: quo in casu directiones gravium evadunt parallelæ; erit x respectu $b = o$, adeoque $b - x = b$, consequenter

$$dy = \frac{b\,dx\sqrt{a}}{(b-x)\sqrt{x}} = \frac{b\,dx\sqrt{a}}{b\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = a^{1:2}x^{-1:2}dx$$

$$y = 2a^{1:2}x^{1:2} = 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = 4ax$$

Est igitur curva projectionis in hoc casu parabola (§. 388. *Analys. fin.*), quemadmodum ante reperimus (§. 516) & parameter $4a$ est quadrupla altitudinis AH, unde cadendo projectile eam acquirit celeritatem, qua projicitur, prouti supra demonstratum fuit (§. 510).

SCHOLION.

519. *Curva projectionis* Trajectoria *appellari solet, qua denominatione quoque utitur* Nevvtonus.

CAPUT XII.

DE

MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE.

DEFINITIO 55.

520. *Corpus perfecte durum* est, quod ab ictu figuram non mutat.

DEFINITIO 56.

521. *Corpus molle* est, quod ab ictu figuram pristinam amittit, ut argilla, sebum, cera.

DEFINITIO 57.

522. *Corpus elasticum* est, quod ab ictu figuram quidem mutat, sed vi propria in eandem rursus restituitur

tuitur

tuitur. Talis est ensis, qui ad ictum incurvatur, sed statim resilit in figuram pristinam.

DEFINITIO 58.

523. *Corpus unum in alterum directe impingere* dicitur; si impingit secundum rectam ad contactum perpendicularem.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 53. 524. *Sphæra igitur A directe in alteram B impingit, si linea directionis centra B utriusque jungit (§. 38. Analys. infinit.)*

DEFINITIO 59.

526. *Corpus unum in alterum indirecte* vel *oblique impingere* dicitur, si impingit secundum rectam ad contactum obliquam.

DEFINITIO 60.

527. *Centrum percussionis* est punctum, in quo ictus est maximus.

AXIOMA 8.

528. *Actioni æqualis, sed contraria est reactio.*

SCHOLION.

529. *Hoc legum motus principium ab experientia petitur & a celeberrimo* Newtono (u) *his exemplis illustratur.* „ Si quis, inquit, lapidem digito premit, „ premitur & hujus digitus a lapide. Si „ equus lapidem funi allegatum trahit, „ retrahetur etiam & equus æqualiter „ in lapidem: nam funis utrinque di„ stentus eodem relaxandi se conatu „ urgebit equum versus lapidem ac la„ pidem versus equum, tantumque im„ pediet progressum unius; quantum „ promovet progressum alterius. Si „ corpus aliquod in corpus aliud im„ pingens, motum ejus vi sua quo„ modocunque mutaverit, idem quoque „ vicissim in motu proprio eandem „ mutationem in partem contrariam vi „ alterius (ob æqualitatem pressionis „ mutuæ) subibit.

THEOREMA 72.

530. *Effectus pleni sunt viribus causarum suarum proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam nihil est sine ratione sufficiente, cur potius sit, quam non sit (§. 25) vis determinata indifferens non est, adeoque ipsi determinata effectus quantitas ex necessitate respondet. Quare si vis V ut V, seclusa omni vi alia sive adjuvante, sive impediente, effectum E ut E producit; etiam alia V ut V effectum E ut E producet, consequenter mV ut mV (ubi m notat multiplum aut submultiplum ipsius V) producet effe-

 ctum

(u) Princip. Mathem. Philos. Natural. pag. 13. conf. Cosmologia nostra generalis, §. 316. 346.

ctum mE ut mE. Est igitur $V : mV = E : mE$ (§.149. *Arithm.*) hoc est, effectus plerui sunt viribus suarum causarum proportionales. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

531. Vires igitur motum producentes si fuerint æquales, eandem motus quantitatem producunt (§.530) addendum mobili secundum eandem directionem progredienti (§. 76), subtrahendum vero, si secundum contrariam progredi nitatur (§.77).

THEOREMA 73.

Tab. IV. Fig. 53. 532. *Si corpus unum A in alterum B vel quiescens vel tardius motum secundum eandem directionem, vel etiam secundum contrariam ipsi obvium factum impingat: summa motuum in corporibus secundum eandem directionem motis, differentia eorundem in motis juxta contrarias eadem erit ante & post ictum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus A & B moveri juxta eandem directionem, sitque quantitas motus ipsius $A = a$, ipsius $B = b$, erit summa motuum ante ictum $= a + b$. Si A acceleret motum ipsius B juxta ejusdem directionem in conflictu, incrementum quoddam motus efficit (§. 22). Quare cum B eadem vi reagat in A, qua A agit in B (§. 528), ob contrarias virium æqualium directiones tantum motus subtrahitur ex A, quantum additur ipsi B (§.531). Unde si quantitas motus ipsius B fuerit post ictum $= b + c$; erit quantitas motus ipsius A post ictum $= a - c$. Summa igitur motuum $b + c + a - c = b + a$ eadem post ictum, quæ ante ictum. Si B quiescit, erit motus quantitas ante ictum $= 0$, adeoque motuum summa $= a$. Sed si post ictum quantitas motus ipsius $B = c$, *per demonstrata* quantitas motus ipsius $A = a - c$. Unde denuo summa motuum eadem ante & post ictum, hoc est, $= a$.

Si fuerit $c > a$: reactione ipsius B, qua efficitur motus $a + c$ destruitur quantitas motus a & efficitur motus secundum directionem contrariam impulsi corporis $A = c$, *per demonstrata*. Differentia igitur motuum post ictum in corporibus B & A secundum contrarias directiones motis $= b + a + c - c$ eadem est quæ summa ante ictum $a + b$.

Si $c = a$, reactione ipsius *B* destruitur motus in A, adeoque corpus A quiescit & B versus eandem plagam solum progreditur. Unde denuo summa motuum post ictum

ictum $a+b+o$ æquatur summæ ante ictum $a+b$.

Si corpora A & B sibi mutuo occurrant, erit differentia motuum $a-b$. Sit post conflictum quantitas motus ipsius B $=c$: destruitur ergo per actionem A motus b & efficitur c. Reactione igitur ipsius B in A destruitur motus $b+c$, adeoque post conflictum remanet motus $a-b-c$. Quodsi $a > b+c$, progrediuntur A & B post conflictum juxta eandem directionem estque summa motuum $a-b-c+c$ eadem quæ differentia $a-b$ ante ictum.

Quodsi $c+b > a$, destruitur reactione ipsius B $= c+b$ motus a & efficitur secundum contrariam directionem motus $c+b-a$, adeoque B & A resiliunt secundum directiones contrarias. Differentia igitur motuum post ictum $c-c-b+a$ eadem est, quæ fuerat ante ictum $a-b$.

Denique si $b+c=a$, reactione ipsius B destruitur motus totus in A, qui adeo post ictum $=o$. Unde summa motuum $c=a-b$ eadem quæ differentia eorundem ante ictum.

THEOREMA 73.

533. *Si duo corpora* A *&* B *pondere æqualia & non elastica, æqualibus celeritatibus lata, sibi mutuo occurrunt, post ictum ambo quiescunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim corporum A & B massæ atque celeritates æquales sint *per hypoth.* motuum quantitates æquales sunt (§. 22). Eorum itaque differentia ante ictum nulla est. Quodsi post ictum secundum eandem directionem progrederentur, summa motuum deberet esse nulla (§. 512), secundum eandem igitur progredi nequeunt. Sed cum secundum contrarias se mutuo urgeant eadem vi, nec ulla sit ratio, cur a se invicem resiliant, *per hypoth.* secundum directiones contrarias moveri nequeunt. Post ictum ergo ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 74.

534. *Si corpus elateris expers* A *in aliud itidem non elasticum* B *directe incurrat, nec per conflictum motus extinguatur; post ictum ambo eadem celeritate moventur secundum eandem directionem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim A incurrat in B sive quiescens, sive segnius motum, urgebit ipsum secundum directionem suam, adeoque cum nulla adsit

ſit ratio, cur a ſe invicem reſiliant, *per hypoth.* ſi A vincat, B neceſſario movebitur ſecundum directionem ipſius. *Quod erat unum.*

Quodſi jam A & B ſecundum eandem directionem progrediuntur, B tardius moveri nequit quam inſequens A. Cum vero eandem celeritatem adipiſcitur, quam habet ipſum A, motui ejus non amplius reſiſtit adeoque fugit, conſequenter ambo eadem celeritate progrediuntur. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 75.

Tab. IV. Fig. 53. 535. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elaſticum* B *quieſcens directe incurrat, celeritas poſt ictum eſt ad celeritatem ante ictum ut pondus ipſius* A *ad ponderum* A *&* B *ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Sit maſſa ipſius A = M, alterius B = *m*, celeritas prioris = C: erit quantitas motus ipſius A = MC (§. 22), ipſius B vero nullus, adeoque motuum ſumma poſt ictum = MC (§. 532), conſequenter celeritas = MC : (M + *m*) (§. 515. 22). Eſt adeo ut M + *m* ponderum ſumma ad M pondus moti, ita C celeritas ante ictum, ad celeritatem poſt ictum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Quodſi corpora A & B fuerint ejusdem ponderis; erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum = MC : 2M = $\frac{1}{2}$ C. Moventur itaque celeritate dimidia ejus, qua A ferebatur ante conflictum.

THEOREMA 76.

537. *Si corpus elateris expers* A *in aliud non elaſticum* B *tardius motum ſecundum eandem directionem directe impingat: erit celeritas poſt ictum æqualis motuum ſummæ per ponderum ſummam diviſæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B maſſæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit motus quantitas ante conflictum MC & *mc* (§. 22), adeoque ſumma eorundem MC + *mc*: quæ cum eadem ſit poſt conflictum (§. 532), erit celeritas communis corporum A & B poſt eundem (MC + *mc*) : (M + *m*) (§. 22). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

536. Si pondera corporum A & B fuerint æqualia, erit M = *m*, adeoque celeritas poſt ictum M (C + *c*) : 2 M = (C + *c*) : 2, ſeu ſemiſumma celeritatum ante ictum.

THEOREMA 77.

537. *Si duo corpora non elaſtica, pondere æqualia, diverſis celeritatibus lata, ſibi mutuo directe occurrant, poſt conflictum feruntur celerita-*

ritatum semidifferentiæ, qua movebantur ante ictum.

DEMONSTRATIO.

Sit massa communis = M, celeritates sint ut C & *c*; erit differentia motuum M (C−*c*): cui cum æqualis sit post conflictum summa eorundem (§. 532), erit celeritas communis = M (C−*c*) : 2M = (C−*c*) : 2. hoc est, æqualis velocitatum ante impactum semidifferentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 78.

Tab. IV. Fig. 53. 538. *Si duo corpora non elastico A & B iis celeritatibus sibi mutuo directe occurrant, quæ sunt reciproce ut pondera eorundem; ambo post ictum quiescunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & *m*, celeritates C & *c*; quoniam M : *m* = *c* : C, *per hypoth.* erit *mc* = MC, adeoque motuum differentia ante conflictum nulla (§. 22). Ergo summa motuum post ictum cum nihilo æqualis sit (§. 532); nullus quoque post ictum erit motus, hoc est, ambo quiescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 79.

539. *Si duo corpora non elastica A & B eadem celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post impactum ad celeritatem ante eundem ut ponderum differentia ad summam eorundem.*

DEMONSTRATIO.

Sit communis celeritas = C, massæ corporum A & B ut M & *m*; erit differentia motuum ante impactum (M−*m*) C (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem = (M−*m*) C : (M+*m*) (§. 22), hoc est, ut ponderum summa ad differentiam eorundem ita celeritas ante ictum ad celeritatem post ictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 80.

540. *Si duo corpora non elastica A & B quacunque celeritate sibi mutuo directe occurrunt; erit celeritas post ictum æqualis semidifferentiæ motuum per summam ponderum divisæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum A & B massæ M & *m*, celeritates C & *c*; erit differentia motuum ante ictum MC−*mc* (§. 22). Huic cum æqualis sit summa motuum post impactum (§. 532); erit velocitas communis post eundem (MC−*mc*) : (M+*m*) (§. 22). *Q. e. d.*

PROBLEMA 99.

541. *Determinare partem motus*

tus in conflictu amissam a fortiori.

RESOLUTIO.

1. Celeritas, qua movetur corpus ante conflictum, ducatur in massam ejus, ita habebitur quantitas motus ante conflictum (§. 22).
2. Similiter celeritas, qua idem fertur post conflictum, ducatur in massam ejus, ita habebitur quantitas motus post conflictum (§. cit.)
3. Quodsi motuum quantitatem posteriorem a priori auferas, relinquetur pars amissa.

E. gr. Si duo corpora æqualis ponderis sibi mutuo occurrant celeritatibus C & c, erit celeritas post conflictum $= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo motus quantitas post conflictum est $\frac{1}{2}MC + \frac{1}{2}Mc$. Sed ante conflictum erat in fortiori $= MC$. Motus ergo amissus est $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$. Quare motus integer ad partem amissam ut MC ad $\frac{1}{2}MC - \frac{1}{2}Mc$, hoc est, ut 2 C ad $C - c$, seu ut dupla celeritas fortioris ad differentiam celeritatum ante conflictum.

SCHOLION.

541. *Hac ergo methodo inveniri possunt theoremata de quantitate motus in conflictu amisso & inde magnitudinem ictus æstimare licet.*

DEFINITIO 61.

543. *Impetum* cum *Leibnitio* (x) appello quantitatem motus, seu id quod efficitur ducendo massam in celeritatem (§. 22), quodque adeo vi mortuæ æquipollet (§. 278).

AXIOMA 9.

544. *Si corpus aliquod non elasticum in obicem, qui cedere nequit, impingit, motus omnis cessat.*

COROLLARIUM.

545. Si ergo corpus quoddam non elasticum in obicem cedere nescium impingit; impetum omnem amittit (§. 543).

SCHOLION.

546. *Propositio per experientiam satis manifesta, ut adeo eam instar axiomatis sumere licuerit, nec opus sit ex notione elateris deficientis eam demum deduci.*

THEOREMA 11.

547. *Centrum percussionis idem est cum centro oscillationis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur.*

DEMONSTRATIO.

Centrum enim percussionis est punctum, in quo colligitur impetus omnis, seu circa quod impetus partium utrinque æquilibrantur (§. 527). Invenitur adeo si impetus partium considerentur instar ponderum ad lineam inflexilem ac gra-

(x) in Actis Erudit. A. 1695. p. 174.

gravitatis expertem applicatorum, hoc est, dividendo summam factorum ex impetibus partium in distantias a puncto suspensionis per summam impetum (§. 156). Sed eodem modo invenitur centrum oscillationis (§. 431.). Ergo centrum oscillationis idem est cum centro percussionis, si corpus percutiens circa punctum fixum rotatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

548. *Quæ igitur supra de centro oscillationis dicta sunt, eadem quoque de centro percussionis valent, si grave percutiens circa punctum fixum rotetur.*

THEOREMA 82.

549. *Centrum percussionis idem est cum centro gravitatis, si corporis percutientis partes omnes motu parallelo feruntur seu eadem celeritate moventur.*

DEMONSTRATIO.

Impetus enim sunt facta ex ponderibus in celeritates (§. 543) Quare si æquiponderantia per eandem celeritatem multiplices, perinde est ac si eorum æque multiplicia sumas. Sed æquiponderantium æquemultiplicia quoq; æquiponderant (nam si A æquiponderet ipsi B, etiam 2A ipsis 2B & in genere *m*A ipsis *m*B æquiponderare intelliguntur). Ergo circa centrum gravitatis impetus æquivalentes disponuntur, consequenter centrum gravitatis cum centro percussionis in hoc casu coincidit.

DEFINITIO 62.

550. *Angulus incidentiæ* DCA est, quem linea directionis corporis impingentis DC efficit ad punctum contactus C. Tab. IV. Fig. 52.

DEFINITIO 63.

551. Quodsi post ictum reflectitur, *Angulus reflexionis* ECF vocatur, quem linea directionis corporis reflexi EC efficit ad punctum contactus, unde resilit.

THEOREMA 83.

552. *Ictus perpendicularis est ad obliqnum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ* DCA.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ad AB perpendicularis DG, nempe in ipsum obicem, si superficies plana, aut in rectam, quæ eundem in contactu C tangit, si superficies curva, & compleatur rectangulum DGCH. Vis, qua urgetur corpus per DC, æquivalet viribus juxta directiones DH & DG agentibus (241. 245). Quare cum obex AB non opponatur directioni DH, sed tantum alteri DG; perinde est ac si corpus D

tantum percuteret obicem vi secundum DG agente. Æstimatur vero magnitudo ictus ex impetu in conflictu amisso (§. 541) impetus vero ex quantitate motus (§. 543) adeoque cum corpus idem sit, ex celeritate (§.49), consequenter ex longitudine linearum DG, DH, DC (§. 247). Est adeo impetus corporis D per DC ad impetum per DG ut DC ad DG. Jam dum corpus oblique impingit, destruitur tantum ab obice impetus per DG, *per demonstrat.* si vero perpendiculariter seu directe impingeret, destrueretur impetus totus per DG & DH (§. 545), hoc est, per DC (§. 241). Est ergo ictus perpendicularis ad obliquum ut DC ad DG. Sed si DC sumatur pro sinu toto, erit DG sinus anguli incidentiæ DCG (§. 2. *Trig.*). Ictus itaque perpendicularis, ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 84.

553. *Elater est æqualis vi comprimentis aut tendentis, quamdiu corpus adhuc comprimi potest.*

DEMONSTRATIO.

Corpus elasticum adhuc ulterius comprimi aut tendi potest, nec tamen comprimitur aut tenditur *per hypoth.* Ergo tanta vi resistit quanta comprimitur vel tenditur (§. 75.). Resistit autem vi elateris (§. 522): adeoque elater æqualis est vi comprimentis aut tendentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

554. Æquatur itaque etiam vi percutientis, quæ ad corpus elasticum tendendum aut comprimendum requiritur.

THEOREMA 85.

555. *Si corpus* H *in obicem* AB, *qui cedere nescit, directe impingat, sitque vel utrumque, vel alterutrum elasticum, eadem celeritate reflectitur per eandem rectam* CH, *qua advenerat.* Tab. IV. Fig. 54.

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, tota vis corporis B in resistentiam obicis frangendam insumeretur, motusque cessaret (§. 544). Ergo vis omnis impenditur in compressionem corporis elastici, atque adeo hoc acquirit vim elasticam isti æqualem (§. 553). Cum igitur elater, absumta vi comprimente, corpus reducat in statum pristinum, eadem vi illud repellit, qua impegerat, consequenter hoc eadem celeritate resilit. Et quoniam corpus elasticum se restituit secundum directionem

nem, secundum quam compressum fuerat (nulla enim adest ratio, quæ directionem immutet); corpus resilit per eandem rectam CH, per quam advenerat (§. 71). *Q.e.d.*

THEOREMA 86.

Tab. IV. Fig. 53. 556. *Si corpus elasticum D oblique impingit in obicem AB, qui cedere nescit, ita post ictum resilit, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione theorematis 83. (§. 552) vim per DC æquipollere viribus per DG & DH & in ictu tantum impendi vim per DG. Cum adeo post ictum remaneat vis per DH sive CF & per vim elasticam recuperetur vis per DG sive CH (§. 556); corpus post ictum iisdem viribus urgetur per CF & CH, quibus urgebatur ante conflictum, adeoque motu composito describet rectam CE dato tempore ipsi DC æqualem, eruntque eodem tempore HE & DH æquales utpote ab eadem vi descriptæ (§. 241). Sunt igitur ΔΔ DCH & CHE æqualia angulique cognomines æquales (§. 204. Geom), consequenter, cum HCA = HCF (§. 154.) DCA = ECF (91. Arithm.). *Q.e.d.*

PROBLEMA 100.

557. *Determinare angulum* ECF, *sub quo resilire debet corpus in* C *oblique impingens, ut ex* D *in* E *via brevissima perveniat, supposita nempe reflexione in* C. Tab. IV. Fig. 52.

RESOLUTIO.

Demissis ex D & E perpendicularibus DG & EF, fiat DG = a, EF = b, FG = c, CG = x, erit CF = $c - x$, $DC^2 = aa + xx$, $CE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Quoniam DC + CE est minimum aliquod per hypoth. fiat (§. 63. Analys. infinit.)

$$\surd(aa + xx) + \surd(bb + cc - 2cx + xx) = y$$

erit

$$\frac{xdx}{\surd(aa+xx)} + \frac{xdx - cdx}{\surd(b^2+c^2-2cx+x^2)} = dy = 0$$

$$x\surd(b^2+c^2-2cx+x^2) + (x-c)\surd(a^2+x^2) = 0$$

$$x\surd(b^2+c^2-2cx+x^2) = (c-x)\surd(a^2+x^2)$$

hoc est, CG. CE = CF. CD

Est itaque CG : CD = CF : CE (§. 299. Arithm.). Jam si punctum E supponatur in recta ipsi AB parallela:

lela; erit EF = DG (§. 226. *Geom.*) adeoque si DC sumatur pro sinu toto, erit GC sinus anguli GDC, & si CE sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli CEF (§. 2. *Trigon.*). Sunt ergo GC & CF arcuum similium sinus (§. 12. *Trigon.*), adeoque anguli GDC & CEF (. 141. *Geom.*), consequenter & eorum complementa ad rectos DCG & ECF (§. 246. *Geom.*) æquantur.

COROLLARIUM.

558. Quoniam corpus D post impactum in C ita resilit, ut angulus reflexionis ECF sit æqualis angulo incidentiæ DCG (§ 557); ex D in E, supposita reflexione in C, via brevissima pervenit.

PROBLEMA 101.

Tab. IV. Fig. 52. 559. *Determinare punctum* C, *in quod impingere debet corpus* D, *ut resilens incurrat in corpus L.*

RESOLUTIO.

Dato puncto D, datur DG perpendiculum $=a$. Dato puncto L, datur LI $=b$, consequenter GI $=c$. Fiat GC $=x$, erit CI $=c-x$. Et quia angulus LCI = DCG (§. 557), G vero & F recti, *per constr.* erit (§. 267. *Geom.*).

$$DG:LI = GC:CI$$
$$a:b = x:c-x$$

Ergo $a+b:a = c:x$ (§. 190. *Arith.*) hoc est, DG + LI : DG = GI : GC.

THEOREMA 87.

560. *Si corpus elasticum* A *in aliud quiescens* B *eidem æquale directe incurrat, post ictum quiescet* A, *&* B *movebitur ea celeritate, qua ante ictum ferebatur* A.

DEMONSTRATIO.

Si corpora non essent elastica, utrumque post ictum moveretur secundum eandem directionem celeritate dimidia (§. 536). Sed cum vis elastica secundum eam directionem agat, secundum quam facta est compressio, sitque vi comprimenti æqualis (§. 553); dimidia celeritate repellit A adeoque motum ejus sistit; B vero dimidia celeritate ulterius impellit adeoque motum ejus accelerat (§. 76). Fertur itaque post ictum celeritate integra, qua ante ictum ferebatur A, & A quiescit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

561. Cum adeo A omnem suam vim transferat in B, B eodem modo eandem in C, C rursus in D & D tandem in E transferre debet. Quare si fuerint plura corpora elastica pondere æqualia & se mutuo tangentia; atque A impingat in B, quiescentibus omnibus interme- Tab. IV. Fig. 54.

medi-

mediis, movetur ultimum E ea celeritate, qua impegerat A.

THEOREMA 88.

Tab. IV. Fig. 51. 562. *Si duo corpora elastica* A *&* B *pondere æqualia celeritate æquali sibi muto directe occurrant, utrumque resiliet ea celeritate & secundum eam directionem, qua advenerat.*

DEMONSTRATIO.

Si elater abesset, ambo quiescerent (§. 556). Omnis ergo vis in compressione consumitur. Huic adeo cum æqualis sit elastica, qua resiliunt secundum directionem, qua advenerant (§. 553); eadem vis æqualiter agens in corpus A & B eandem in utroque celeritatem & quidem pristinæ æqualem producit. Resiliunt itaque eadem celeritate, qua advenerant. *Q. e. d.*

THEOREMA 89.

Tab. IV. Fig. 53. 563. *Si duo corpora elastica* A *&* B *pondere æqualia celeritate inæquali sibi mutuo directe occurrant; post ictum celeritatibus permutatis feruntur.*

DEMONSTRATIO.

Concurrant corpora A & B celeritatibus C + *c* & C. Quodsi eadem celeritate C concurrerent, A & B post ictum movereretur celeritate C (§. 562). Si B quiesceret & A celerititate *c* in ipsum incurreret, post ictum quiesceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 460). Ergo excessus celeritatis *c*, quo fertur A, totus transfunditur per conflictum in B, adeoque ipso peracto A movetur celeritate C, B vero celeritate C + *c*. *Q. e. d.*

COROLLARIUM

564. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se invicem accedebant.

THEOREMA 90.

565. *Si corpus elasticum* A *in aliud æquale* B *segnius motum incurrat, post ictum ambo permutatis celeritatibus feruntur secundum eandem, nempe pristinam, directionem.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Incurrat A celeritate C + *c* in B celeritate C motum. Quoniam ob celeritates C & C æquales nullus fit impulsus, perinde est ac si A sola celeritate *c* in B quiescens impingeret. Tum vero quiesceret A, & B moveretur celeritate *c* (§. 560). Ergo post ictum A movebitur sola celeritate C, B vero celeritate C + *c*, & utrumque quidem secundum pristinam directionem, quia nihil directionem immutat. *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

566. Post ictum itaque eadem celeritate a se invicem discedunt, qua ante ictum ad se mutuo accedebant.

THEOREMA 91.

Tab. IV. Fig. 53. 567. *Si corpus* A *in alterum* B *incurrit, ictus idem est, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum differentia velocitatum incurrente.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim massæ M & m, celeritates C & c, erit celeritas communis post impactum $= (MC + mc) : (M + m)$ (§. 537), adeoque impetus ipsius A $= (M^2C + Mmc) : (M + m)$ (§. 543) consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2C + Mmc) : (M + m) = (M^2C + MmC - M^2C - Mmc) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C - c$; erit celeritas post ictum $= (MC - Mc) : (M + m)$ (§. 535) adeoque impetus $(M^2C - Mc) : (M + m)$ (§. 543), consequenter per ictum amissus $MC - Mc - (M^2C + M^2c) : (M + m) = (M^2C - M^2c + MmC - Mmc - M^2C + M^2c) : (M + m) = Mm(C - c) : (M + m$. In utroque igitur casu idem impetus amittitur, consequenter ictus idem est (§. 541).

COROLLARIUM.

568. Cum vis elastica ictui æqualis sit (§. 553); cum differentia velocitatum, quam habebant ante conflictum, in corpora A & B agit.

THEOREMA 92.

569. *Si duo corpora* A & B *sibi mutuo occurrunt, ictus idem contingit, qui fieret a corpore* A *in* B *quiescens cum summa velocitatum impingente.* Tab. IV. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut ante, erit celeritas communis post impactum $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540), adeoque impetus ipsius A seu fortioris $(M^2C - Mmc) : (M + m)$, consequenter impetus per ictum amissus $= MC - (M^2C + Mmc) : (M + m) = (M^2C + MmC - M^2C + Mmc) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm(C + c) : (M + m)$. Sed si A incurrat in B quiescens celeritate $C + c$, erit celeritas post ictum $= (MC + Mc) : (M + m)$ (§. 535) adeoque impetus $(M^2C + M^2c) : (M + m)$ (§. 543), consequenter per ictum amissus $MC + Mc - (M^2C - M^2c) : (M + m) = (M^2C + M^2c + MmC + Mmc - M^2C - M^2c) : (M + m) = (MmC + Mmc) : (M + m) = Mm(C + c) : (M + m)$. Q. e. d.

COROLLARIUM.

570. Cum vis elastica ictui æqualis sit

sit (§. 553), in corpora A & B cum summa velocitatum agit, quas ante conflictum habebant.

PROBLEMA 102.

571. ***Determinare celeritatem corporum elasticorum quorumcunque A & B celeritatibus quibuscunque directe concurrentibus.***

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 53. I. Si corpora A & B in easdem plagas tendant, post ictum vi sola impulsus secundum eandem moventur celeritate communi (MC + mc) : (M + m) (§. 533). Accedat jam vis elastica, quæ agit in eadem corpora cum celeritate C − c (§. 568) adeoque cum in momento ictus A & B corpus unum constituant, eandem ita distribuit, ut celeritates, post ictum a vi elastica acquisitæ sint in ratione massarum reciproca. Sit ergo celeritas ipsi B acquisita = x, erit

$$M : m = x : C - c - x$$

$$MC - Mc - Mx = mx$$

$$MC - Mc = Mx + mx$$

$$(MC - Mc) : (M + m) = x$$

Hinc celeritas ipsi A acquisita = C − c − (MC + Mc) : (M + m) = (MC − Mc + mC − mc − MC + Mc) : (M + m) = (mC − mc) : (M + m). Jam cum elater corpus A repellat, directioni ejus contrarius, celeritas hæc subtrahenda est ab ea, quæ per solum impulsum acquiritur: cum vero idem corpus B ad eandem plagam propellat, celeritas hæc addenda est priori per impulsum solum acquisitæ (§. 76). Unde tandem prodit celeritas ipsius A = (MC + mc − mC + mc) : (M + m) = (MC − mC + 2mc) : (M + m) & ipsius B = (MC + mc + MC − Mc) : (M + m) = (2MC + mc − Mc) : (M + m.)

E. gr. Sit M = 6 librarum, m = 4, C = 3, c = 2, erit post conflictum celeritas ipsius A = (18 − 12 + 16) : (6 + 4) = $\frac{22}{10}$ = $2\frac{1}{5}$ & ipsius B = (36 + 8 − 12) : 10 = $\frac{32}{10}$ = $3\frac{1}{5}$. Progrediuntur itaque A & B versus eandem plagam celeritatibus $2\frac{1}{5}$ & $3\frac{1}{5}$.

Sit M = 2, m = 6, C = 4, c = 1, erit post conflictum celeritas ipsius A = (8 − 24 + 12) : (2 + 6) = $-\frac{4}{8}$ = $-\frac{1}{2}$; celeritas ipsius B = (16 + 6 − 2) : (2 + 6) = $\frac{20}{8}$ = $2\frac{1}{2}$. Cum celeritas ipsius A negativa prodeat, id indicio est, celeritatem per actionem elateris acquisitam esse majorem celeritate per impulsum acquisita adeoque corpus A resilire post ictum. Post conflictum itaque A cum dimidio celeritatis gradu recedit, B vero cum $2\frac{1}{2}$ progreditur.

II. Si corpora A & B ad contrarias plagas tendentia sibi mutuo occur-

occurrant, in conflictu per impulſum ſolum utrique acquiritur celeritas $(MC - mc) : (M + m)$ (§. 540). Cum vis elaſtica in corpora, quæ inter ſe colliduntur, agat cum celeritate $C + c$ (§. 570), ſi celeritas ipſi B inde acquiſita ſit x, erit vi ſuperiorum.

$$M : m = x : C + c - x$$

$$MC + Mc - Mx = mx$$

$$MC + Mc = Mx + mx$$

$$(MC + Mc) : (M + m) = x$$

Hinc celeritas, quæ ipſi A acquiritur, $C + c\, (-MC - Mc) : (M + m) = (MC + Mc + mC + mc - MC - Mc) : (M + m) = (mC + mc) : (M + m)$. Unde tandem ut ante prodit celeritas ipſius A $= (MC - mc - mC - mc) : (M + m)$ $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$; celeritas vero ipſius B $= (MC - mc + MC + Mc) : (M + m) = (2MC + Mc - mc) : (M + m)$. Quodſi $mC + 2mc > MC$; celeritas ipſius A eſt negativa, quod oſtendit, vim elaſticam eſſe impulſu ſuperiorem, adeoque corpus A reſilire, nec progredi cum reſiliente B.

E. gr. Sit ut ante $M = 6$, $m = 4$, $C = 3$, $c = 2$, erit poſt conflictum celeritas ipſius A $= (18 - 12 - 16) : 10 = -1$ & ipſius B $= (36 + 12 - 8) : 10 = \frac{40}{10} = 4$. Regreditur adeo corpus B cum quatuor gradibus celeritatum & A cum uno.

COROLLARIUM I.

572. Quoniam $\frac{MC - mC + 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC + 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC + 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + mc - Mc}{M + m} = \frac{Mc + mc + 2MC - 2Mc}{M + m} = c + \frac{2MC - 2Mc}{M + m}$, atque $(2MC - 2Mc) : (M + m)$ & $(2mC - 2mc) : (M + m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum differentiam ante impactum, quæ *celeritas reſpectiva* dicitur, ut alterutrius ponderis duplum ad ponderum ſummam; ſi corpus elaſticum A in aliud B ſive quieſcens, ſive tardius motum incurrat, invenitur celeritas poſt impactum corporis A, ubi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* B, *ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, qua ex celeritate ipſius* A *ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejusdem poſt impactum.* Celeritas vero ipſius B reperitur, ſi fiat; *Ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* A, *ita celeritatum differentia ante impactum ad celeritatem, qua addita celeritati ipſius* B *prodit celeritas hujus poſt impactum.*

COROL-

COROLLARIUM 2.

573. Similiter quia $\frac{MC - mC - 2mc}{M + m} = \frac{MC + mC - 2mC - 2mc}{M + m} = C - \frac{2mC - 2mc}{M + m}$ & $\frac{2MC + Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc - Mc - mc}{M + m} = \frac{2MC + 2Mc}{M + m} - c$, atque $(2mC + 2mc):(M + m)$ & $(2MC + 2Mc):(M + m)$ ſunt celeritates, quæ ſe habent ad celeritatum ante impactum ſummam (quæ *celeritas reſpectiva* dicitur) ut duplum ponderis alterutrius ad eorundem ſummam; ſi duo corpora elaſtica A & B ſibi mutuo occurrant, invenitur poſt impactum corporis A celeritatem, ubi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* B, *ita celeritatum ante impactum ſumma ad celeritatem, qua ex celeritate ipſius* A *ante impactum ſubducta relinquit celeritatem ejusdem poſt impactum.* Celeritas vero ipſius B invenitur, ſi fiat: *ut ſumma ponderum ad duplum pondus ipſius* A *ita ſumma celeritatum ante impactum ad celeritatem, ex qua ſubducta celeritas ante impactum relinquit eam, qua ineſt poſt eundem.*

THEOREMA 93.

Tab. IV. Fig. 53. 574. *Si corpus elaſticum* A *directe impingit in aliud quieſcens* B; *erit celeritas ejus poſt conflictum ad celeritatem ante eundem, ut differentia ponderum ad ſummam eorundem, quam vero communicat cum* B, *ea ad eandem eſt ut duplum pondus ipſius* A *ad ponderum ſummam.*

DEMONSTRATIO.

Si B non quieſcit, celeritas ipſius A poſt ictum eſt $(MC - mC + 2mc):(M + m)$, (§. 571). Si vero quieſcit, celeritas ejus ante conflictum nulla eſt, adeoque $c = 0$. Quare cum in hoc caſu fiat $2mc = 0$; erit celeritas ipſius A poſt impactum $= (MC - mC):(M + m)$. Eſt itaque ad C celeritatem ante conflictum ut $M - m$ differentia ponderum ad $M + m$ eorundem ſummam. *Quod erat unum.*

Similiter ſi B non quieſcit, celeritatem ex conflictu acquirit $(2MC + mc - Mc):(M + m)$, (§. 571). Jam ſi quieſcit, celeritas ejus nulla eſt adeoque $c = 0$, conſequenter $mc = 0$ & $Mc = 0$. Quare celeritas ipſius B poſt conflictum $= 2MC:(M + m)$. Eſt igitur ad celeritatem ipſius A ante conflictum ut duplum ponderis A ad ſummam ponderum. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

575. Erit ergo ex æquo poſt conflictum velocitas ipſius A ad velocitatem ipſius

ipsius B ut differentia ponderum ad duplum ipsius A (§. 196. *Arithm.*)

THEOREMA 94.

576. *Si duo corpora elastica* A *&* B *sibi mutuo directe occurrunt cum celeritatibus, quæ ipsorum ponderibus reciproce proportionales sunt, post conflictum eadem celeritate a se invicem resiliunt, qua advenerant.*

DEMONSTRATIO.

Post conflictum celeritas ipsius A est $(MC - mC - 2mc) : (M + m)$ & celeritas ipsius B est $(2MC + Mc - mc) : (M + m)$ (§. 571). Est vero $M : m = c : C$, *per hypoth.* adeoque $mc = MC$ (§. 297. *Arithm.*) Quod si ergo in expresione celeritatis ipsius pro $2mc$ substitutas $2MC$, prodibit $(-mC - MC) : (M + m) = -C$. Resilit ergo A celeritate C, qua advenerat. *Quod erat unum.*

Quodsi similiter in expresione celeritatis ipsius B pro 2MC substituas $2mc$; prodibit $(mc + Mc) : (M + m) = c$. Abit ergo B eadem celeritate, qua advenerat. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 95.

577. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur: differentia celeritatum tam ante, quam post impulsum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c; erit eorum differentia $= C - c$, & corpus M, quod sequitur, in alterum m incurrit. Celeritas igitur ipsius M post conflictum $= \frac{MC + 2mc - mC}{M + m}$; ipsius autem $m = \frac{mc + 2MC - Mc}{M + m}$, & quoniam post conflictum adhuc in eandem plagam moventur, celeritas corporis M celeritate alterius m minor est, consequenter celeritatum differentia post conflictum $\frac{mc + 2MC - Mc - MC - 2mc + mC}{M + m} = \frac{MC - Mc - mc + mC}{M + m} = C - c$. Est adeo celeritatum differentia post conflictum eadem, quæ fuerat ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 96.

578. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem plagam moventur, post conflictum in contrarias; differentia celeritatum ante conflictum æqualis est summæ celeritatum post eundem.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c: erit differentia eorundem C − c. Quoniam corpus M, quod ante conflictum celerius movetur *per hypoth.* in alterum m incurrit, & post conflictum M & m moventur in plagas contrarias *per hypoth.* celeritas vi elastica producta in M major est celeritate ex ictu, utpote qua M cum m in eandem plagam progrediebatur (§. 534). Celeritas igitur in corpore M negativa est, adeoque $\frac{mC - 2mc - MC}{M+m}$ & in corpore m = $\frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$ (§. 571), consequenter summa celeritatum post conflictum = $\frac{MC + mC - Mc - mc}{M+m} = C - c$. Est ergo summa celeritatum post conflictum eadem cum differentia earundem ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 97.

579. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in eandem moventur; summa celeritatum ante conflictum æqualis est differentiæ earum post eundem.*

DEMONSTRATIO.

Sint celeritates corporum M & m ante conflictum C & c: erit summa earundem C + c. Quoniam corpora sibi mutuo occurrunt & post conflictum in eandem partem moventur *per hypoth.* erit post conflictum celeritas corporis M = $\frac{MC - mC - 2mc}{M+m}$ & corporis m = $\frac{2MC + Mc - mc}{M+m}$ (§. 571). Est vero differentia harum celeritatum = $\frac{MC + Mc + mC + mc}{M+m} = C + c$, quæ eadem cum summa celeritatum ante conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 98.

580. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; summa celeritatum ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum M & m celeritates ante conflictum C & c; erit earum summa C + c. Quoniam corpora hæc ante conflictum in partes contrarias moventur, adeoque sibi mutuo occurrunt *per hypoth.* erit celeritas corporis m = $\frac{2MC + Mc - mc}{M+m}$ (§. 571). Enimvero corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, in

quam

quam ante eundem tendebat *per hypoth.* adeoque $mC + 2mc > MC$, seu celeritas post conflictum negativa, consequenter $= \frac{mC + 2mc - Mc}{M + m}$ (§. *cit.*) Est igitur summa celeritatum post conflictum $= \frac{MC + Mc + mC + mc}{M + m} = C + c$, adeoque eadem quæ ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 99.

581. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in eandem plagam moventur; quantitas motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem plagam moventur, unum in alterum incurrit. Incurrat igitur corpus M celeritate C in corpus *m* celeritate *c* motum: erit celeritas illius post conflictum $\frac{MC + 2mc - mC}{M+m}$ & hujus celeritas $\frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$ (§. 571), consequenter quantitas motus corporis M post conflictum $= \frac{M^2C + 2Mmc - MmC}{M+m}$ & corporis $m = \frac{2MmC + Mm^2c - Mmc}{M+m}$ (§. 22). Est itaque summa motuum post conflictum $= \frac{M^2C + MmC + Mmc + m^2c}{M+m} = MC + mc$ (§. 22). Enimvero quantitas motus utriusque corporis ante conflictum in unam summam collecta erat itidem $MC + mc$ (§. *cit.*). Quamobrem patet quantitatem motus ante & post conflictum esse eandem. *Q. e. d.*

THEOREMA 100.

582. *Si duo corpora elastica ante & post conflictum in partes contrarias moventur; differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem.*

DEMONSTRATIO.

Quia corpora ante conflictum in partes contrarias moventur *per hypoth.* sibi mutuo occurrunt. Occurrat itaque corpus M celeritate C corpori *m* celeritate *c* moto; erit celeritas corporis *m* post conflictum $= \frac{2MC - mc + Mc}{M+m}$ & cum corpus M post conflictum in partem ei contrariam movetur, qua advenerat, erit celeritas corporis M post conflictum $= \frac{mC + 2mc}{M+m}$ $- MC$

$- MC$. Quare quantitates motuum in corporibus M & *m* sunt $\frac{MmC + 2Mmc - MC}{M+m}$ & $\frac{2MmC - m^2c + Mmc}{M+m}$, consequenter eorum differentia $= \frac{MmC - Mmc + M^2C - m^2c}{M+m} = MC - mc$. Est vero $MC - mc$ differentia quantitatum motus ante conflictum. Ergo differentia quantitatum motus ante & post conflictum eadem. *Q. e. d.*

THEOREMA 101.

583. *Si duo corpora elastica ante conflictum in eandem partem, post conflictum vero in contrarias moventur; differentia quantitatum motus post conflictum est æqualis summæ earundum ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in eandem partem moventur, corpus unum in alterum incurrit. In currat igitur corpus M celeritate C in alterum *m* celeritate *c* motum; erit celeritas corporis $m = \frac{2MC + mc - Mc}{M+m}$. Quoniam vero corpus M movetur post conflictum in partem contrariam ei, in quam ante tendebat; celeritas erit negativa, adeoque celeritas positiva evadet $\frac{mC - 2mc - MC}{M+m}$ (§. 571). Sunt igitur quantitates motus post conflictum $= \frac{MmC - 2Mmc - M^2C}{M+m}$ & $\frac{2MmC + m^2c - Mmc}{M+m}$, adeoque differentia $\frac{MmC + Mmc + M^2C + m^2c}{M+m} = MC + mc$. Quare cum sit $MC + mc$ summa quantitatum motus ante conflictum (§. 22); differentia motuum post conflictum æqualis est summæ ante eundem.

THEOREMA 102.

584. *Si duo corpora elastica ante conflictum in partes contrarias, post eundem in easdem moventur; summa motuum post eundem æqualis est differentiæ earundem ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam corpora ante conflictum in partes contrarias contendunt, sibi mutuo occurrunt. Occurrat igitur corpus M celeritate C alteri *m* celeritate *c* moto; erit celerias corporis *m* post conflictum $= \frac{2MC + Mc - mc}{M+m}$ & corporis

M=

$M_1 = \frac{MC - mC - 2mc}{M+m}$ (§. 571).

Sunt adeo quantitates motus post conflictum $= \frac{2MmC + Mmc - m^2c}{M+m}$ & $\frac{M^2C - MmC - 2Mmc}{M+m}$, consequenter summa motuum post conflictum $= \frac{M^2C + MmC - Mmc - m^2c}{M+m} = MC - mc$. Quoniam differentia motuum ante conflictum est $MC - mc$, summa motuum post eundem est æqualis differentiæ motuum ante eundem.

THEOREMA 103.

585. *In conflictu corporum elasticorum hoc solo in casu eadem conservatur motus quantitas, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam moventur.*

DEMONSTRATIO.

Corpora enim aut ante & post conflictum in eandem plagam moventur aut in contrarias; aut ante conflictum in eandem, post eundem in contrarias; aut denique ante conflictum in contrarias partes post eundem in eandem tendunt. Jam in hoc solo casu, quando corpora ante & post conflictum in eandem plagam tendunt, summa motuum ante & post conflictum eadem (§. 581. & seqq.). In hoc igitur casu solo eadem conservatur motus quantitas.

COROLLARIUM.

586. A vero igitur aberravit *Cartesius*, dum hanc statuit naturæ legem, quod in omni corporum conflictu eadem semper conservetur motus quantitas.

SCHOLION.

587. *Ut idem evidentius appareat, ostendendum porro erit, quonam in casu quantitas motus augeatur, in quonam minuatur. Eo igitur fine addimus theoremata proxime sequentia.*

THEOREMA 104.

588. *In conflictu corporum elasticorum quantitas motus augetur, quando ante conflictum in partem eandem, post conflictum in contrarias moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum partem eandem, post conflictum in contrarias partes feruntur; differentia motuum post conflictum est æqulis summæ eorundem ante conflictum (§. 583). Enimvero summa motuum post conflictum est major differentia motuum post eundem: id quod ex terminis manifestum est (§. 61. 64. *Arithm.*). Quamobrem etiam

iam ſumma motuum poſt conflictum major eſt ſumma eorundem ante conflictum (89. *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu augetu. *Q. e. d.*

THEOREMA 105.

589. *In conflictu corporum elaſticorum quantitas motus minuitur, quando ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eandem moventur.*

DEMONSTRATIO.

Quando enim corpora ante conflictum in partes contrarias, poſt eundem in eandem feruntur; Summa motuum poſt conflictum æqualis eſt differentiæ eorundem ante conflictum (§. 584). Enimvero ſumma motuum ante conflictum major eſt differentia eorundem ante conflictum: id quod ex terminis manifeſtum (§. 61. 64. *Arithm.*). Ergo ſumma motuum ante conflictum major eſt ſumma motuum poſt eundem (§. 89. *Arithm.*). Quantitas igitur motus in conflictu imminuitur. *Q. e. d.*

THEOREMA 106.

590. *Corpora elaſtica poſt conflictum eadem celeritate a ſe invicem recedunt, qua ante eundem ad ſe invicem accedebant.*

DEMONSTRATIO.

I. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum ſequitur, quemadmodum in conflictu ſupponi debet; differentia celeritatum ad ſe invicem accedunt. Quodſi vero poſt conflictum itidem in eandem plagam feruntur, differentia celeritatum poſt conflictum eſt æqualis differentiæ celeritatum ante eundem (§. 577). Quoniam itaque tardius motum ſequitur, celerius motum præcedit, quemadmodum ex actione elateris intelligitur, qua corpora vi ictus eadem celeritate ſecundum eandem directionem progreſſura (§. 534) a ſe invicem ſeparantur (§. 571), adeoque differentia celeritatum a ſe invicem diſcedunt; poſt conflictum ea celeritate a ſe invicem recedunt, qua ante eundem ad ſe invicem accedebant. *Quod erat unum.*

II. Si corpora ante conflictum in eandem plagam moventur & tardius motum præcedit, celerius motum ſequitur, differentia celeritatum ad ſe invicem accedunt. Quodſi poſt conflictum in diverſas plagas tendunt, ſumma

ma celeritatum a se invicem recedunt. Quare cum in hoc casu summa celeritatum post conflictum sit æqualis differentiæ ante eundem (§. 578); eadem celeritate etiam in hoc casu post conflictum a se invicem discedunt, qua ante eundem ad se invicem accedebant. *Quod erat secundum.*

III. Quodsi duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura, summa celeritatum ad se invicem accedunt. Quodsi post conflictum tendant in eandem, cum celerius motum præcedat, tardius motum sequatur vi eorum, quæ *n. I.* dicta sunt; differentia celeritatum a se invicem recedunt. Est vero differentia celeritatum post conflictum æqualis summæ ante eundem (§. 579). Ergo corpora post conflictum eadem celeritate ad se invicem accedunt, qua post eundem a se invicem recedunt. *Quod erat tertium.*

IV. Denique si duo corpora ante conflictum in partes contrarias moventur sibi mutuo occursura & post conflictum in contrarias a se invicem discedunt; summa celeritatum ante conflictum ad se invicem accedunt, post conflictum a se invicem recedunt. Est vero in hoc casu summa celeritatum ante & post conflictum eadem (§. 580). Ergo eadem celeritate post conflictum a se invicem recedunt, quo ante eundem ad se invicem accedunt. *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

591. *Hoc theorema breviter ita enunciatur:* In conflictu corporum elasticorum eadem semper conservatur celeritas respectiva. *Hanc propositionem alii inter leges motus referunt ac inde regulas motus demonstrant.*

COROLLARIUM.

592. Æqualibus igitur temporibus ante & post conflictum æquales sunt corporum a se invicem distantiæ, veluti quo intervallo uno minuto ante conflictum corpora a se invicem distant, eadem uno minuto post eundem a se invicem distant.

THEOREMA 107.

593. *Si duo corpora elastica* A B *directe concurrant vel sibi mutuo occurrant, summa factorum ex masſis in quadrata celeritatum ante & post conflictum eadem.* Tab. IV. Fig. 55.

DEMONSTRATIO.

In concursu directo celeritates post conflictum sunt (MC − *m*C + 2

$+2mc):(M+m)$ vel $(mC-2mc-MC):(M+m)$ & $(2MC-Mc+mc):(M+m)$ (§. 571). Hinc quadrata eorundem $(M^2C^2+4MmCc-4m^2Cc+4m^2c^2+m^2C^2-2mMC^2):(M^2+2mM+m^2)$ & $(4M^2C^2+4MmCc-2Mmc^2+m^2c^2-4M^2Cc+M^2c^2):(M^2+2mM+m^2)$, consequenter priore per *M*, posteriore per *m* multiplicato, prodit summa factorum ex massis in quadrata celeritatum $(M^3C^2+2Mm^2c^2+2M^2C^2m+M^2c^2m+Mm^2c^2+m^3c^2):(M^2+2mM+m^2)=MC^2+mc^2$, quæ eadem est summa ex factis massarum in quadrata celeritatum ante conflictū. Idem cum eodem modo in occursu corporum directo ostendatur, quo celeritas corporis *m* est $(2MC+Mc-mc):(M+m)$, corporis vero M est $\frac{MC-mc-2mc}{M+m}$, vel $\frac{mC+mc-MC}{M+m}$ (§. 571): patet propositum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

594. Eadem itaque in conflictu conservatur virium vivarum quantitas (§. 325).

THEOREMA 108.

595. *Si duo corpora elastica celeritatibus per conflictum acquisitis denuo in se invicem incurrere, vel sibi mutuo occurrere supponantur; per novum hunc conflictum recuperabunt celeritates, quas ante eundem habebant.*

DEMONSTRATIO.

Sint massæ corporum M & *m*, celeritates ante primum conflictum C & *c*, ac corpus M incurrat in alterum *m*: erunt post conflictum celeritates eorundem corporum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ & $\frac{2MC+mC-Mc}{M+m}$ (§. 571). Quoniam celeritas corporis *m* major est celeritate alterius M post conflictum (§. *cit.*); mutatis directionibus corpus *m* in alterum M incurret. Ne calculus fiat intricatus, fiat $A=m$, $B=M$, celeritas ipsius $A=V=\frac{2MC+mc-Mc}{M+m}$ & celeritas corporis $B=v=\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$. Erit igitur post alterum conflictum celeritas corporis incurrentis $A=\frac{AV-BV+2Bv}{A+B}$, & celeritas alterius $B=\frac{2AV+Bv-Av}{A+B}$. Jam

$$\begin{aligned} AV &= 2MmC + m^2c - Mmc \\ -BV &= -M^2C - Mmc + M^2c \\ +Bv &= 2M^2C - 2MmC + 4Mmc \end{aligned}$$

$$\frac{AV - BV + 2Bv}{A+B} = \frac{M^2c + 2Mmc + m^2c}{M^2 + 2Mm + m^2} = c$$

Recuperat igitur corpus m post conflictum alterum celeritatem c, quam ante primum habebat. *Quod erat unum.* Porro

$$\begin{aligned} 2AV &= 4MmC + 2m^2c - 2Mmc \\ +Bv &= +M^2C - MmC + 2Mmc \\ -Av &= -MmC + m^2C - 2m^2c \end{aligned}$$

$$\frac{2AV + Bv - Av}{A+B} = \frac{M^2C + 2MmC + m^2C}{M^2 + 2Mm + m^2} = C$$

Recuperat itaque etiam corpus M per conflictum alterum celeritatem C, quam ante primum habebat. *Quod erat secundum.*

Utrumque eodem modo ostenditur, si corpora duo sibi mutuo directe occurrant & mutatis directionibus post conflictum primum denuo sibi occurrere supponantur. *Quod erat tertium & quartum.*

DEFINITIO 64.

Tab. I. Fig. 4. 596. Si linea recta AB jungit centra gravitatis A & B duorum corporum & punctum C ita eandem dividat, ut sit pondus corporis A ad pondus corporis B uti reciproce BC ad CA; dicetur punctum C *Centrum gravitatis corporum* A & B.

SCHOLION.

597. Ratio denominandi patet ex iis, quæ superius (§. 144) demonstrata erunt.

THEOREMA 109.

598. *Centrum gravitatis corporum elasticarum ante & post conflictum vel quiescit, vel uniformiter seu eadem velocitate in eandem plagam movetur & temporibus æqualibus eodem intervallo ab eodem distant mobilia ante & post conflictum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim sumtis temporibus ante & post conflictum æqualibus eadem est corporum A & B distantia, adeoque recta jungens eorum centra gravitatis AB eadem (§. 192. *Geom.*). Quare cum centrum gravitatis C in eadem recta fixum sit; mobilia ab eodem æquali intervallo distare debent sumtis ante & post conflictum temporibus æqualibus. *Quod erat primum.* Tab. I. Fig. 4.

Fieri autem non potest ut eadem ante & post conflictum temporibus æqualibus sit corporum

porum A & B a centro gravitatis distantia, nisi aut centrum istud quiescat, aut ante & post conflictum eodem modo moveatur: quod per se patet. Ergo centrum gravitatis ante & post conflictum vel moveri eodem modo, vel quiescere debet. *Quod erat secundum.*

Quoniam vero centrum gravitatis corpori majori continuo propius est (§. 144); cum corpore majore seu graviore in eandem plagam, adeoque continuo juxta eandem directionem movetur. *Quod erat tertium.*

Denique cum corporum motus sit æquabilis (§. 71), duplo tempore dupla, triplo tripla, quadruplo quadrupla efficitur in corporibus a se invicem recedentibus distantia, in accedentibus vero ad se invicem subdupla, subtripla, subquadrupla (§. 31), consequenter cum distantiæ a centro sint in constante ratione, nimirum ratione massarum reciproca (§. 596), eædem quoque duplo tempore duplæ, triplo triplæ, quadruplo quadruplæ in casu priori, ast subduplæ, subtriplæ, subquadruplæ in posteriori evadere debent (§. 178. 181. *Arithm.*). Quamobrem si centrum gravitatis movetur, spatia ab eodem descripta temporum rationem habere, adeoque ipsum motu æquabili ferri (§. 31), consequenter continuo eadem velocitate progredi debet (§. 24). *Quod erat quartum.*

SCHOLION.

599. *Quod centrum gravitatis subinde quiescat, subinde moveri debeat, & quandonam quiescat, quandonam moveatur, patet ex propositione sequente.*

THEOREMA 110.

600. *Si duo corpora elastica moventur celeritatibus, quæ sunt massis seu ponderibus ipsorum reciproce proportionales, sibique mutuo occurrunt; centrum gravitatis ante & post conflictum quiescit: in alio autem casu quocunque non quiescit, sed movetur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim corpora motu æquabili feruntur *per hypoth.* spatia descripta eodem tempore continuo sunt ut celeritates quibus feruntur (§. 35), adeoque in ratione massarum reciproca (§. 167. *Arithm.*). Enimvero centrum gravitatis continuo a mobilibus distat in ratione massarum reciproca (§. 596), & ante conflictum auferuntur a distantiis anterioribus continuo partes in ratione massarum

rum reciproca *per demonstrata*; adeoque partes inter mobilia & centri gravitatis locum in anteriore quocunque tempore interceptæ sunt itidem in ratione massarum reciproca (§. 188. *Arithm.*), consequenter centrum gravitatis in eodem loco constanter hæret (§. 596) & hinc ante conflictum quiescit. Enimvero post conflictum celeritates eædem prorsus sunt, quæ ante eundem fuerant (§. 590), adeoque itidem massis reciproce proportionales *per hypoth.* Patet igitur ut ante quod distantiæ continuo crescant a loco centri gravitatis in tempore quocunque anteriore in ratione massarum reciproca (§. 187. *Arithm.*), consequenter & post conflictum quiescit. *Quod erat unum.*

Jam in omni reliquo casu eodem, quo ante, modo patet quod distantiæ a loco centri gravitatis dato tempore ante conflictum non decrescant, nec post conflictum crescant in ratione massarum reciproca, consequenter a loco isto continuo non distent corpora in ratione massarum reciproca (§. 188. 187. *Arithm.*) Centrum igitur gravitatis non omni tempore in eodem loco est (§. 596), consequenter movetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

601. Si corpora elastica æqualia eadem celeritate sibi mutuo occurrunt, celeritates quoque massis reciproce proportionales sunt, quod per se patet. Centrum gravitatis igitur ante & post conflictum quiescit, si corpora elastica æqualia æquali celeritate sibi mutuo occurrunt.

SCHOLION.

602. *Nimirum casus hic specialis sub generali theorematis actu continetur, ut dici non possit præter casum theorematis dari adhuc alium, in quo centrum gravitatis quiescit. Ceterum theorema præsens ita enunciari solet:* Status centri gravitatis non mutatur ab actione corporum in se invicem. *Sunt quidam philosophi, qui ut autoritatem* Cartesii *tueantur, eandem motus quantitatem conservari in omni conflictu contendunt, quatenus centrum gravitatis, in quo pondera corporum uniuntur (§. 125), eadem celeritate ante & post conflictum movetur. Verum enim est quantitatem motus centri gravitatis ante & post conflictum esse eandem.*

THEOREMA III.

603. *Si corpora elastica sibi mutuo occurrunt, celeritas ab uno eorum amissa est ad celeritatem, quam idem amitteret, si in alterum quiescens impingeret ut summa celeritatum utriusque ad celeritatem ipsius impingentis.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Si corpora M & *m* celeritatibus C & *c* sibi mutuo occurrant, erit illius celeritas post conflictum = $\frac{MC-mC-2mc}{M+m}$ (§. 571), consequenter celeritas in conflictu amissa = $C - \frac{MC+mC+2mc}{M+m} = \frac{MC+mC-MC+mC+2mc}{M+m} = \frac{2mC+2mc}{M+m}$. Jam vero si corpus M in alterum *m* quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret = $\frac{MC-mC}{M+m}$ (§. *cit.*) consequenter celeritas amissa foret $C - \frac{MC+mC}{M+m} = \frac{MC+mC-MC+mC}{M+m} = \frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu priori amissa ad celeritatem in posteriori amittendam $= \frac{2mC+2mc}{M+m} : \frac{2mC}{M+m} = C+c : C$, hoc est, ut summa celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem impingentis ante eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 112.

604. *Si corpus elasticum unum in alterum incurrit, celeritas ab incurrente in conflictu amissa est ad celeritatem, qua idem in quiescens impingeret ut celeritatum differentia ante conflictum ad celeritatem incurrentis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus M celeritate C in corpus *m* incurrit, quod celeritate *c* movetur, erit illius celeritas post conflictum $\frac{MC-mC+2mc}{M+m}$ (§. 571), adeoque celeritas in conflictu amissa $C - \frac{MC+mC-2mc}{M+m} = \frac{MC+mC-MC+mC-2mc}{M+m} = \frac{2mC-2mc}{M+m}$. Enimvero si corpus M in alterum *m* quiescens celeritate C incurreret; celeritas post conflictum foret $\frac{MC-mC}{M+m}$, adeoque celeritas amissa foret $C - \frac{MC+mC}{M+m} = \frac{MC+mC-MC+mC}{M+m} = \frac{2mC}{M+m}$. Est igitur celeritas in casu priori amissa ad celeritatem in casu posteriori amittendam $= \frac{2mC-2mc}{M+m} : \frac{2mC}{M+m} = C-c : C$, hoc

hoc est, ut differentia celeritatum utriusque corporis ante conflictum ad celeritatem incurrentis post eundem. *Q. e. d.*

THEOREMA 113.

605. *Si corpus elasticum majus incurrat in minus quiescens, celeritatem majorem ea, qua fertur, sed dupla minorem eidem communicat.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in corpus minus m quiescens: erit celeritas corporis m post conflictum $2MC : (M+m)$ (§. 571), hoc est, si $M=m+n$, $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$.

Est igitur celeritas corpori minori m communicata per conflictum a corpore M ad celeritatem hujus ante conflictum $= \frac{2mC+2nC}{2m+n} : C = 2mC+2nC : 2mC+nC$ (*§. 181. Arithm.*) $= 2m+2n : 2m+n = 2 : 1+\frac{n}{m+n}$. Est igitur celeritas corporis minoris major quam fuerat impingentis ante conflictum, sed minor quam dupla ejusdem: nimirum si dupla foret, antecedens rationis esse deberet $2+2n:(m+n)$. Idem etiam patet si celeritatem corpori minori acquisitam $\frac{2mC+2nC}{2m+n}$ dividas per $2m+n$; prodit enim $C+\frac{nC}{2m+n}$. Est vero $C+\frac{nC}{2m+n} > C$ (§. 84. *Arithm.*). Jam vero $\frac{nC}{2m+n} : C = nC : (2m+n)C = n : 2m+n$. Sed $n < 2m+n$ (*§. 20. Arithm.*). Ergo $\frac{nC}{m+n} < C$ (§. 151. *Arithm*). *Q. e. d.*

THEOREMA 114.

606. *Si corpus elasticum majus in minus quiescens incurrat, minus post conflictum movetur celeritate composita ex ea, qua majus ferebatur ante conflictum, & ex altera, qua post conflictum idem incedit.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat corpus M celeritate C in alterum quiescens m, sitque $M=m+n$; patet ex demonstratione theorematis praecedentis corporis m celeritatem post conflictum esse $C+\frac{nC}{2m+n}$. Enimvero celeritas corporis M post conflictum $= \frac{MC-mC}{M+m}$ (§. 571) =

mC

$\frac{mC + nC - mC}{2m + n} = \frac{nC}{2m + n}$.

Componitur adeo celeritas corporis *m* ex celeritate C, quam habebat majus M ante conflictum, & ex celeritate $\frac{nC}{2m+n}$, quæ est eidem post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 115.

607. *Si celeritas corporis elastici majoris in aliud minus quiescens incurrentis fuerit ut summa massarum utriusque corporis; minori dat celeritatem, quæ est ut duplum sui, amittit vero celeritatem, quæ est ut duplum minoris corporis.*

DEMONSTRATIO.

Si corpus minus *m*, in quod majus M celeritate C incurrit, quiescit; celeritas ejus post conflictum est $\frac{MC - mC}{M + m}$ & minori dat celeritatem $\frac{2\,MC}{M + m}$ (§. 571). Est vero C = M + *m per hypoth.* Ergo celeritas majoris sive incurrentis = M−*m*, quæ differt a celeritate initiali M + *m* quantitate 2 *m*. Amittit igitur corpus M in conflictu celeritatem, quæ est ut duplum corporis minoris. *Quod erat unum.*

Sed celeritas corpori minori ex conflictu acquisita erit 2 M, adeoque ea est ut duplum corporis majoris incurrentis. *Q. e. d.*

THEOREMA 116.

608. *Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit celeritate, quæ est ut massarum utriusque corporis summa; dat ei celeritatem, quæ est ut duplum sui; sed celeritatem amittit, quæ est ut duplum majoris.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus *m* celeritate C in corpus majus M incurrit, corporis majoris M celeritas post conflictum $\frac{2\,mC}{M + m}$ & celeritas ipsius post eundem $\frac{mC - MC}{M + m}$ (§. 571). Est vero C ut M + *m per hypoth.* Ergo celeritas majoris ut 2*m* seu duplum minoris; minoris vero sive incurrentis ut *m*−M. Differentia vero inter M + *m* & *m* − M est 2M. Celeritas igitur in ictu amissa est ut duplum corporis M. *Q. e. d.*

THEOREMA 117.

609. *Si corpus elasticum minus in aliud majus quiescens incurrit, post conflictum semper resilit eique celeritatem sua minorem dat.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrat in majus M; erit celeritas majoris M post conflictum $\frac{2mC}{M+m}$, minoris vero seu incurrentis $\frac{mC-MC}{M+m}$ (§. 571). Nimirum in formula generali literæ M & m permutantur, quia ibi M percutiens, hic vero m percutiens est. Jam vero celeritas incurrentis ante conflictum $C=\frac{MC+mC}{M+m}$. Quare si ponamus $M=m+n$ (§. 20. *Arithm.*): erit celeritas minoris ante conflictum $=\frac{2mC+nC}{2m+n}$, majoris vero post eundem $\frac{2mC}{2m+n}$. Est igitur majori acquisita minor dupla celeritate incurrentis (§. *cit.*) *Quod erat unum.*

Jam cum sit $M=m+n$, erit celeritas minoris post conflictum $\frac{mC-mC-nC}{2m+n}=\frac{-nC}{2m+n}$, adeoque negativa. Post conflictum itaque tendit in plagam contrariam ei, in quam ante eundem movebatur (§. 571). Corpus igitur minus m semper resilit post conflictum. *Q. e. d.*

THEOREMA 118.

610. *Si corpus elasticum minus in aliud quiescens incurrit, celeritas utriusque post conflictum simul æquatur celeritati incurrentis ante eundem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si corpus m celeritate C incurrit in majus M atque $M=m+n$; erit celeritas majoris post conflictum $=\frac{2mC}{2m+n}$; minoris vero non habita ratione directionis $=\frac{nC}{2m+n}$: quemadmodum ex demonstratione propositionis præcedentis intelligitur. Summa igitur celeritatum post conflictum est $\frac{2mC+nC}{2m+n}=C$. *Q. e. d.*

THOREMA 119.

611. *Si corpus elasticum unum* A *incurrat in duo elastica* B *&* C, *quorum* B *sit majus quam* A *&* C *vicissim majus quam* B, *atque corpus* C *mediante altero* B *percutit; majorem corpori* C *celeritatem dat, quam si idem immediate seu corpore* B *non interveniente percuteret.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Sint masſæ corporum A, B & C = M, nM & niM, celeritas incurrentis = C. Cum ſit ut ſumma masſarum ad duplam masſam incurrentis ita celeritas percutientis ad celeritatem percusſi (§. 574); erit $M + nM : 2M = C : \frac{2MC}{M + nM}$, quæ eſt celeritas corpori B acquiſita. Quodſi jam hac celeritate corpus B in C impingat, ſeu idem urgeat; erit $nM + niM : 2nM = \frac{2MC}{M+nM} : \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)}$ quæ eſt celeritas corpori C interventu corporis B acquiſita. Si corpus A immediate percuteret corpus C; foret $M + niM : 2M = C : \frac{2MC}{M+niM}$, quæ eſt celeritas corpori C acquirenda, ſi corpus A immediate ſeu absque interventu corporis B idem percuteret. Fſt adeo celeritas mediata corporis C ad immediatam $= \frac{4nM^2C}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{2MC}{M+niM} = \frac{2nM}{(M+nM)(nM+niM)} : \frac{1}{M+niM} = 2nM^2 + 2n^2iM^2 : nM^2 + niM^2 + n^2M^2 + n^3iM^2 = 2n + 2n^2i : n + ni + n^2 + n^2i$. Eſt vero $n + n^2i = n(1 + ni) > ni + n^2 = n(i + n)$, quia $ni > i + n$, adeoque $2n + 2n^2i > n + n^2 n^2 i + ni$ (§. 90. *Arithm.*). Patet igitur celeritatem corporis C interventu alterius B a corpore A percusſi esſe majorem ea, quam acciperet ſi a corpore A immediate percuteretur.

E. gr. Sit masſa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, erit celeritas corporis C mediante corpore B acquiſita ad eam, quam immediate ex ictu a corpore A acquireret, (ob $n = 2$ & $i = 3$), ut $4 + 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 28 : 24 = 7 : 6$. Eſt igitur celeritas mediata major immediata. Sit ſimiliter M = 2, $n = 3$, $i = 5$; erit $ni = 15$, $n^2i = 45$, adeoque celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 6 + 90 : 3 + 15 + 9 + 45 = 96 : 72 = 4 : 3$. Eſt igitur denuo celeritas mediata major immediata.

THEOREMA 120.

612. *Si corpus elaſticum unum A in aliud ſegnius motum, ſed majus B incurrat, & hoc celeritate per conflictum modificata percutiat corpus C quieſcens, ſed ſe itidem majus; corpus C majore celeritate feretur, quam ſi immediate a corpore A percuteretur.*

DEMONSTRATIO.

Sit masſa corporis A = M, masſa ſecundi B = nM & tertii C = niM,

celeritas corporis A = C, corporis B vero = lC. Incurrat jam corpus A in corpus B; erit celeritas corporis B = $\frac{2MC + nlMC - lMC}{M + nM}$ = (§. 571). Quodsi idem corpus A in tertium C quiescens incurreret, foret hujus celeritas = $\frac{2MC}{M + niM}$. Incurrat jam corpus B celeritate per conflictum cum corpore A modificata in quiescens C; erit celeritas corporis C = $\frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)}$ (§. cit.). Est igitur celeritas mediata corporis C ad celeritatem immediatam = $\frac{4nM^2C + 4n^2lM^2C - 2nlM^2C}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{2MC}{M + niM} = \frac{2nM + 2n^2lM - nlM}{(M + nM)(nM + niM)} : \frac{1}{M + niM}$ $= (2n + 2n^2l - nl)(1 + ni) : (1 + n)(n + ni) = 2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il : n + ni + n^2 + n^2i$. Est vero $n + n^2i > n^2 + ni$, adeoque $2n + 2n^2l - nl + 2n^2i + 2n^3il - n^2il \geq n + ni + n^2 + n^2i$. Quamobrem celeritas mediata major est immediata.

E. gr. Sit massa corporis A = 1, alterius B = 2, tertii C = 3, adeoque $n = 2$, $i = 3$. Sit porro $l = 2$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $4 + 16 - 4 + 24 + 96 - 24 : 2 + 6 + 4 + 12 = 112 : 24 = 14 : 3$. Est itaque celeritas mediata major immediata.

Sint omnia ut ante, sed $l = \frac{1}{2}$. Erit celeritas mediata corporis C ad immediatam $= 4 + 4 - 1 + 24 + 48 - 12 : 2 + 6 + 4 + 12 = 67 : 24$. Est adeo celeritas mediata denuo major immediata.

PROBLEMA 103.

613. *Invenire corpus B interponendum inter duo alia corpora A & C, ut corpus C quiescens a corpore A data celeritate moto percussum maximam acquirat celeritatem, quam ex percussione istiusmodi habere potest.*

RESOLUTIO.

Sit celeritas, qua corpus A movetur = V. Incurrat A in B quiescens; erit hujus celeritas post conflictum = $\frac{2AV}{A + B}$ (§. 571). Incurrat jam corpus B celeritate hac acquisita in tertium C quiescens; erit corporis C celeritas post conflictum = $\frac{4ABV}{AB + B^2 + AC + BC}$ (§. cit.). Quoniam celeritas hæc maxima est, quam corpus C ex istiusmodi percussione acquirere valet per

per hypoth. erit differentiale ejus nihilo æquale (§. 63. *Anal. infin.*). Jam cum A, C & V sint quantitates constantes, B vero sola sit variabilis, facta differentiatione (§. 19. *Analyſ. infin.*) reperitur

$$(4A^2VB\,dB + 4AB^2V\,dB + 4A^2CV\,dB + 4ABCV\,dB - 4A^2CV\,dB - 8AB^2V\,dB - 4ACBV\,dB) : (AB + B^2 + AC + BC^2)^2 = 0,$$ hoc est,

$$4A^2CV\,dB - 4AB^2V\,dB = 0$$

$$AC - B^2 = 0$$

$$AC = B^2$$

Unde prodit A : B = B : C (§. 301. *Arithm.*).

Theorema. Si corpus B, cujus interventu aliud C quiescens a corpore A quacunque celeritate percutitur, fuerit medium proportionale inter percutiens & percussum; celeritatem ei dabit maximam, quam interventu cujusdam corporis ei communicare valet.

COROLLARIUM.

614. Quodsi ergo series fuerit corporum in continua proportione crescentium, ultimum acquiret celeritatem maximam, quam a priori ex percussione tot corporum interventu acquirere valet, quæ continuo crescunt.

SCHOLION.

615. *Hoc pacto corporibus per conflictum celeritatem communicari posse, quæ fidem omnem superare videtur, calculus probat &* Hugenius (x) *exemplo illustri docuit. Idem valet si corpora continuo decrescant.*

PROBLEMA 104.

616. *Determinare motum corporum* A & B *oblique impingentium, sive elasticorum, sive elateris expertium post conflictum.*

RESOLUTIO.

Motus corporis A per AC re- Tab.
solvitur in duos alios secundum IV.
AE & AD & motus corporis B per Fig.
BC similiter in duos alios secun- 55.
dum BF & BG (§. 245) suntque celeritates per AD & BF ad celeritates per AC & BC ut ipsæ rectæ AD, BF, AC, BC (§. 247) Jam cum rectæ AE & BG sint parallelæ, vires secundum has directiones agentes sibi mutuo non opponuntur, adeoque in conflictu insuper habendæ. Sed cum lineæ AD & BF, seu quod perinde est, EC & GC eandem rectam ad DC perpendicularem constituant, perinde est ac si corpora A & B solis velocitatibus, quæ sunt ut EC &

Bb 3 GC,

(x) de Motu corporum ex percussione prop. 13.

GC, directe sibi mutuo occurrerent (§. 523.). Determinetur itaque celeritas corporum A & B juxta superiora. Sit e. gr. corporis A resilientis celeritas ut CH. Quoniam motus per AE in conflictu non mutatur, fiat CK = AE & compleatur parallelogrammum HCKI; diagonalis CI designabit motum corporis A post conflictum, movebitur nempe post ictum corpus A juxta directionem CI & celeritate ut CI (§. 241.). Eodem modo reperitur, corpus B resiliens moveri per diagonalem parallelogrammi CM, in quo LM = BG. Sunt adeo celeritates post ictum ut CI ad CM. Quodsi post conflictum corpora A & B versus eandem plagam tendant, utrumque parallelogrammum infra DC construitur.

CAPUT XIII.

DE

VI CENTRIFUGA ET CENTRIPETA.

DEFINITIO 65.

617. *Vis centrifuga* est vis, qua mobile circa centrum aliquod revolutum ab eo recedere conatur.

Tab. V. Fig. 56. E. gr. Si corpus in peripheria circuli movetur, in quovis puncto A conatur progredi per tangentem AD (§. 71.) &, si nihil obstaret, actu progrederetur, adeoque eodem tempore, quo arculum AE describit, a centro recederet quantitate rectæ DE ad AD perpendicularis per vim centrifugam (§. 245).

COROLLARIUM.

618. Est adeo vis centrifuga ut recta DE ad AD perpendicularis, si arcus AE infinite parvus (§. 245.).

DEFINITIO 66.

619. *Vis centripeta* est vis, qua mobile per rectam AG progressurum retrahitur a motu rectilineo, ut in curva incedat.

COROLLARIUM 1.

620. Est itaque vis centripeta ut recta DE, si arculus AE infinite parvus.

COROLLARIUM 2.

621. Et hinc vis centripeta centrifugæ æqualis est (§. 618):

DEFINITIO 67.

622. *Vires centrales* communi nomi-

nomine dicuntur vis centrifuga atque centripeta.

THEOREMA 121.

Tab. V. Fig. 56. 623. *Si duo corpora pondere æqualia eodem vel æquali tempore motu æquabili peripherias circulorum inæqualium describant, erunt vires centrales ut diametri* AB *&* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit arculus AE infinite parvus, adeoque a subtensa non differat. Quia peripheriæ eodem tempore describuntur; si ex centro C ducatur radius CE, erit HK arculus eodem momento descriptus & ad peripheriam minorem ut alter AE ad majorem (§. 137. *Geom.*). Quodsi jam ducantur tangentes AD & HI atque ex punctis E & K ad illas perpendiculares ED & KI, △△ ADE & HIK eodem modo determinantur (§. 119. *Geom.*) adeoque similia sunt (§. 120. *Geom.*), consequenter AE : HK = DE : IK (§. 175. *Geom.*) Sunt vero ut DE ad IK ita vis centralis in circulo majore ad vim centralem in minore (§. 620). Ergo vires centrales sunt ut arcus AE & HK (§. 167. *Arithm.*) consequenter ut peripheriæ circulorum, quas percurrunt, *per demonstrata*, adeoque & ut diametri eorundem (§. 412. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

624. Quodsi ergo vires centrales duorum corporum peripherias circulorum inæqualium describentium fuerint ut diametri, temporibus æqualibus easdem percurrunt.

THEOREMA 122.

625. *Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis est ut arcus infinite parvi* AE *quadratum per diametrum* AB *divisum.* Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Demittatur perpendicularis EM: erit in rectangulo ADEM AM = DE. Quoniam arcus infinite parvus AE a subtensa non differt; erit BA : AE = AE : AM (§. 330. *Geom.*). Est ergo AM = DE = AE^2 : BA (§. 301. *Arithm.*) Quare cum vis centralis sit ut DE (620); erit eadem ut AE^2 : BA. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

626. Cum ergo corpus motu æquabili tempusculis æqualibus arculos æquales AE describat (§. 31); vis centralis, qua corpus in peripheria circuli urgetur, constanter eadem est.

THEOREMA 123.

627. *Si duo corpora diversas pe-* Tab. V. Fig. 56.

peripherias motu æquabili describant, vires centrales sunt in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum.

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut $AE^2 : AB$ ad $HK^2 : HL$ (§. 625), adeoque ut $AE^2 . HL$ ad $HK^2 . AB$ (178. *Anal. finit.*). Sed cum arcus AE & HK eodem tempore describantur, *per hypoth.* erunt iidem ut celeritates (§. 33). Sunt itaque vires centrales in ratione composita ex duplicata celeritatum & reciproca diametrorum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

628. Si celeritates fuerint æquales; erunt vires centrales reciproce ut diametri AB & HL (§. 281. *Arithm.*)

COROLLARIUM 2.

629. Si diametri AB & HL fuerint æquales, hoc est, si utrumque mobile in eadem peripheria, sed dispari celeritate, incedat; erunt vires centrales in ratione duplicata celeritatum (§. *cit. Arithm.*).

THEOREMA 124.

630. *Si duorum mobilium in diversis peripheriis incedentium vires centrales fuerint æquales; erunt diametri circulorum* AB *&* HL *in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Vires enim centrales in eodem instanti sunt $AE^2 : AB$ & $HK^2 : HL$ (§. 625). Quare $AE^2 : AB = HK^2 : HL$ *per hypoth.* consequenter AE^2 $HK^2 = AB : HL$ (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

LEMMA 2.

631. *Quantitatum proportionalium radices sunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim $a : ma = b : mb$ *per hypoth.* Quoniam $\sqrt{ma} = \sqrt{a}. \sqrt{m}$ & $\sqrt{mb} = \sqrt{b}. \sqrt{m}$; erit utique $\sqrt{a} : \sqrt{ma} = \sqrt{b} : \sqrt{mb}$ (§. 149. *Arithm.*) *Q. e. d.*

LEMMA 3.

632. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales sintque totidem aliæ inter se quoque proportionales, si posteriores singulas per singulas priores dividas vel contra; quoti quoque proportionales erunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit $a : ma = b : mb$ & $c : nc = d : nd$ *per hypoth.* Quodsi a per c, ma per nc, b per d, mb per nd dividas; prodibunt $\frac{a}{c}$, $\frac{ma}{nc}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{mb}{nd}$.

Jam cum sit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{n}{m}$ & $\frac{b}{d}$

: mb

$: \frac{mb}{nd} = \frac{nbd}{mbd} = \frac{n}{m}$; erit utique $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$. Eodem modo patet, esse $\frac{c}{a} : \frac{nc}{ma} = \frac{d}{b} : \frac{nd}{mb}$.

Q. e. d.

THEOREMA 125.

ab. V. ig. 6. 633. *Si duo corpora in peripheriis inæquabilibus eadem vi centrali urgentur, tempus in majori est ad tempus in minori in ratione subduplicata diametri majoris* AB *ad minorem* HL.

DEMONSTRATIO.

Sit AB = D, HL = d, celeritas in majori peripheria = C, in minori = c, peripheria major = P, minor = p, tempus per illam = T, per hanc = t; erit $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630), adeoque $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 631). Est vero $P : p = D : d$ (§. 412. *Geom*). Ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 632). Sed $\frac{P}{C}$ & $\frac{p}{c}$ sunt tempora, quibus peripheriæ vel etiam arcus similes, qui peripheriarum rationem habent (§. 170. *Arithm.*), describuntur (§. 39). Ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$ (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

634. Est igitur $T^2 : t^2 = D : d$, (§. 160. *Arithm.*) hoc est, diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, sunt in ratione duplicata temporum.

COROLLARIUM 2.

635. Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$ (§. 630) & $T^2 : t^2 = D : d$ (§. 634) erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$ (§. 167. *Arithm.*), consequenter $T : t = C : c$ (§. 631), hoc est, tempora, quibus peripheriæ aut arcus similes percurruntur a mobilibus, eadem vi centrali impulsis, celeritatum rationem habent.

THEOREMA 126.

636. *Vires centrales sunt in ratione composita ex directa diametrorum & reciproca quadratorum temporum per integras peripherias.*

DEMONSTRATIO.

Sint vires V & v, reliqua ut in demonstratione præcedente: erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C = D : T$ & $c = d : t$ (§. 38). consequenter $C^2 : c^2 = \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$ (§. 260. *Arithm.*), adeoque $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$

$= \frac{D^2}{DT^2} : \frac{dt}{dt^2}$ (185. *Arithm.*) = $\frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 231. *Arithm.*). Est igitur $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 167. *Arithm.*). = $Dt^2 : d\,T^2$ (178. *Arithm.* *Q. e. d.*

THEOREMA 127.

637. *Si tempora, quibus in peripheriis integris aut arcubus similibus mobilia feruntur, sunt ut diametri circulorum, vires centrales sunt reciproce ut eædem diametri.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $T : t = D : d$, *per hypoth.* & $V : v = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ (§. 636); erit etiam $V : v = \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2} = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$ (§. 178. *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

638. Quoniam $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627); erit $\frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d} = d : D$ (§. 167. *Arithm.*), consequenter $C^2 : c^2 = Dd : Dd$ (§. 185. *Arithm.*). Sunt itaque celeritates hoc in casu æquales.

THEOREMA 128.

639. *Si corpus quoddam in peripheria circuli motu uniformi incedat, ea quidem celeritate, quæ acquiritur per altitudinem* AL *cadendo; erit vis centralis ad gravitatem ejus ut dupla altitudo* AL *ad radium* CA. Tab. V. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Eo tempore, quo grave cadit per AL, motu uniformi describeret 2 AL, nempe celeritate, quam cadendo per AL acquisivit & qua per AE movetur (§. 92). Est igitur tempus per AE ad tempus per AL ut AE ad 2 AL (§. 32), & hinc reperitur spatium eodem tempore a gravi cadente percursum, quo percurritur AE, = AL. $AE^2 : 4 AL^2 = AE^2 : 4 AL$ (§. 86). Est vero vis centralis ad gravitatem in eodem corpore in ratione celeritatum, quas vires istæ producunt (§. 280) adeoque spatiorum eodem tempore motu æquabili descriptorum (§. 33). Quare cum spatium eo instanti, quo vi gravitatis conficitur $AE^2 : 4 AL$, sit $AE^2 : BA$ (§. 625); erit vis centralis ad gravitatem ejus ut $AE^2 : BA$ ad $AE^2 : 4AL$, hoc est, ut 4AL ad BA, seu 2AL ad CA (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

640. Quodsi adeo gravitas corporis

ris dicatur G; erit vis centrifuga 2 AL. G : CA.

THEOREMA 129.

641. *Si grave in peripheria circuli æquabili motu feratur ea quidem celeritate, quam acquirit cadendo per altitudinem* AL *dimidio radio æqualem; vis centralis erit gravitati æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Vis centralis est 2 AL. G : CA (§. 640). Quare si $AL = \frac{1}{2} CA$; eadem erit CA. G : CA = G. Q. e. d.

COROLLARIUM.

642. Ergo si gravitati vis centralis æqualis est, ea celeritate in peripheria circuli fertur, quam cadendo per altitudinem radio dimidio æqualem acquirit.

THEOREMA 130.

643. *Si vis centralis gravitati æqualis est, tempus per peripheriam integram est ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium.*

DEMONSTRATIO.

Spatium motu uniformi cum ea celeritate percursum, quæ cadendo per $\frac{1}{2}$ CA acquiritur, est in tempore æquali = CA (§. 92). Quare cum peripheria circuli eadem celeritate uniformiter percurratur (§. 642); erit tempus per peripheriam ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium CA (§. 32). Q. e. d.

THEOREMA 131.

644. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritate inæquali incedant, quæ sit reciproce in ratione subduplicata diametrorum: vires centrales sunt in ratione duplicata distantiarum a centro virium reciproce sumtarum.*

DEMONSTRATIO.

Si celeritates fuerint C & c, diametri D & d, vires V & v; erit $V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d : D$ (§. 260. *Arithm.*). Ergo $V : v = \frac{d}{D} : \frac{D}{d} = d^2 : D^2$ (§. 178. *Arithm.*) $= \frac{1}{4} d^2$ ad $\frac{1}{4} D^2$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, reciproce sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum. Q. e. d.

THEOREMA 132.

645. *Si duo corpora in peripheriis inæqualibus celeritatibus incedunt, quæ sunt reciproce ut diametri; erunt vires centrales reciproce ut cubi distantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

$V : v = \frac{C^2}{D} : \frac{c^2}{d}$ (§. 627). Sed $C : c = d : D$ *per hypoth.* adeoque $C^2 : c^2 = d^2 : D^2$ (§. 260. *Arithm.*) Ergo $V : v = \frac{d^2}{D} : \frac{D^2}{d} = d^3 : D^3$ (§. 178. *Arithm.*) $= \frac{1}{8} d^3 : \frac{1}{8} D^3$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires centrales reciproce sunt ut cubi radiorum seu distantiarum a centro virium. *Q. e. d.*

THEOREMA 133.

646. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus latorum celeritates fuerint reciproce in ratione subduplicata diametrorum; tempora duplicata, quibus integras peripherias aut arcus similes percurrunt, sunt in ratione triplicata distantiarum a centro virium.*

DEMONSTRATIO.

Sint tempora T & t; celeritates C & c, diametri D & d. Cum tam peripheriæ (§. 412. *Geom.*) quam arcus similes (§. 170. *Arithm.*) diametrorum rationem habeant; erit $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 38). Est vero $C : c = \sqrt{d} : \sqrt{D}$, *per hypoth.* Ergo $T : t = \frac{D}{\sqrt{d}} : \frac{d}{\sqrt{D}} = D\sqrt{D} : d\sqrt{d}$ (§. 124 *Analys. finit.*) $= \sqrt{D^3} : \sqrt{d^3}$ (§. 65. *Analys. finit.*), consequenter $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$ (§. 260. *Arithm.*) $= \frac{1}{8} D^3 : \frac{1}{8} d^3$ (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

647. Ergo si vires centrales sunt in reciproca ratione distantiarum a centro subduplicata temporum quadrata, quibus peripheriæ integræ aut arcus similes percurruntur, sunt in triplicata earundem distantiarum (§ 280).

THEOREMA 134.

648. *Si duorum corporum in peripheriis inæqualibus incedentium celeritates fuerint ut diametri reciproce, tempora sunt in ratione duplicata distantiarum a centro.*

DEMONSTRATIO.

Quia $C : c = d : D$, *per hypoth.* & peripheriæ (§. 412. *Geom.*) atque arcus similes (§. 171. *Arithm.*) sunt ut radii, adeoque $T : t = \frac{D}{C} : \frac{d}{c}$ (§. 39); erit $T : t = \frac{D}{d} : \frac{d}{D} = D^2 : d^2$ (§. 124. *Analys. finit.*) $= \frac{1}{4} D^2 : \frac{1}{4} d^2$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, tempora sunt in ratione duplicata radiorum seu distantiarum a centro. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

649. Si ergo vires centrales sunt reciproce ut cubi distantiarum a centro virium,

rium, tempora, quibus integræ peripheriæ aut arcus similes percurruntur, sunt ut quadrata earundem (§. 645).

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 56. 650. *Quodsi supponamus vim centripetam urgere corpus versus centrum* C, *ut pro effectu ejus sumatur portio secantis* EG; *omnia manent ut ante, propterea quod in casu infinite parvi* EG & DE *pro æqualibus haberi possint, atque adeo eadem in utroque casu eruatur mensura vis centralis. Nimirum cum* CA (§. 308. Geom.) & DE per hypoth. *sint perpendiculares ad* AG; *erunt inter se parallelæ* (§. 256. Geom.), *adeoque angulus* GED = ECM (§. 233. Geom.). *Quare cum etiam recti ad* D & M *sint æquales* (§. 145. Geom.); *erit* GE : ED = EC : CM (§. 267. Geom.). *Quoniam sagitta* AM *infinite parva* per hypoth. CM & CA *æquales habentur* (§. 4. Analys. infin.). *Ergo etiam* CM = CE (§. 40. Geom. & §. 87. Arithm.). *Est igitur etiam* GE = DE (§. 149. Arithm.). *Quod vero sit etiam* EG *ut* AE^2 : AB, *quemadmodum supra ostendimus esse* ED (§. 627), *ita evincitur.* AG^2 = NG. EG (§. 379. Geom.), *hoc est, quia in casu arcus* AE *infinite parvi* NG = NE (§. 4. Analys. infinit.), NE. EG = AB. EG = AG^2, *seu, quia arcus infinite parvus* AE *a portiuncula tangentis* AD *assignabiliter non differt*, AB. EG = AE^2. *Unde prodit* EG = AE^2 : AB, *aut quod perinde est, vis centrifuga est ut quadratum arcus infinite parvi per diametrum divisum.*

THEOREMA 135.

651. *Si corpus in linea curva versus easdem partes cava ea lege incedat, ut radius* CB *ex ipso in punctum fixum* C, *quod in eodem plano situm est, ductus areas* BAC, BCE, *&c. describat temporibus proportionales, seu dato tempore æquales: a vi centripeta versus punctum* C *urgetur.* Tab. V. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Progrediatur corpus sola vi insita per rectam seu arcum infinite parvum AB dato minimo quovis instanti: momento itaque altero ab eadem promoveretur per BD ipsi AB æqualem (§. 31) & in directum sitam (§. 72). Sed per vim centripetam à DB retrahitur & per arculum BE incedere cogitur estque △ CAB = △ BEC, *per hypoth.* & ducta recta CD, ob AB = DB, *per demonstrata*, △ CDB = CBA (§. 385. *Geom.*). Ergo △ CDB = △ CEB (§. 87. *Arithm.*), consequenter perpendicula ex E & D in BC demissa æqualia sunt (§. 385. *Geom.*) & hinc DE ipsi FB parallela (§. 226. *Geom.*) Cum adeo vires, quibus urgetur mobile per diagonalem BE parallelogrammi DEFB, agant juxta directiones BD & BF (§. 241), vis centripeta in B

 ten-

tendit ad punctum C. Idem cum eodem modo in quovis alio elemento curvæ demonstretur, patet vim ceutripetam a motu rectilineo versus C retrahere mobile. *Q. e. d.*

THEOREMA 136.

Tab. V. Fig. 57. 652. *Si corpus secundum directionem rectæ* AD *progrediatur & una a vi centripeta ad punctum fixum* C *in eodem plano situm urgeatur; curvam describit versus* C *cavam, cujus areæ quæcunque duobus radiis* AC *&* CB *comprehensæ sunt temporibus, quibus describuntur, proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim insita vel impressa cum agat juxta BD & centripeta juxta BF seu BC, *per hypoth.* viribus conjunctis describitur diagonalis BE parallelogrammi DEFB (§. 241). Quoniam itaque quovis instanti directio mobilis a vi centripeta mutatur, curva describitur, eaque versus C cava, quia quælibet particula curvæ BE a proxima AB versus centrum C declinat. *Quod erat unum.*

Sunt vero ob AB = DB *per hypoth.* ΔΔ ABC & BCD æqualia (§. 385. *Geom.*) & ob ED & BC parallelas (§. 241) ΔΔ BCD & BCE itidem æqualia sunt (§. 385. *Geom.*), consequenter ABC = BCE. Quod cum eodem modo demonstretur de triangulis quotcunque aliis æqualibus tempusculis descriptis; patet, areas rectis ex centro C ductis interceptas temporibus, quibus describuntur, æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 137.

653. *Si mobile in linea curva incedens vi centripeta versus centrum immobile urgetur, celeritas ejus est reciproce ut perpendiculum a centro illo in tangentem Curvæ demissum.* Tab. V. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim temporibus æqualibus describuntur portiunculæ curvæ infinite parvæ AB, BE & intempusculis infinite parvis motus æquabilis; erunt celeritates in A & B ut AB ad BE (§. 33), hoc est, ut bases triangulorum ACB & BCE. Sunt vero triangula ista æqualia *per hypoth.* adeoque bases AB & BE reciproce ut eorum altitudines (§. 393. *Geom.*), hoc est, reciproce ut perpendicula ex centro C in bases AB & BE continuatas, quæ sunt tangentes curvæ in punctis A & B (§. 20. *Analys. in fin.*), demissa (§. 227. *Geom.*). Ergo celeritates in punctis A & B sunt reciproce ut per-

perpendicula ex centro C in tangentes demissa (*§.* 167. *Arithm.*). *Q.e.d.*

DEFINITIO 68.

Tab. XVI. Fig. 161. 654. *Centrum virium* diximus punctum O, ad quod mobile in linea curva revolutum a vi centripeta continuo urgetur. Curva vero, in qua mobile incedit, dicitur *Orbis* vel *Orbitas* item *Trajectoria*.

DEFINITIO 69.

655. *Radius vector* est recta MO ex centro virium O in punctum quodlibet curvæ M ducta, in quo mobile hærere supponitur.

COROLLARIUM.

656. Est adeo radius vector distantia mobilis a centro virium (§. 192. *Geom*.)

THEOREMA 138.

657. *In omni curva vis centralis est in ratione composita ex directa radii vectoris & reciproca radii osculi simplici atque triplicata perpendiculi ex centro virium in tangentem orbis demissi.*

DEMONSTRATIO.

Tangat PN curvam in puncto M, sitque O centrum virium, OM radius vector & CM radius osculi. Ducatur ex O perpendicularis OP ad tangentem PN: ducantur etiam radius vector ON radio alteri MO & radius osculi CR alteri CM infinite propinquus: arcus curvæ M*m* haberi potest pro arcu circuli radio CM descripti (*§.* 313. 314. *Analyʃ. infin.*). Vis centripeta agens versus centrum circuli erit ut *m*R, quæ vero agit versus centrum virium Orbis O ut *m*N. Quoniam radius osculi CM ad tangentem perpendicularis (§. 317. *Analyʃ. infin.*) & *m*RN = CMN + MCR = (§. 239. *Geom.* = CMN ob MCR infinite parvum = o (§. 3. *Analyʃ. infin.*), angulus R recto æqualis, consequenter etiam ipsi P (*§.* 145. *Geom.*). Jam PMO = MNO + MON = MNO ob MON infinite parvum = o (§. 239. *Geom.*). Ergo *m*R : *m*N = PO : MO (*§.* 267. *Geom.*), hoc est, vis centripeta agens versus centrum circuli osculatoris C est ad vim centripetam versus centrum virium O agentem ut PO ad MO *per demonstrata.* Quodsi celeritas, qua arculus M*m* describitur, fuerit = C; erit vis centripeta agens in centrum osculi $C = C^2 : MC$ (§, 627). Est vero C reciproce ut PO, hoc est ut $\frac{1}{PO}$ (§. 653), adeoque vis centripeta agens in centrum osculi = $\frac{1}{PO^2 . MC}$.

Qua-

Quare cum sit *per demonstrata* vis petens centrum osculi ad vim, quæ centrum orbis petit, ut PO ad MO, reperitur tandem vis centripeta agens versus centrum Orbis O $= \frac{MO}{PO^3 . MC}$, atque adeo est in ratione composita ex directa radii vectoris MO, reciproca radii osculi MC & reciproca triplicata perpendiculi ex centro Virium Orbis in tangentem demissi PO. *Q. e. d.*

THEOREMA 139.

658. *Si corpus in peripheria circuli revolvatur & vis centripeta idem urgeat versus punctum fixum* O *in peripheria situm; erit ea in ratione quintuplicata reciproca radii vectoris* OM.

DEMONSTRATIO.

Tab. XVI. Fig. 162. Tangat PR circulum in puncto dato M & ex centro virium ducatur perpendicularis ad tangentem OP atque radius vector OM. Radius circuli MC erit quoque radius osculi (§. 324. *Analys. infin.*). Jam cum CM (§. 308. *Geom.*) & OP *per hypoth.* sint perpendiculares ad PR; erunt inter se parallelæ (§. 256. *Geom.*), consequenter $o = x$ (§. 233. *Geom.*). Quare cum OPM sit rectus *per construct.* & MON itidem rectus (§. 317. *Geom.*); erit MN : MO = MO : OP, (§. 267. *Geom.*), adeoque OP $= \frac{MO^2}{MN}$, consequenter $OP^3 = \frac{MO^6}{MN^3}$. Est vero vis centripeta in M $= \frac{MO}{OP^3 . MC}$ (§. 657). Quare si pro OP^3 substituatur ejus valor $\frac{MO^6}{MN^3}$, prodibit vis centripeta $\frac{MO . MN^3}{MO^6 . MC}$. Sunt vero MN & MC in omni puncto peripheriæ constantes, adeoque ubi tantummodo cum ratione virium centripetarum in diversis punctis peripheriæ negotium fuerit, vis centripeta $\frac{MO}{MO^6}$ seu $\frac{1}{MO^5}$ (§. 178. 181. *Arithm.*), hoc est, in ratione quintuplicata radii vectoris reciproca. *Q. e. d.*

THEOREMA 140.

659. *Si corpus in peripheria circuli revolvitur & vis centripeta ad punctum quodcunque intra circulum datum* O *tendat; erit ea in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris* OM *& triplicata chordæ* AM. Tab. XVI. Fig. 163.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex centro virium O ad tangentem PR perpendicularis OP, itidem chorda BM, sitque in C centrum circuli. Quoniam angulus P *per construct.* & AMB (§. 317. *Geom.*) rectus est ac præterea $o = x$ (§. 323. *Geom.*); erit AB : AM = OM : OP (§. 267. *Geom.*) adeoque $OP = \frac{OM.AM}{AB}$, consequenter $OP^3 = \frac{OM^3.AM^3}{AB^3}$. Est vero vis centripeta in $M = \frac{MO}{OP^3.BC}$ (§. 657. *Mech.* & §. 324. *Analys. infin.*) Quare eadem $= \frac{MO.AB^3}{AM^3.OM^3.BC}$, consequenter cum AB & BC constantes sint, seu in omni puncto curvæ eædem, vis centripeta $= \frac{1}{AM^3.OM^2}$ (§. 178. 181. *Arithm*), hoc est, in ratione composita reciproca ex duplicata radii vectoris OM & triplicata chordæ AM. *Q. e. d.*

THEOREMA 141.

Tab. XVI. Fig. 163. 660. *In omni sectione conica vis centripeta tendens ad focum curvæ est reciproce in ratione duplicata radii vectoris, seu distantiæ a foco.*

DEMONSTRATIO.

Sit AMN sectio conica quæcunque, parabola, ellipsis vel hyperbola. Sit focus in O & in eo centrum virium. Tangat TM sectionem conicam in M. Ducatur radius vector OM & ex O perpendicularis ad tangentem OP. Ducatur præterea MH ad curvam normalis & ex H perpendicularis HR ad radium vectorem OM; erit ob OP & MH parallelas (§. 256. *Geom.*) $o = x$ (§. 233. *Geom.*), adeoque ob rectos ad P & R *per construct.* MO : OP = MH : MR (§. 267. *Geom.*), consequenter $OP = \frac{MO.MR}{MH}$. Est vero MR æqualis semiparametro (§. 418. 438. 504. *Analys. finit.*) adeoque $= \frac{1}{2}a$, si ea dicatur a. Ergo $OP = \frac{MO.\frac{1}{2}a}{MH}$ & ideo $OP^3 = \frac{MO^3.a^3}{8MH^3}$. Porro in omni sectione conica radius osculi $= \frac{4MH^3}{a^2}$ (§. 322. 325. 327. *Anal. infin.*) Quare cum vis centripeta sit ut $\frac{MO}{PO^3.MC}$ substitutis valoribus PO^3 & radii osculi MC reperi-

tur

tur ea $\frac{8 MO.MH^3.a^2}{4MO^3.MH^3.a^3} = \frac{2}{MO^2 a}$, hoc eſt, ob 2 & a conſtantes quantitates in omni puncto curvæ, $= \frac{1}{MO^2}$ (§. 178. 181. *Arithm.*). Vis igitur centripeta tendens ad focum ſectionis conicæ eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ a foco ſeu radii vectoris. *Q.e.d.*

SCHOLION.

661. *Quoniam proprietas hac ſectionibus conicis communis & ex communibus earum proprietatibus fluit; ideo conveniens eſt ut generaliter ex iisdem demonſtretur. Menſuram virium centripetarum ut* $\frac{MO}{PO^3.MC}$ *ſuperius demonſtratam* (§. 657) *invenit* Abrahamus de Moivre, *Geometra eximius. Quod vero eadem conveniat cum menſuris aliorum, quas quantitates infinite parva ingrediuntur, ſequente problemate oſtendere lubet.*

PROBLEMA 106.

662. *Invenire vim centripetam in qualibet curva.*

RESOLUTIO.

Tab. XVI. Fig. 160. Sit O centrum virium, MO radius vector, MC radius oſculi, & OP ad tangentem PM perpendicularis. Deſcribatur ex centro virium O radio vectore MO arcus infinite parvus MK. Fiat MC=n, MO=x; erit mK=dx. Sit porro MK=dz & arculus curvæ Mm =ds: tempus vero per arcum Mm =dt. Quoniam hoc eſt ut ſector OMK (§.652); erit dt = MK. $\frac{1}{2}$MO ſeu ob determinatam quantitatem $\frac{1}{2}$, ut MK. MO (§. 178. *Arithm.*), adeoque ut xdz. Porro cum ad P ſit rectus *per conſtr.* & K rectus (§.38. *Analyſ. infin.*) & ob infinite parvum MOm = o (§. 3. *Analyſ. infin.*) PMO = MmK (§.239. *Geom.*); erit

$$Mm : MK = MO : OP$$
$$ds : dz = x : \frac{xdz}{ds}$$

Eſt igitur $OP^3 = \frac{x^3dz^3}{ds^3}$ & hinc cum

Vis centralis $\frac{MO}{OP^3.MC}$ (§.657)

erit ea $= x : \frac{nx^3dz^3}{ds^3}$

$$= \frac{ds^3}{nx^2dz^3}$$

Eſt vero $dt = xdz$ *per demonſtr.* & hinc $dt^2 = x^2dz^2$

Quare Vis centralis= $\frac{ds^3}{ndzdt^2}$

Atque hic eſt character analyticus unus, quem dedit *Varignonius* (y). *Ali-*

(y) in Comment. A. 1701. p. 28. edit. Bat.

Aliter.

Quoniam angulus CMR rectus (§. 337. *Anal. infin.*); erit MRm ab eodem non differens nisi quantitate infinite parva MCR (§. 239. *Geom.*) itidem rectus (§. 4. *Analys. infin.* & §. 145. *Geom.*) & ex eadem ratione MmR etiam rectus. Quamobrem mR haberi potest pro arculo radio Mm descripto ex centro M (§. 38. *Analys. infin.*). Cum adeo sit Mm = MR (§. 40. *Geom.*); erit RN differentia inter arcum Mm & portionem tangentis MN seu differentia secunda arculi Mm. Unde si Mm = ds, ut ante, RN = dds. Sit porro ut ante MK = dz, MO = x, adeoque Km = dx: tempusculum vero per arculum Mm = dt. Cum MmK + KmC sit rectus (§. 337. *Analys. infin.*). & RNm + RmN itidem rectus (§. 241. *Geom.*); sit vero KmC = RmN (§. 156. *Geom.*); erit MmK = RNm (§. 91. *Arithm.*).

Est vero præterea NRm rectus *per demonstr.* & MKm itidem rectus (§. 38. *Analys. infin.*). Quamobrem (§. 267. *Geom.*)

$$MK : Km = NR : mR$$
$$dz : dx = dds : \frac{ddsdx}{dz}$$

Porro cum CMR sit rectus & Mm rd RC perpendicularis *per demonstr.* erit (§. 327. *Geom.*)

$$mR : mM = mM : mC$$
$$\frac{ddsdx}{dz} : ds = ds : \frac{ds^2dz}{dxdds}$$

Est itaque CM $= n = \frac{ds^2dz}{dxdds}$

Jam vis centralis ante reperta fuit $\frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Quare si substituatur valor radii circuli osculatoris n modo inventus; prodibit vis centralis $= \frac{ds^3dxdds}{ds^2dzdxdt^2} = \frac{dsdds}{dzdt^2}$. Atque hæc est formula altera, quam dedit *Varignonius* (z).

SCHOLION.

663. *Quodsi beneficio harum formularum vis centralis in circulo & sectionibus conicis eruere volueris, quemadmodum ante factum est; multo difficilius idem fieri intelliges, quam in anterioribus a nobis factum est. Sufficit itaque ostendisse, quomodo formula, qua nos usi sumus, in Varignonianas degeneret.*

PROBLEMA 107.

664. *Data lege virium centripetarum & concessis quadraturis, invenire trajectoriam, in qua mobile incedit.*

(z) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1700. p. 288.

RESOLUTIO.

Tab. XVII. Fig. 164. Sit in O centrum virium, AC trajectoria, AO ejus axis, AL arcus radio AO descriptus. Ducantur radii OL & Ol infinite propinqui & radiis OB ac Ob describantur arcus EB & eb. Fiat denique AO$=a$, AL$=z$, OE$=x$; erit Ee=BN$=dx$, L$l=dz$ & ob sectores similes ObN ac OlL (§.138.412.*Geom.*).

$$\mathrm{OL} : \mathrm{L}l = \mathrm{O}b : b\mathrm{N}$$
$$a : dz = x : \frac{xdz}{a}$$

Sit celeritas, qua mobile fertur in B$=c$ & vis centralis$=v$. Quoniam massa mobilis eadem existente sive $=1$, elementum celeritatis dc, quod positivum vel negativum esse potest, prout celeritas vel augetur, vel minuitur, est ut elementum temporis in vim sollicitantem sive centralem ductum (§.113); tempus vero per BN ob motus in spatiolo infinite parvo æquabilitatem ut $\frac{dx}{c}$ (§.39); erit

$$-dc = \frac{vdx}{c}$$
$$-cdc = vdx$$
$$-\tfrac{1}{2}c^2 = \int vdx$$

hoc est, omissa quantitate constante $\frac{1}{2}$, cum hic tantummodo rationum habeatur ratio, (§.187. *Arithm.*) & addita constante homogenea ex lege integrationis (§.95. *Analys. in fin.*)

$$ab - c^2 = \int vdx$$
$$ab - \int vdx = c^2$$
$$V(ab - \int vdx) = c.$$

Quoniam motus per Bb in tempusculo infinite parvo peractus æquabilis, erit spatium Bb $= cdt$ (§.34)

adeoque B$b=dtV(ab-\int vdx)$
Sed dt = BO.bN (§.651)

$$= \frac{x^2dz}{a}$$

Ergo $\mathrm{B}b = \frac{x^2dz(Vab-\int vdx)}{a}$

$$\mathrm{B}b^2 = \frac{x^4dz^2(ab-\int vdx)}{a^2}$$

Jam $\mathrm{BN}^2 = dx^2$
$$b\mathrm{N}^2 = \frac{x^2dz^2}{a^2}$$

$$\mathrm{B}b^2 = dx^2 + \frac{x^2dz^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2dx^2 + x^2dz^2}{a^2}$$

Habe-

Habemus itaque

$$\frac{a^2dx^2 + x^2dz^2}{a^2} = x^4dz^2\,(ab - \int v dx)$$

hoc est, ut observetur lex homogeneorum,

$$a^4c^2dx^2 + a^2c^2x^2dz^2 = x^4dz^2\,(ab - \int v dx)$$

$$a^4c^2dx^2 = x^4dz^2\,(ab - \int v dx) - a^2c^2x^2dz^2$$

$$\frac{a^4c^2dx^2}{x^4(ab - \int v dx) - a^2c^2x^2} = dz^2$$

$$\frac{a^2cdx}{V(abx^4 - x^4\int v dx - a^2c^2x^2)} = dz$$

$$z = \int(a^2cdx : V(abx^4 - x^4\int v dx - a^2c^2x^2))$$

Hæc est æquatio generalis ad trajectoriam, in qua mobile data vi centrali v ad punctum O urgetur, & in qua c denotat quantitatem arbitrariam constantem ex lege homogeneorum assumendam.

SCHOLION.

665. *Æquationem hanc generalem ad trajectoriam invenit* Joannes Bernoulli *problema inversum de trajectoriis, in quibus vires centrales sunt reciproce ut quadrata distantiarum, soluturus ac inde casum hunc specialem non sine artificio deduxit* (a): *majoris enim artis est solvere problema in casu speciali, quam generaliter. Ut vero solutionem nostro more cum primis Matheseos principiis perspicue connectamus, problemata quædam per modum Lemmatum præmittenda sunt.*

PROBLEMA 108.

666. *Invenire æquationem ad parabolam, abscissis a foco computatis.* Tab. XVI. Fig. 160.

RESOLUTIO.

Sit in Parabola $QO = x$, $QM = y$, parameter $= p$; erit $AT = \frac{1}{4}p$ (§. 396. *Analys. fin.*) adeoque $AQ = \frac{1}{4}p + x$, consequenter $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + px$ (§. 388. *Analys. fin.*). Q. e. i. & d.

PROBLEMA 109.

667. *Invenire æquationem ad Ellipsin abscissis a foco computatis.* Tab. XVII. Fig. 165.

RESOLUTIO.

Sit in F focus ellipsis & in C centrum. Fiat $AB = m$, parameter $= p$, $CP = x$: erit $FA = \frac{1}{2}m - V(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm)$ (§. 427. *Analys. fin.*), adeoque

$$AP = \tfrac{1}{2}m - V(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm) - x$$
$$PB = \tfrac{1}{2}m + V(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm) + x.$$

$$AP.PB = \tfrac{1}{4}pm - 2xV(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm) - x^2$$

 Jam

(a) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 691. & seqq.

Jam ex natura Ellipseos (§. 420. *Analys. fin.*)

$y^2 : \frac{1}{4}pm - 2xV(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm) - x^2 = p : m$

Ergo

$y^2 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{2px}{m}V(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}pm) - \frac{px^2}{m}$. *Q. e. i. & d.*

PROBLEMA 110.

Tab. XVI. Fig. 163. 668. *Invenire æquationem ad Hyperbolam abscissis a foco computatis.*

RESOLUTIO.

Sit focus hyperbolæ in O, centrum C, axis dimidius transversus CA. Sit $2AC = m$, parameter $= p$, $OQ = x$, $QM = y$: erit $AF = V(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) - \frac{1}{2}m$ (§. 463. *Anal. fin.*), adeoque

$AP = V(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) - \frac{1}{2}m + x$

$AP + 2AC = V(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) + \frac{1}{2}m + x.$

$AP(AP + 2AC) = \frac{1}{4}pm + 2xV(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) + x^2$

Quare cum sit ex natura Hyperbolæ (§. 459. *Analys. fin.*)

$y^2 : \frac{1}{4}pm + 2xV(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) + x^2 = p : m$

erit

$y^2 = \frac{1}{4}p^2 + \frac{2px}{m}V(\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}pm) + \frac{px^2}{m}$

Q. e. i. & d.

PROBLEMA 111.

669. *Invenire trajectoriam, in qua mobile incedit, si vis centripeta, qua urgetur, fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris.* Tab. XVII. Fig. 165.

RESOLUTIO.

Quoniam in solutione generali radium vectorem diximus x, erit vis centralis $v = \frac{1}{x^2} = \frac{a^2g}{x^2}$, servata lege homogeneorum, ut commode valor in formula generali substitui possit. Cum itaque elementum arcus $Ll = dz$ (§. 664) in casu generali; $= \frac{a^2c^2dx}{V(abx^4 - x^4\int vdx - a^2c^2x^2)}$ erit idem in casu speciali $\frac{a^2c^2dx}{xV(abx^2 - x^2\int\frac{a^2gdx}{x^2} - a^2c^2)}$

Sed $\int\frac{a^2gdx}{x^2} = \int a^2gx^{-2}dx - a^2gx^{-1}$

Quare $dz = \frac{a^2c^2dx}{xV(abx^2 + a^2gx - a^2c^2)}$

Cum dz sive Ll sit elementum arcus a forma ordinaria discedens, ut ad eam reducatur, fiat

$x =$

$$x = \frac{a^2}{y}$$

erit $dx = -\frac{a^2 dy}{y^2}$ $x^2 = \frac{a^4}{y^2}$

adeoque $dz = -a^4c^2dy : y^2 \over \frac{a^2}{y} V(\frac{a^3b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2)$

$$= -\frac{a^4c^2dy}{a^2yV(\frac{a^3b}{y^2} + \frac{a^4g}{y} - a^2c^2)}$$

$$= -\frac{a^4c^2dy}{a^2V(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}$$

$$= -\frac{ac^2dy}{V(a^3b + a^2gy - c^2y^2)}$$

Fiat porro $y = \frac{a^2g}{2c^2} - t$

erit $y^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^2gt}{c^2} + t^2$.

adeoque $-c^2y^2 = -\frac{a^4g^2}{4c^2} + a^2gt - c^2t^2$

$$a^2gy = \frac{a^4g^2}{2c^2} - a^2gt$$

$$dy = -dt$$

Unde tandem habetur

$$dz = \frac{acdt}{V(a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} - c^2t^2)}$$

Fiat denique $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = c^2b^2$

erit $dz = \frac{acdt}{cV(b^2 - t^2)}$

$$\frac{dz}{a} = \frac{dt}{V(b^2 - t^2)}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{bdt}{V(b^2 - t^2)}$$

Habemus adeo elementum circuli $\frac{bdt}{V(b^2-t^2)}$, cujus radius b, ſinus rectus t (§. 153. *Anal. infin.*), per radium b diviſum & $\frac{dz}{a}$ eſt itidem elementum circuli Ll per radium LO diviſum vi denominationis in ſolutione generali (§. 664) facta. Jam dato radio datoque arcu, datur angulus (§. 57. *Geom.*), atque adeo ratio arcus ad radium, conſequenter arcus per radium diviſus (§. 129. *Arithm.*), exprimit angulum, nempe $\frac{dz}{a}$ angulum LOl, & $\int \frac{dz}{a}$ angulum AOL, pariterque $\frac{bdt}{bV(b^2-t^2)}$ angulum priori LOl & $\int \frac{bdt}{bV(b^2-t^2)}$ alium poſteriori AOL æqualem, cujus radius b, ſinus totus t. Unde jam fluit conſtructio curvæ ABC iſtiusmodi.

Radio

Radio $h = \sqrt{\left(\frac{a^3b}{c^2} + \frac{a^4g^2}{4c^4}\right)}$ describatur Quadrans MKT sumtoque arcu AL $= z$ pro arbitrio ducatur recta OL secans quadrantem istum in K, erit arcus KM $= \int \frac{hdt}{\sqrt{(h^2-t^2)}}$ & KI $= t$.

Jam porro inveniri potest radius OB sive OE. Quoniam enim

$$y = \frac{a^2g}{2c^2} - t = \frac{a^2g-2c^2t}{2c^2}$$

$$\& \quad x = \frac{a^2}{y}$$

$$\text{erit } x = \frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$$

$$= \frac{2c^2}{\frac{g-2c^2t}{a^2}}$$

Est igitur $a : c = c : \frac{c^2}{a}$ & $a : t = \frac{c^2}{a} : \frac{c^2t}{a^2}$, ac denique $g-\frac{2c^2t}{a^2} : c = c : \frac{c^2}{g-2c^2t:a}$. Quodsi recta OB hoc modo inventa ex centro O describatur arcus EB, intersecabit is radium O in B eritque punctum B in trajectoria quæsita.

PROBLEMA 112.

670. *Invenire æquationem ad trajectoriam, in qua vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro virium.* Tab. XVII. Fig. 167.

RESOLUTIO.

Sit OQ $= \frac{a^2g}{2c^2}$ & OP $= t$; erit PQ $= \frac{a^2g}{2c^2} - t = y$ (§. 669).

Quoniam OB $= x = \frac{a^2}{y}$; si intra asymptotos QG & QR describatur hyperbola GNV, latere potentiæ existente $= a$ (§.489. *Analys. finit.*) erit PN $= z$ (§.488. *Analys. finit.*). Fiat jam OF $=$, FB $= y$, reliqua sint ut ante; erit (§.268. *Geom.*):

$$\text{OP} : \text{OS} = \text{OF} : \text{OB}$$

$$t : h = x : \frac{hx}{t}$$

Sed OB $= \frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$ (§.669).

Ergo $\frac{hx}{t} = \frac{2a^2c^2}{a^2g-2c^2t}$

$$a^2ghx - 2c^2htx = 2a^2c^2t$$

$$a^2ghx = 2c^2htx + 2a^2c^2t$$

$$\frac{a^2ghx}{2c^2hx + 2a^2c^2} = t$$

Porro

Porro (*§. cit. Geom.*)

$$OP : PS = OF : FB$$
$$t : \sqrt{(b^2 - t^2)} = x : y$$

$$x\sqrt{(b^2 - t^2)} = ty$$

$$b^2x^2 - t^2x^2 = t^2y^2$$

$$b^2x^2 = t^2x^2 + t^2y^2$$

$$\frac{b^2x^2}{x^2 + y^2} = t^2$$

Est vero etiam *per demonstrata*

$$t^2 = \frac{a^4g^2b^2x^2}{a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$

Habemus igitur

$$\frac{b^2x^2}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2b^2x^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{a^4g^2}{4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2}$$

$$4a^4c^4 + 8a^2c^4bx + 4c^2b^2x^2 = a^4g^2x^2 + a^4g^2y^2$$

$$y^2 = \frac{4c^2b^2x^2}{a^4g^2} - x^2 + \frac{8c^4bx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2}$$

Quæ est æquatio ad Trajectoriam quæsitam. Cum ea sit quadratica, erit ad sectionem conicam. Habemus itaque

Theorema. Si corpus in trajectoria urgetur a vi centripeta, quæ est reciproce ut quadratum distantiæ a centro virium; erit trajectoria ista aliqua sectio conica.

Ut appareat, ad quamnam sectionem conicam sit æquatio; comparetur ea cum æquationibus singularum sectionum conicarum, quas ante reperimus, abscisis a foco computatis. Quoniam pro Parabola, cujus parameter $= p$, (*§. 666*).

$$y^2 = 4p^2 + px$$

Æquatio vero ad trajectoriam *per demonstr.*

$$y^2 = \frac{4c^4b^2x^2}{a^4g^2} - x^2 + \frac{8c^4bx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2}$$

ob deficientem in Parabola secundum terminum erit

$$\frac{4c^4b^2}{a^4g^2} - 1 = 0$$

$$4c^4b^2 = a^4g^2.$$

$$b^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4}$$

$$b = \frac{a^2g}{2c^2}$$

Est vero per constructionem h = OT=OS & $\frac{a^2g}{2c^2}$ = OQ.

Trajectoria igitur parabola est, si OT=OQ.

In calculo sumsimus

$$h = \sqrt{\left(\frac{a^3b}{c^2} + \frac{a^4g^2}{4c^4}\right)}$$

in casu parabolæ

$$\frac{a^3b}{c^2} = 0$$

adeoque $b = 0$

$$p = \frac{8c^4h}{a^4g^2} \qquad \tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$= \frac{8c^4a^2g}{2a^2c^2g^2} \qquad p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$= \frac{4c^2}{g} \qquad p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo parabolæ est tertia proportionalis ad g & $2c$.

Æquatio pro ellipsi abscissis a foco computatis est (§. 667),

$$y^2 = -\frac{px^2}{m} - \frac{2px}{m}\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}pm\right)} + \tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad trajectoriam per demonstrata

$$y^2 = \frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2} + \frac{8c^4hx}{a^2g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Habemus itaque

$$\tfrac{1}{4}p^2 = \frac{4c^4}{g^2}$$

$$p^2 = \frac{16c^4}{g^2}$$

$$p = \frac{4c^2}{g}$$

Parameter adeo eadem, quæ in parabola.

Porro $-\frac{p}{m} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2} - 1$

hoc est $1 - \frac{4c^2}{mg} = \frac{4c^4h^2}{a^4g^2}$

$$a^4g^2 - \frac{4a^4c^2g}{m} = 4c^4h^2$$

$$h^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2}\right)}$$

In Ellipsi adeo $\frac{a^2g}{2c^2} > h$

hoc est, OQ > OT

Quod-

Quodsi ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$$-\frac{2p}{m}V(\tfrac{1}{4}m^2-\tfrac{1}{4}pm)=\frac{8c^4h}{a^2g^2}$$

hoc est, $-\frac{8c^2}{mg}V(\frac{1}{4}m^2-\frac{c^2m}{g})=$

$$-V(\tfrac{1}{4}m^2-\frac{c^2m}{g})=\frac{mc^2h}{a^2g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2-\frac{c^2m}{g}=\frac{m^2c^4h^2}{a^4g^2}$$

$$\tfrac{1}{4}m-\frac{c^2}{g}=\frac{mc^4h^2}{a^4g^2}$$

$$a^4g^2m-4a^4c^2g=4mc^4h^2$$

$$a^4g^2m-4mc^4h^2=4a^4c^2g$$

$$m=\frac{4a^4c^2g}{a^4g^2-4c^4h^2}$$

Æquatio pro hyperbola abcissis a foco computatis est (§. 668).

$$y^2=\frac{px^2}{m}+\frac{2px}{m}V(\tfrac{1}{4}m^2+\tfrac{1}{4}pm)+\tfrac{1}{4}p^2$$

Æquatio ad trajectoriam est

$$y^2=\frac{4c^4h^2x^2}{a^4g^2}+\frac{8c^4hx}{a^2g^2}+\frac{4c^4}{g^2}-x^2$$

$$\tfrac{1}{4}p^2=\frac{4c^4}{g^2}$$

$$\tfrac{1}{2}p=\frac{2c^2}{g}$$

$$p=\frac{4c^2}{g}$$

Eadem ergo parameter in hyperbola, quæ in ceteris sectionibus conicis.

$$\frac{p}{m}=\frac{4c^4h^2}{a^4g^2}-1$$

hoc est $\frac{4c^2}{gm}=\frac{4c^4h^2-a^4g^2}{a^4g^2}$

$$4a^4c^2g^2=4c^4h^2gm-a^4g^2m$$

$$4a^4c^2g^2+a^4g^2m=4c^4h^2gm$$

$$\frac{4a^4c^2g+a^4g^2m}{4c^4m}=h^2$$

$$V(\frac{a^4g^2}{4c^4}+\frac{a^4g}{c^2m})=h$$

Jam cum QO $=\frac{a^2g}{2c}$ & TO $=h$, sitque $\frac{a^2g}{2c}<h$; erit QO $<$ TO, quando trajectoria hyperbola.

Si ulterius desideretur valor ipsius m, fiat

$$\frac{2p}{m} V\left(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm\right) = \frac{8c^4 h}{a^2 g^2}$$

hoc eſt, ob $p = \frac{4c^2}{g}$,

$$\frac{8c^2}{gm} V\left(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm\right) = \frac{8c^4 h}{a^2 g^2}$$

$$V\left(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm\right) = \frac{mc^2 h}{a^2 g}$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}pm = \frac{m^2 c^4 h^2}{a^4 g^2}$$

$$m + p = 4\frac{mc^4 h^2}{a^4 g^2}$$

hoc eſt, $m + \frac{4c^2}{g} = \frac{4mc^4 h^2}{a^4 g^2}$

$$a^4 g^2 m + 4a^4 c^2 g = 4mc^4 h^2$$

$$4a^4 c^2 g = 4mc^4 h^2 - a^4 g^2 m$$

$$\frac{4a^4 c^2 g}{4c^4 h^2 - a^4 g^2} = m$$

Quodſi datis m & p per literas aſſumtitias h, c, g & b harum] valores deſiderentur per m & p, æquationum reductione facta facile determinantur.

Eſt enim $p = \frac{4c^2}{g}$ $h = \frac{a^2 g}{2c^2}$

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad c^2 = \frac{a^2 g}{2h}$$

$$c^2 = \tfrac{1}{4}pg$$

$$\tfrac{1}{4}pg = \frac{a^2 g}{2h}$$

$$p = \frac{2a^2}{h}$$

$$h = \frac{2a^2}{p}$$

Si ergo p datur & c pro arbitrio aſſumitur, cum in omni ſectione conica ſit $p = 4c^2 : g$, valor ipſius g omni ſectioni conicæ reſpondet. Aſt cum in parabola tantummodo ſit $h = a^2 g : 2c^2$; valor ipſius h per a & p determinatus parabolæ proprius. Unde ſi valores quantitatum g & h modo repertos ſubſtituas in æquatione ad trajectoriam, in æquationem ad parabolam abſciſſis a foco computatis eadem degenerat. Nimirum æquatio ad trajectoriam (§. 670.)

$$y^2 = \frac{4c^4 h^2 x^2}{a^4 g^2} + \frac{8c^4 h x}{a^2 g^2} + \frac{4c^4}{g^2} - x^2$$

Porro

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad h = \frac{2a^2}{p}$$

$g^2 =$

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \qquad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Quare

$$\frac{4c^4h^2}{a^2g^2} = \frac{16a^4c^4p^2}{16a^4c^4p^2} = 1$$

Coëfficiens itaque ipsius $x^2 = 1 - 1 = 0$, atque adeo hic terminus in æquatione, quæ quæritur, deficit.

$$\frac{8c^4h}{a^2g^2} = \frac{16a^2c^4p^2}{16a^2c^4p} = p$$

$$\frac{4c^4}{g^2} = \frac{4c^4p^2}{16c^4} = \tfrac{1}{4}p^2$$

Unde prodit æquatio $y^2 = px + \frac{1}{4}p^2$, quæ est ad parabolam abscissis a foco computatis (§. 666).

Quodsi valor ipsius h in ellipsi vel hyperbola desideretur, in æquationibus $h^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} - \frac{a^4g}{mc^2}$ & $h^2 = \frac{a^4g^2}{4c^4} + \frac{a^4g}{mc^2}$ substituendus est valor ipsius g. Nimirum

$$g = \frac{4c^2}{p} \qquad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo $h^2 = \frac{16a^4c^4}{4c^4p^2} \mp \frac{4a^4c^2}{mpc^2}$

$$= \frac{4a^4}{p^2} \mp \frac{4a^4}{mp}$$

$$= \frac{4a^4m \mp 4a^4p}{mp^2}$$

$$h = \frac{2a}{p}\sqrt{\left(1 \mp \frac{p}{m}\right)}$$

Si denique valor ipsius b desideretur, in æquatione $a^3b + \frac{a^4g^2}{4c^2} = cb^2$ substituendus est valor ipsius g^2 & h^2.

In parabola

$$g^2 = \frac{16c^4}{p^2} \quad h^2 = \frac{4a^4}{p^2}$$

Unde $a^3b + \frac{16a^4c^4}{4c^2p^2} = \frac{4a^4c^2}{p^2}$

h. e. $a^3b + \frac{4a^4c^2}{p^2} = \frac{4a^4c^2}{p^2}$

$$a^3b = 0$$

$$b = 0$$

Quemadmodum jam supra reperimus.

In Hyperbola

$$h^2 = \frac{4a^4m + 4a^4p}{mp^2} \quad g^2 = \frac{16c^4}{p^2}$$

Ergo $a^3b + \frac{16a^4c^4}{4c^2p^2} = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4c^2p}{mp^2}$

$$a^3b = \frac{4a^4mc^2 + 4a^4pc^2}{mp^2} - \frac{4a^4c^2}{p^2}$$

 $= 4$

$$= \frac{4a^4c^2}{mp}$$

$$b = \frac{4ac^2}{mp}$$

In ellipsi idem prodit valor, sed negativus.

SCHOLION.

671. *A theoria virium centralium pendet solutio problematis de curva, in qua grave descendens eandem ubique premit vi ponderi absoluto æquali: quod* a Johanne Bernoulli *propositum* (b) *solvit* Hospitalius (c). *Ejus igitur solutionem hic subnectere libet.*

PROBLEMA 113.

Tab. XVII. Fig. 168. 672. *Invenire curvam, in qua grave descendens motu naturaliter accelerato eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto, seu, si* MC *sit radius evolutæ in puncto* M, *ut ubique filum* MC *eadem vi tendat.*

RESOLUTIO.

Sit AH axis curvæ, AB altitudo per quam cadendo acquirit celeritatem initialem, qua descensum in curva inchoat: PM & *pm* sint ordinatæ infinite propinquæ, MC radius evolutæ ad curvam BMK ex evolutione descriptam normalis (§. 317. *Analys. infin.*): Producatur PM in N & repræsentet MN pondus absolutum corporis descendentis. Producatur itidem radius evolutæ CM indefinite & in eum sic productum ex N demittatur perpendicularis NO; repræsentabit MO partem ponderis, quo premitur curva in puncto M seu planum, in quo est tangens curvæ in puncto M (§. 47. *Geom.*).

Enimvero filum CM non modo tenditur in M ab hac gravitatis parte, quod est ut MO, verum etiam a vi centrifuga, quam habet in arculo M*m* radio evolutæ MC descripto. Quamobrem aggregatum ex ea gravitatis parte & conatu centrifugo in M est æquale ponderi absoluto *per hypoth.*

Sit jam conatus centrifugus $= V$, erit (§. 639).

$$MC : 2PM = MN : V$$

adeoque $V = \frac{2PM . MN}{MC}$

consequenter

$$MN = \frac{2PM . MN}{MC} + MO$$

per demonstr.

Sit igitur $MN = a$, quia MN pondus

(b) in Actis Erudit. Supplem. T. 2. p. 291.
(c) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1700. p. 11.

dus absolutum denotans constans est, $AP = x$, $PM = y$, arcus curvæ $BM = v$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$, $Mm = dv$, & $MC = tdv : dx$ (§. 320. *Anal. infin.*).

Ut valor ipsius t determinetur, fiat ut ibidem differentiale ipsius $MC = o$. Sed quia in singulis arculis Mm pressio eadem *per hypoth.* ubivis assumendi sunt æquales, atque adeo $Mm = dv$ quantitas constans. Sumta igitur in differentiatione dv pro constante, prodibit

$$\frac{dvdtdx - tdvddx}{dx^2} = o$$

$$dvdtdx = tdvddx$$

$$\frac{dtdx}{ddx} = t$$

Est vero $dt = dy$ (*cit. Analys. infin.*)

Ergo $t = \frac{dydx}{ddx}$.

Substituatur hic valor in expressione radii osculi seu evolutæ $MC = tdv : dx$; prodibit

$$MC = \frac{dydvdx}{dxddx} = \frac{dydv}{ddx}$$

Porro $CMR + RMm$ est rectus (§. 317. *Analys. infin.*) & $PMC + CMR$ itidem rectus ob MR & Pp perpendiculares ad pR alteri PM parallelam (§. 230. *Geom.*) Quamobrem $CMR + RMm = PMC + CMR$ (§. 145. *Geom.*), adeoque $RMm = CMP$ (§. 91. *Arithm.*) Est vero $CMP = OMN$ (§. 156. *Geom.*). Ergo $RMm = OMN$ (§. 87. *Arithm.*). Quoniam præterea anguli O & R recti sunt *per constr.* erit (§. 267 *Geom.*).

$$Mm : MR = MN : NO$$
$$dv : dx = a : \frac{adx}{dv}$$

Denique cum sit

$$MC : MN = 2PM : \frac{2\,PM.\,MN}{MC}$$

hoc est, $\frac{dydv}{ddx} : a = 2y : \frac{2ayddx}{dydv}$

habebimus ob $\frac{MN.\,2PM}{MC} + MO = MN$ *per demonstrata*

$$\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = a$$

$$2ayddx + adydx = adydv$$

$$2yddx + dydx = dydv$$

Quodsi coëfficiens 2 abesset, summa membri foret ydx. Sed si integrabile fieri debet, dividendum est per $\sqrt{y}$: quo facto prodit

$$\frac{2yddx + dydx}{\sqrt{y}} = \frac{dydv}{\sqrt{y}}$$

$2dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$, quia dv constans.

Quoniam vero $dv > dx$, cum dv sit differentiale arcus, dx abscissæ, adjicienda est quantitas constans, quæ vi legis homogeneorum fieri debet $= dv\sqrt{a}$. Habemus adeo

$$dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$$

$$ydx^2 = ydv^2 - 2dv^2\sqrt{ay} + adv^2$$

Sed $dv^2 = dx^2 + dy^2$

Ergo $ydx^2 = ydx^2 + ydy^2 - 2dx^2\sqrt{ay} - 2dy^2\sqrt{ay} + adx^2 + ady^2$

$$2dx^2\sqrt{ay} - adx^2 = ydy^2 + ady^2 - 2dy^2\sqrt{ay}$$

$$dx\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)} = dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a} = dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$$

Fiat $z = 2\sqrt{ay} - a$

erit $dz = \frac{dy\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$

$$\frac{dz\sqrt{y}}{a} = dy$$

Jam $z = 2\sqrt{a}.\sqrt{y} - a$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a}$$

$$\frac{z}{2\sqrt{a}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y}$$

sive $\frac{z + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$

Porro $\frac{z}{2\sqrt{a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

seu $\frac{z - a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y} - \sqrt{a}$

Quodsi ergo valores hactenus inventi substituantur in formula $\frac{ay(\sqrt{y} - \sqrt{a})}{\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}}$; prodibit

$$dx = \frac{dz\,(z + a)\,(z - a).}{4a\sqrt{a}.\sqrt{z}} = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{4a\sqrt{az}}$$

$$4adx\sqrt{a} = \frac{z^2dz - a^2dz}{\sqrt{xz}} = z^{3:2}dz - a^2z^{-1:2}dz$$

$$4ax\sqrt{a} = \tfrac{2}{5}z^{5:2} - 2a^2z^{1:2}$$

$$2ax\sqrt{a} = \tfrac{1}{5}(z^2 - 5a^2)\sqrt{z}$$

Jam $z^2 = 4ay - 4a\sqrt{ay} + a^2$

$$\sqrt{z} = \sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$$

Quamobrem $10ax\sqrt{a} = (4ay - 4a\sqrt{ay} - 4a^2)\sqrt{(2\sqrt{ay} - a)}$

5ax

$$5ax = (2y - 2\sqrt{ay} - 2a)\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a^2)}$$

Sit $x = 0$; erit

$$2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$$

$$2y - 2\sqrt{ay} = 2a$$

$$y - \sqrt{ay} = a$$
$$\tfrac{1}{4}a \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$y - \sqrt{ay} + \tfrac{1}{4}a = \tfrac{5}{4}a$$

$$\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$

$$\sqrt{y} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5a}$$
$$y = \tfrac{6}{4}a + \tfrac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$2y = 3a + a\sqrt{5} = 2AB$$

Fiat $y = 0$

erit $5ax = -2a\sqrt{a^2}$

$$x = -\tfrac{2}{5}a$$

Curva igitur KMB continuatur ultra punctum B. Nimirum si fiat AD $= a$ & erecta perpendicularis CD $= \tfrac{2}{5}a$; curva huic in puncto C occurrit.

Quoniam curva verticalem ad angulos rectos secat, ubi differentiale semiordinatæ $= o$; ut punctum reperiatur, in quo curva rectam AB secat ad angulos rectos, fiat $dy = o$, erit ob $dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a)} = ay(\sqrt{y} - \sqrt{a})$

$$dx\sqrt{(2a\sqrt{ay} - a)} = o$$

$$2a\sqrt{ay} - a = o$$

$$2\sqrt{ay} = a$$

$$4ay = a$$

$$y = \tfrac{1}{4}a$$

Quamobrem si fiat AG $= \tfrac{1}{4}a$, curva secabit AB in G ad angulos rectos.

PROBLEMA 114.

673. *Invenire curvam, in qua mobile descendens eandem quidem constanter eadem vi premit, sed quæ non æqualis est ponderi absoluto.*

RESOLUTIO.

Sint omnia ut in problemate præcedente, nisi quod vis premens dicatur b; erit (§.672).

$$\frac{2ayddx}{dydv} + \frac{adx}{dv} = b$$

$$2ayddx + adydx = bdydv$$

$$\frac{2ayddx + adydx}{2\sqrt{y}} = \frac{bdvdy}{2\sqrt{y}}$$

$$adx\sqrt{y} = bdv\sqrt{y} - adv\sqrt{a}$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydv^2 - 2abdv^2\sqrt{ay} + a^2dv^2$$
$$dv^2 = dy^2 + dx^2$$

$$a^2ydx^2 = b^2ydy^2 + b^2ydx^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} - 2abdx^2\sqrt{ay} + a^3dy^2 + a^3dx^2$$

$$a^2ydx^2 - b^2ydx^2 + 2abdx^2\sqrt{ay} - a^3dx^2 = b^2ydy^2 - 2abdy^2\sqrt{ay} + a^3dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)} = dy\,(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})$$

$$dx = \frac{dy\,(b\sqrt{y} - a\sqrt{a})}{\sqrt{(a^2y - b^2y + 2ab\sqrt{ay} - a^3)}}$$

Fiat $b = o$, erit

$$dx = -\frac{ady\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2y - a^3)}} = -\frac{ady}{\sqrt{(ay - a^2)}}$$

$$x = 2\sqrt{(ay - a^2)}$$

$$x^2 = 4ay - 4a^2$$

Est igitur in hoc casu curva, per quam mobile descendit parabola, cujus parameter $= 4a$. Quando vero $b = o$, perinde est ac si mobile in vacuo libere descendit. Quamobrem consensus hypothesium præsentium cum curva descensus *Galilæana* patet (§.482).

SCHOLION.

674. *Monuit jam* Varignonius (d) *eandem solutionem ad alia problemata similia extendi posse: quod quomodo fiat sequente problemate ostendere lubet.*

PROBLEMA 115.

Tab. XVII. Fig. 168. 675. *Invenire curvam, quæ a pondere in ea descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum* PM.

RESOLUTIO.

Si omnia sint ut in antecedentibus, erit *per hypothes.*

$$\frac{2\,ayddx + adxdy}{dydv} = \frac{y^n}{a^{n-1}} \quad (\S.672)$$

$$2yddx + dxdy = y^n a^{-n} dvdy$$

$$\frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2} y^{n-1:2} a^{-n} dvdy$$

$$dx\sqrt{y} = \frac{y^{n+1:2}dv}{(2n+1)a^n} = \frac{y^n dv\sqrt{y}}{(2n+1)a^n}$$

$$(2n+1)\,a^n dx = y^n dv$$

$$(2n+1)^2 a^{2n}dx^2 = y^{2n}dv^2 = y^{2n}dx^2 + y^{2n}dy^2$$

$$(2n+1)^2 a^{2n}dx^2 - y^{2n}dx^2 = y^{2n}dy^2$$

$$dx\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})} = y^n dy$$

$$dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{(a^{2n}(2n+1)^2 - y^{2n})}}$$

Quodsi jam fuerit $n = 1$, adeoque curva prematur in ratione altitudinum, per quas mobile descendit, consequenter in ratione duplicata celeritatum (§.86); erit

dx

(d) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1710. p. 196.

Digitized by Google

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(9a^2-y^2)}}$$

$$x = -\sqrt{(9a^2-y^2)}$$

Fiat $y=o$, relinquetur $\sqrt{9a} = 3a$, consequenter (§.107. *Anal. infin.*)

$$x = 3a - \sqrt{(9a^2-y^2)}$$

$$3a - x = \sqrt{(9a^2-y^2)}$$

$$9a^2 - 6ax + x^2 = 9a^2 - y^2$$

$$y^2 = 6ax - x^2$$

Est ergo curva quæsita circulus, cujus radius est $3a$.

Sit $n=2$, hoc est, prematur curva in ratione duplicata altitudinum descensus, seu quadruplicata celeritatum (§.86); erit

$$dx = \frac{y^2dy}{\sqrt{(25a^2-y^2)}}$$

Quæ est æquatio ad curvam elasticam *Bernoullianam* (e).

Sit $n=\frac{1}{2}$, hoc est, prematur curva in ratione subduplicata altitudinum, seu in ratione celeritatum (§.*cit.*); erit

$$dx = \frac{y^{1:2}dy}{\sqrt{(4a-y)}}$$

$$dx^2 = \frac{ydy^2}{4a-y}$$

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 = \frac{ydy^2}{4a-y} + dy^2$$

$$= \frac{ydy^2 + 4ady - ydy^2}{4a-y}$$

$$= \frac{4ady^2}{4a-y}$$

$$dv = \frac{2dy\sqrt{a}}{\sqrt{(4a-y)}} = \frac{2ady}{\sqrt{(4a^2-ay)}}$$

$$v = -4\sqrt{(4a^2-ay)}$$

Fiat $y=o$, erit residuum $=-8a$, adeoque

$$v = 8a - \sqrt{(4a^2-ay)}$$

Quodsi diameter circuli $HB = 4a$, $HI = y$; erit $IB = 4a - y$. Tab. XVII. Fig. 265.

Quare $IB^2 = 16a^2 - 8ay + y^2$
$IN^2 = 4ay - y^2$ (§. 377. *Anal. fin.*

$$BN^2 = 16a^2 - 4ay$$

$$BN = 2\sqrt{(4a^2-ay)}$$

$$2BN = 4\sqrt{(4a^2-ay)}$$
$=$ arcui Cycloidis BM (§. 168. *Anal. infin.*)

$2BH = BM + AM$
$8a = BMA$

$8a - 4\sqrt{(4a^2-ay)} =$ arcui AM.

Atque adeo patet; curvam, quæ a mobili descendente premitur in

 ra-

(e) in Actis Erudit. A. 1694. p. 272. & A. 1695. p. 538.

ratione celeritatum, seu altitudinum subduplicata, esse cycloidem ordinariam.

COROLLARIUM.

676. Quodsi in Cycloide AP $= x$, PM $= y$ & diameter circuli genitoris $= 4a$; æquatio ad eandem est $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{4a-y)}}$. Quare si diameter circuli genitoris fuerit $= a$, reliqua maneant ut ante; æquatio ad cycloidem est $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}} = \frac{ydy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$, consequenter area cycloidis APM $\int \frac{y^2dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$.

CAPUT XIV.

DE

RESISTENTIA MEDII.

DEFINITIO 70.

677. Per *Resistentiam medii* intelligitur resistentia fluidi, per quod mobile fertur.

COROLLARIUM.

678. Quoniam mobile fluidum, quod motui ejus resistit, loco pellere tenetur, atque adeo quandam motus partem amittit; celeritas ejus, massa quippe manente eadem, minuitur (§. 22).

PROBLEMA 116.

Tab. XVII. Fig. 169. 679. *Data celeritate mobilis in medio resistente motu æquabili lati, invenire celeritatem dato tempore amissam, spatium confectum & curvam resistentiæ, in qua semiordinatæ sunt ut celeritates amissæ.*

RESOLUTIO.

Sit AB celeritas, qua mobile initio fertur $= a$, ANG curva definiens celeritates totales in temporibus AP $= x$ amissas, PN celeritas amissa $= r$; erit NM celeritas residua, quæ dicatur v. Sit jam pm alteri PM infinite propinqua; erit nR differentia positiva semiordinatarum PN & pn seu celeritatum extinctarum $= dr$, eademque differentia negativa semiordinatarum NM & nm seu celeritatum residuarum $= - dv$. Unde resultat

I. $dr = - dv$.

Sit porro curva ESI, cujus ordinatæ sunt ut nR, seu legem resistentiæ exponunt. Quodsi ergo Tab. XVII. Fig. 17[illegible]

nR

nR dividas per PS, quotus erit quantitas conſtans, perinde enim fere eſt ac ſi eandem quantitatem dividas per ſe ipſam. Sit $PS = z$. Quoniam $nR = -dv$ *per demonſtrata*; erit $\frac{nR}{PS} = -\frac{dv}{z}$.

Jam cum $Pp = dx$, quia AP perinde ac in curva præcedente tempus exponit, ſit conſtans; erit per legem homogenorum

$$-\frac{dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{II.} \quad -adv = zdx$$

Sit denique ſpatium a mobili tempuſculo dx percurſum $= ds$. Quoniam idem eſt vdx (§. 34); erit

$$ds = vdx$$

adeoque III. $s = \int vdx$

SCHOLION.

680. *Ex formulis hisce generalibus quas dedit* Varignonius (f) *deducuntur, quæ de reſiſtentia medii in hypothesibus ſpecialibus a* Walliſio, Nevvtono, Hugenio *atque* Leibnitio *inventa ſunt: quemadmodum ex ſequentibus patebit.*

THEOREMA 142.

Tab. XVII. Fig. 169. 681. *Si mobile motu æquabili fertur per medium, in quo eidem reſiſtitur in ratione celeritatum, curva reſiſtentiæ totalis* ANG *eſt Logarithmica; cujus aſymptotus tempus, ſemiordinatæ ad ipſum relatæ celeritates reſiduas repræſentant.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam mobili reſiſtitur in ratione celeritatum *per hypotheſ.* ſeu celeritates in inſtanti amisſæ ſunt ut celeritates; ſi omnia ſint ut in problemate præcedente (§. 679); erit $z = v$. Eſt vero $-adv = zdx$ *vi num. II.* (§. *cit.*). Ergo $-adv = vdx$ conſequenter $a = -\frac{vdx}{dv}$.

Eſt vero $-\frac{vdx}{dv}$ ſubtangens curvæ, cujus abſciſſæ ſunt x, ſemiordinatæ decreſcentes v (§. 20. *Anal. infin.*). Ergo ſubtangens curvæ reſiſtentiæ totalis ANG eſt Logarithmica, cujus aſymptotus BF (§ 54. *Anal. infin.*). Repræſentat autem BF tempus & ſemiordinatæ ad ipſum relatæ exprimunt celeritates reſiduas a reſiſtentia medii. *Q. e. d.*

SCHOLION.

682. *Si quis dubitet hanc eſſe Logarithmicæ proprietatem propriam, quod ſubtangens ſit conſtans; haud difficulter idem demonſtratur. Sint enim* z & y *duæ ſemiordinatæ*, v & x *ipſis reſpon-*

(f) in Comment. Acad. Reg. Scient. A. 1707. p. m. 505.

dentes abscissæ: erunt subtangentes $\frac{ydx}{dy}$ & $\frac{zdv}{dz}$, *adeoque* ydx : dy = a & zdv : dz = a (§. 54. Anal. infin.), *consequenter* ydx : dy = zdv : dz (§. 87. Arithm. *Quoniam differentiale abscissæ sumitur constans*; *erit* dx = dv, *consequenter* y : dy = z : dz (§. 183. Arithm.), *adeoque* y + dy : y = z + dz : z (§. 190. Arithm.). *Habemus adeo semiordinatas in proportione geometrica. Jam ipsis respondentes abscissæ* x + dx & x *atque* v + dv & v *ob* dx = dv *sunt æquidifferentes* (§. 322. Arithm.). *Abscissis adeo æqui differentibus respondent semiordinatæ in geometrica progressione, consequenter curva constantis subtangentis est Logarithmica* (§. 552. Anal. fin.). *Ceterum* ANG *dicitur* curva resistentiæ totalis *ad differentiam* curvæ resistentiæ instantaneæ, *in qua semiordinatæ sunt ut celeritates in instanti amissæ.*

THEOREMA 143.

683. *Si mobile motu æquabili per medium fertur, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum & tempora sumuntr æqualia; erunt celeritates in principiis singulorum temporum in progressione geometrica & partes singulis temporibus amissæ erunt iisdem proportionales seu ut totæ; vel etiam ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si enim mobili a medio, per quod motu æquabili fertur, resistitur in ratione celeritatum; curva resistentiæ ANG Logarithmica est, cujus asymptotus BF tempus repræsentat, abscissæ vero NM celeritates residuas exhibent (§. 681). Quoosi ergo tempora sumuntur æqualia, celeritates in principiis temporum sunt in geometrica progressione (§. 552. *Anal. fin. Quod erat unum.* Tab. XIII Fig. 169.

Quodsi fiat BM = MR, tempora, quibus amittuntur celeritates AO & NV æqualia sunt. Est vero AB : NM = NM : TR *per demonstr.* Ergo AB − NM : AB = NM − TR : NM (§. 193. *Arithm.*), hoc est, AO : AB = NV : NM, consequenter AO : NV = AB : NM (§. 173. *Arithm.*), seu celeritates temporibus æqualibus amissæ sunt ut totæ in principiis illorum temporum. *Quod erat secundum.*

Quoniam AB : NM = NM : TR *per demonstr.* erit etiam AB−NM : NM = NM − TR : TR (§. 193. *Arithm.*), hoc est, AO : NM = NV : TR, consequenter AO : NV = NM : TR (§. 173. *Arithm.*), seu celeritates temporibus æqualibus BM & MR amissæ sunt ut celeritates

tates NM & TR in fine illorum temporum. *Quod erat tertium.*

Ultimum quoque ita ostenditur. AO : NV = AB : NM *per num. 2.* & AB : NM = NM : TR *per num. 1.* Ergo AO : NV = NM : TR (*§. 167. Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 144.

684. *Si mobile motu æqubili per medium fertur, in quo eidem resistitur in ratione celeritatum; spatia singulis temporibus descripta sunt ut celeritates amissæ, &, si tempora sumantur æqualia, ut celeritates totæ in principio vel in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia sint ut in problemate generali (§.679); erit $-adv=zdx$ *vi num. II.* & $vdx=ds$ *vi num. III.* Est vero $z=v$ *per hypoth.* Ergo $-adv=vdx$ (*§.15. Arithm.*), consequenter $ds=-adv$ (*§.87. Arithm.*). Est igitur $s=a^2-av$ (*§.95. Anal. infin.*), seu ob constantem a est s ut $a-v$ (§.181. Arithm.). Sed $a-v$ est celeritas a mobili tempore x amissa. Quamobrem spatia sunt ut celeritates amissæ. *Quod erat unum.*

Quodsi tempora sumantur æqualia, celeritates amissæ sunt ut totæ in principio, vel fine illorum temporum (§.683). Sunt vero etiam ut celeritates amissæ istis temporibus ita spatia movendo iisdem confecta *per demonstrata.* Ergo eadem spatia sunt ut celeritates in principio vel etiam in fine illorum temporum (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 145.

685. *Si mobili motu æquabili lato in ratione celeritatum resistitur, & tempora sumuntur æqualia seu in progressione arithmetica, erunt celeritates in instanti seu tempusculo infinite parvo amissæ ut celeritates in fine illorum temporum.*

DEMONSTRATIO.

Curva enim resistentiæ Logarithmica est, cujus asymptotus tempora, semiordinatæ ad eandem relatæ celeritates in fine illorum temporum repræsentant (§.681). Quare si tempora sint x & t, semiordinatæ ipsis respondentes y & z; erit $\frac{yax}{dy} = \frac{zdt}{dz}$ (*§. 54. Anal. infin.*), consequenter cum tempora sumantur in progressione arithmetica *per hypoth.* sitque adeo $dx=dt$ (*§. 333. Arithm.*) $y:dy=z:dz$. Est itaque $y:z=dy:dz$ (*§. 173. Arithm.*), hoc est, celeri-

leritates in fine temporum istorum *y* & *z* sunt ut celeritates in instanti inde amissæ *dy* & *dz*. *Q.e.d.*

COROLLARIUM

Tab. XVII. Fig. 170. 686. Quoniam in curva resistentiæ instantaneæ ESI abscissa EP est ut tempus, semiordinata PS ut celeritas in instanti amissa (§. 682); PS vero est celeritas in fine temporis EP mobili residua (§. 685) & in curva resistentiæ totalis abscissis tanquam temporibus respondent semiordinatæ tanquam celeritates istis amissæ (§. 682); curva resistentiæ totalis eadem quæ curva resistentiæ instantaneæ, si mobili motu æquabili lato resistitur in ratione velocitatum.

THEOREMA 146.

687. *Si mobili motu æquabili lato resistitur in medio, per quod fertur, in ratione celeritatum; spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut spatium integrum percurrendū ad spatium aliud percurrendum, ita celeritas, quam initio motus habet mobile ad celeritatem residuam (§.684). Quamobrem spatium quodlibet adhuc percurrendum est ad integrum ut celeritas residua, qua percurrendum, ad celeritatem initialem, seu quam in principio habet mobile (§.193. *Arithm.*): quod cum de omni spatio percurrendo verum sit; erit spatium percurrendum unum ad aliud quodcunque ut celeritas residua, qua illud percurrendum, ad celeritatem residuam, qua hoc percurrendum (§.195. *Arithm.*), hoc est, spatia adhuc percurrenda sunt celeritatibus residuis, qua percurrenda, proportionalia (§. 155. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

688. Si ergo celeritas initialis AB exponatur per spatium integrum percurrendum, cum spatia percursa sint AO, AQ &c. (§.684). erunt percurrenda OB, OQ &c. seu applicatæ NM & TR ad asymptotum BF Logisticæ ANG. Tab. XVII. Fig. 169.

THEOREMA 147.

689. *Si mobili motu æquabili lato a medio resistitur in ratione celeritatum & spatia adhuc percurrenda sint ut numeri, erunt tempora insumta percursis ut illorum Logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim adhuc percurrenda sunt ut semiordinatæ Logisticæ NM, TR &c. applicata ad tempora insumta BM, BR spatiis jam percussis AO, AQ (§. 688). Enimvero si in Logistica NM, TR sumuntur ut numeri, abscissæ BM, BR sunt ut eorum Logarithmi (§. 533.

553. *Anal.*). Ergo si spatia percurrenda sunt ut numeri, tempora sunt eorum Logarithmi. *Q. e. d.*

THEOREMA 148.

Tab. XVII. Fig. 169. 690. *Si mobile æquabili motu incedit in medio, quod in ratione velocitatum eidem resistit, celeritas nonnisi tempore infinito extinguitur & spatium percurrendum integrum* AB *nunquam absolvit, etsi semper accedat ad limitem.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim continuo decrescentes sunt ut semiordinatæ Logarithmicæ ad asymptotum BF applicatæ & asymptotus tempus exhibet (§. 681). Quare cum AB celeritatem integram repræsentet, quam mobile in principio motus habet; ea prorsus extingui nequit, nisi punctis G & F coincidentibus, seu Logistica ANG cum asymptoto BF concurrente: quod cum fieri non possit nisi infinito intervallo (§. 556. *Anal. infin.*); celeritas quoque nullo tempore finito extingui potest. *Quod erat primum*

Jam cum celeritate, quam in principio motus habet mobile, non prorsus extincta terminum B attingere non possit, nullo quoque tempore finito eundem attingere valet, adeoque spatium percurrendum integrum AB nunquam absolvit. *Quod erat secundum.*

Quia tamen motus indesinenter continuatur, adeoque spatium celeritatibus amissis descriptum continuo crescit; mobile ad terminum suum B continuo propius accedit. *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

691. *Nemo objiciat propositionem præsentem experientiæ repugnare: neque enim hypothesis resistentiæ in ratione velocitatum naturæ rerum conformis, quemadmodum suspicatus fuit* Wallisius. *Et si vel maxime hypothesis natura prope ad eam accederet, ex naturæ consuetudine motus in praxi tandem insensibilis fieri deberet, quemadmodum a* Leibnitio (g) *jam annotatum est.*

THEOREMA 149.

692. *Si intra asymptotos rectangulus* AB *&* BK *describatur hyperbola* FLS *& motus initio celeritas exponatur per rectam* AB, *elapso aliquo tempore vero per rectam* OB; *tempus per aream* AFLO *& spatium eo tempore descriptum per rectam* AO *exprimi potest.* Tab. XVII. Fig. 169.

DEMONSTRATIO.

Si enim BQ & BO fuerint celeritates

(g) in Actis Erudit. A. 1689. p. 41.

ritates in fine temporum BM & BR restantes, dicaturque BQ $= y$, BO $= z$; erit $y : z = dy : dz$ (§. 685), consequenter $y : dy = z : dz$ (§. 173. *Arithm.*). Sunt vero $\frac{y}{dy}$ & $\frac{z}{dz}$ elementa spatii hyperbolici asymptotici (§. 120. *Anal. infin.*). Quamobrem elementa ista æqualia sunt, si eorum altitudines, quæ sunt abscissarum in asymptoto BA sumtarum differentialia, fuerint ut celeritates in instanti amissæ. Quodsi ergo ab initio motus usque ad plenariam extinctionem sumantur continuo AO, AQ ut celeritates extinctæ; Spatium hyperbolicum asymptoticum resolvitur in elementa inter se æqualia. Atque adeo area FAOL successiva elementorum æqualium additione gignitur, quemadmodum abscissæ AP continua accessione elementorum æqualium resultat. Enimvero abscissa AP exponitur tempus, quo celeritas AN sive AO amittitur *per hypoth.* Ergo etiam spatium hyperbolicum AFLO tempus designare debet, quo celeritas AO amittitur. *Quod erat unum.*

Jam rectæ AO & AQ sunt ut celeritates temporibus BM & BR amissæ *per hypoth.* Sunt vero spatia temporibus BM & BR movendo confecta ut celeritates iisdem temporibus extinctæ (§. 684). Ergo spatia temporibus BM & BR seu, quod perinde est *per demonstrata*, temporibus AFLO & AFHG confecta sunt ut rectæ AO & AQ. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 150.

693. *Si motui æquabili in medio resistitur in ratione celeritatum, decrementa celeritatum sunt incrementis spatiorum proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Spatia enim & celeritates amissæ eodem tempore per eandem rectum exponuntur (§. 692). Ergo etiam incrementa illorum, & harum decrementa eodem tempore per eandem rectam exponi debent. Quoniam itaque tempore eodem incrementa spatiorum & decrementa celeritatum iisdem rectis proportionalia sunt; spatiorum quoque incrementa celeritatum decrementis proportionalia sunt (§. 167. *Arithm.* *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

694. Wallisius, *qui primus de resistentia aëris in motu corporum determi-*

minanda cogitavit (h) *& resistentiam in ratione celeritatum fieri supposuit; rationem celeritatis* a, *quæ initio motus est, ad residuam uno momento seu tempusculo infinite parvo elapso sumit ut* m *ad* 1. *Celeritas igitur residua est* $\frac{a}{m}$.

Jam cum celeritates residuæ in progressione geometrica decrescant (§. 685), *per hanc seriem exhibentur celeritates ab initio motus usque ad ejus extinctionem* $a.\ \frac{a}{m}.\ \frac{a}{m^2}.\ \frac{a}{m^3}.\ \frac{a}{m^4}.$ &c. *in infinitum, donec scilicet quod restat est respectu ipsius* a *infinite parvum, adeoque nullum. Summa igitur celeritatum* $a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \frac{a}{m^5}$ &c. *in infinitum ob terminum ultimum contemtibilis parvitatis* $= \frac{a}{m-1} + a$ (§. 120. *Anal. fin*) $= \frac{a+ma-a}{m-1} = \frac{ma}{m-1}$.

Jam vero singulis celeritatibus tempusculis æqualibus describuntur singula spatiola, quæ cum sint ut celeritates, spatium integrum celeritate prorsus extincta erit $\frac{ma}{m-1}$, *seu, si* $a = 1$, $\frac{m}{m-1}$, *quemadmodum idem determinat* Wallisius.

SCHOLION 2.

695. Nevvtonus (i) *cum deprehenderet hypothesin resistentiæ in ratione celeritatis magis mathematicam esse, quam naturalem & naturæ magis conformem censens alteram de resistentia in duplicata ratione celeritatum, motus corporum ex hac lege resistentiæ oriundos considerare cœpit. Nostrum igitur est ut eosdem hic more nostro explicemus. Ex superioribus enim formulis generalibus deducuntur, quæ de eodem notanda veniunt, prouti ex sequentibus patet.*

THEOREMA 151.

696. *Si corpus motu æquabili per medium similare fertur ipsique resistitur in velocitatis ratione duplicata, curva resistentiæ totalis est Hyperbola æquilatera* ANG *intra asymptotos* HK & KF, *puncto* B, *in quo celeritas initialis* AB *applicatur, a centro* K *intervallo rectæ* AB, *quæ celeritatem initialem exponit, distante.* Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si celeritas initialis AB = *a*, celeritas amissa = *v*, tempus quo amittitur = *x*, decrementum celeritatis instantaneum ut *z*; erit $-adv = zdx$ (*vi num. II. §. 679*). Est vero decrementum celeritatis instantaneum in ratione duplicata celeritatis extinctæ *per hypoth.* adeoque servata lege homogeneorum $z = \frac{v^2}{a}$. Quamobrem

(a) in Algebra c. 101. f. 438. Vol. 2. Oper.

(i) in Princ. lib. 2. prop. 5. & seqq. p. m. 239.

$$-adv = \frac{v^2dx}{a}$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{a^2}$$

hoc eſt, $-v^{-2}dv = dx:a^2$

$$v^{-1} = x:a^2$$

Sive, ſi quantitas conſtans in integratione adjiciatur, $\frac{1}{v} + b = \frac{x}{a^2}$.

Fiat $x = 0$: erit $v = a$, quia ibidem applicata recta AB exprimit celeritatem initialem, adeoque

$$\frac{1}{a} + b = 0$$

$$b = -\frac{1}{a}$$

Ergo $\frac{1}{v} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a^2}$

$$a^2 - av = vx$$

$$a^2 = vx + av$$

Curva igitur reſiſtentiæ totalis ANG eſt hyperbola æquilatera intra aſymptotos HK & KF, latere potentiæ hyperbolæ exiſtente linea recta, quæ celeritatem exponit, & applicata AB, quæ eandem exponit ſui intervallo a centro K remota (§. 490. *Anal. fin.*).

COROLLARIUM.

697. Quoniam tempus repræſentatur per aſymptotum BF, celeritates reſiduæ per ſemiordinatas NM, hyperbola vero cum aſymptoto ANG non concurrit (§. 481. *Anal. fin.*); celeritas, qua fertur mobile, integra nonniſi infinito tempore per reſiſtentiam medii extinguitur, ſeu mobile nunquam motu ſuo prorſus privatur.

THEOREMA 152.

698. *Si mobili motu æquabili lato reſiſtitur a medio in ratione duplicata celeritatis, celeritas reſidua erit ad extinctam in ea ratione, quam habet latus potentiæ hyperbolæ* KB *ad partem aſymptoti* BM *exponentem tempus, quo celeritas extincta fuit.* Tab. XVII. Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Si enim potentiæ hyperbolæ latus KB = BA = a, recta tempus exponens BM = x, celeritas reſidua MN = v, adeoque extincta PN = $a - v$; erit $a^2 - av = vx$ (§. 696). Eſt igitur $a : x = v : a - v$ (§. 299. *Arithm.*), hoc eſt, AB : BM = MN : NP, ſeu celeritas reſidua eſt ad extinctam ut latus potentiæ hyperbolæ ad partem aſymptoti tempus exponentem, quo celeritas extincta fuit. *Q. e. d.*

THEOREMA 153.

699. *Si mobili motu æquabili lato*

lato resistitur a medio in ratione duplicata celeritatis, spatium dato tempore est ut logarithmus rationis, quam habet celeritas initialis ad residuam tempore isto elapso.

DEMONSTRATIO.

Si enim spatium sit s, reliqua sint ut ante; erit $vdx = ds$ (§. 679). Est vero in hypothesi propositionis $-\frac{a^2 dv}{v^2} = dx$ (§. 696), adeoque $vdx = -a^2 dv : v$, consequenter $ds = -a^2 dv : v$. Sed $-adv:v$ est differentiale logarithmi fractionis. $a : v$ (§. 243. *Analys. infin.*). Quamobrem $s = al\,(a:v)$, hoc est, ob constantem a, spatium dato percursum tempore est ut $l\,(a:v)$, seu ut logarithmus celeritatis initialis a ad residuam v. *Q.e.d.*

THOREMA 154.

Tab. XVII. Fig. 171. 700. *Si mobili æquabili motu per medium resistens lato resistitur in ratione duplicata celeritatum, tempore, quod per partem asymptoti* BM *hyperbolæ* ANG *exponitur, confectum spatium repræsentatur per spatium hyperbolicum asymptoticum* ABMN *inter celeritatem initialem* AB *&* *residuam* NM *interceptum.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus BM $= x$ & celeritas restans MN $= v$; erit vdx elementum areæ ABMN (§. 97. *Analys. infin.*). Sed si spatium tempore BM descriptum $= s$; erit $ds = vdx$ (§. 679). Ergo $s = \int vdx =$ ABMN. Spatium igitur hyperbolicum tempori, quod per BM exprimitur, respondens ABMN exprimit spatium a mobili tempore isto confectum. *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

701. Quoniam spatia motu æquabili dato tempore confecta sunt in ratione composita temporum ac celeritatum (§. 34); mobile celeritate initiali AB tempore BM percurreret spatium, quod est ut BM. AB (§. 159. *Arithm.*), consequenter spatium istud exponit rectangulum ABMP (§. 376. *Geom.*). Quare cum motu resistentiis in duplicata celeritatum ratione impedito tempore BM conficiatur spatium per spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN exprimendum (§. 700); erit spatium celeritate in ratione duplicata celeritatis continuo impedita descriptum ad spatium, quod eodem tempore in medio non resistente describeret mobile; ut spatium hyperbolicum asymptoticum ABMN ad rectangulum ABMP.

THEOREMA 155.

702. *Si motus æquabilis impeditur resistentiis, quæ sunt in ratione duplicata celeritatum; decrementa celeritatum instantanea sunt in ratione composita ex celeritate resi-*

residua & incremento momentaneo spatii percursi.

DEMONSTRATIO.

Constat ex demonstratione theorematis 151. (§. 696), esse $-adv = v^2dx : a$. Est igitur $-dv$ ut v^2dx propter constantem a^2 (§. 181. *Arithm.*). Enimvero $v^2dv = v.vdx$ & v designat celeritatem residuam, $vdx = ds$ (§. 679) incrementum momentaneum spatii in medio resistente percursum. Ergo in hypothesi theorematis decrementa momentanea velocitatis $-=dv$ sunt in ratione composita celeritatum residuarum & incrementorum momentaneorum spatii percursi. *Q. e. d.*

THEOREMA 156.

Tab. XVII. Fig. 172. 703. *Si recta* AB *celeritatem initialem mobilis exponit, cui in medio, per quod æquabiliter movetur, in ratione duplicata celeritatum resistitur, & erectis perpendicularibus* AC *&* BF *describantur duæ Logarithmicæ* ANG *&* BOR, *quorum communis est subtangens* AB, *altera vero* BOR *ad asymptotum* AC, *altera* ANG *ad asymptotum* BF *relata; ducta* PO *ipsi* AB *parallela, exponet* MO *tempus,* PN *celeritatem isto tempore amissam &* NM *celeritatem in fine illius temporis adhuc residuam.*

DEMONSTRATIO.

Si enim subtangens communis AB $= a$, tempus $= x$, celeritas in fine ejusdem residua $= v$; erit

$$a^2 = vx + av \ (\text{§}. 696)$$

$$o = vdx + xdv + adv$$

$$-adv - xdv = vdx$$

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dx}{a+x}$$

Sunt adeo $-\frac{dv}{v}$ & $\frac{dx}{a+x}$ duo Logarithmi æquales (§. 243. *Analys. infin.*). Quare si sit BM $= y$ & NM $= v$; erit $\frac{dy}{a} = -\frac{dv}{v}$, adeoque ANG Logarithmica ad asymptotum BF relata, cujus subtangens $a =$ AB. Et quia etiam $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{a+x}$; (§. 87. *Arithm.*) erit itidem BOR Logarithmica ad asymptotum AC relata, cujus itidem subtangens AB (§. 54. *Anal. infin.*). Quoniam vero AB exponit celeritatem initialem, tempus $= x$, celeritas residua $= v$ *vi denominationis*; recta MO $= x$ tempus, NM $= v$ celeritatem in fine ejus residuam & PN celeritatem tempore MO amissam exponit. *Q. e. d.*

Theo-

THEOREMA 157.

Tab. XVII. Fig. 171. 704. *Si tempus* BM *resolvitur in tempuscula, quæ sunt in progressione geometrica, spatiola istis tempusculis descripta æqualia sunt & velocitates residuæ sunt in eadem ratione decrescente, in quo tempora crescunt quantitate quadam constante aucta.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus exponitur per partem BM asymptoti KF Hyperbolæ æquilateræ ANG; spatium hyperbolicum ABMN exponit spatium a mobili tempore BM in medio non resistente descriptum (§.700). Enimvero ostendimus in superioribus (§.692), si BM resolvitur in particulas, quæ sunt in progressione geometrica, aream ABMN resolvi in spatiola seu elementa inter se æqualia. Spatiola igitur tempusculis in ratione geometrica progredientibus descripta sunt inter se æqualia. *Quod erat unum.*

Tab. XVII. Fig. 172. Si AB exprimat celeritatem initialem & duæ fuerint Logisticæ ANG & BOR ad asymptotos BF & AC relatæ; MO tempus denotat, & MN celeritatem in fine istius residuam (§.703). Sumantur jam in asymptotis abscissæ BM vel AP in progressione arithmetica; erunt NM & PO in progressione geometrica & quidem semiordinatæ NM in decrescente, semiordinatæ vero PO in crescente (§.552. *Anal. fin.*). Patet igitur temporibus quantitate constante AB (= PM) auctis in ratione geometrica crescentibus celeritates residuas NM in ratione geometrica decrescere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

705. Quoniam spatia dato tempore descripta sunt ut logarithmi negativi celeritatum in fine illorum temporum residuarum (§.699); si celeritates residuæ sumantur ut numeri, spatia sunt ut eorum logarithmi & tempus etiam sunt ut numeri (§.704).

COROLLARIUM 2.

706. Quare cum AP vel BM sit ut logarithmus MN vel PO; erit BM vel AP ut spatium tempore MO celeritate PN, utpote extincta tempore MO (§. 705), descriptum (§.453. *Anal. fin.*).

SCHOLION.

707. *Eadem methodo ad alias hypotheses resistentiæ applicari poterant formulæ generales. Sed cum istiusmodi hypotheses magis geometricæ, quam naturales sint, plura in præsente non addimus ad resistentias in motu gravium explicandas progressuri in duabus hypothesibus anterioribus. Supponimus autem motum gravium æquabiliter acceleratum in hypothesi* Galilæana, *utpote experimentis in iis a centro Telluris di-*

stan-

stantiis consentiente, in quibus ea capere licet.

PROBLEMA 117.

Tab. XIIX Fig. 173. 708. *Invenire curvam resistentiæ, celeritatem residuam & spatium dato tempore descriptum in motu gravium seu æquabiliter accelerato.*

RESOLUTIO.

Exponat recta AC tempus. Fiat AP = PM; exponet PM celeritatem tempore AP a mobili acquisitam (§.68) & AMF erit linea recta ac APM triangulum æquicrurum. Sit PN celeritas extincta tempore AP per resistentiam & MN celeritas in fine illius temporis residua; erit ANG curva resistentiæ totalis. Ducatur *pm* ipsi PM infinite propinqua & demissa perpendiculari NR; erit *n*R particula celeritatis tempusculo P*p* extincta. Fiat PS ut *n*R; erit ESI curva resistentiæ instantaneæ (§.682). Denique fiat QP = NM; erit AQH curva celeritatum residuarum.

Sit jam AP = PM = x, NM = PQ = v, PS = z, PN = r; erit

$$v = x - r$$

$$r = x - v$$

I. $dr = dx - dv$.

Porro ut supra (§.679).

$$\frac{dr}{z} = \frac{dx}{a}$$

Unde $$\frac{dx - dv}{z} = \frac{dx}{a}$$

II. $adx - adv = zdx$

quæ est æquatio ad curvam resistentiæ instantaneæ ESI.

Tandem si s spatium tempore x confectum denotet, erit ut supra (§.679)

III. $vdx = ds$.

SHOLION.

709. *Ex formulis hisce generalibus perinde ac supra deducuntur quæ de motu gravium in medio resistente a* Newtono, Hugenio *&* Leibnitio *inventa sunt, quemadmodum ex sequentibus intelligitur.*

THEOREMA 158.

710. *Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum, curva celeritatum residuarum* AQH *est Logarithmica, cujus asymptotus* BF *tempus exponit, semiordinatæ vero* OQ *ad asymptotum relatæ sunt differentiæ inter celeritates residuas* PQ *& subtangentem* AB. Tab. XIIX Fig. 174

DEMONSTRATIO.

Si AP = x, PQ = v, AB = a; erit $adx - adv = zdx$ (§.708).

Est

Est vero $z = v$ *per hypoth.*

Ergo $adx - adv = vdx$

$$adx - vdx = adv$$

$$dx = \frac{adv}{a-v}$$

Quæ est æquatio ad curvam AQH.

Fiat $a - v = y$

erit $a - y = v$

$$- dy = dv$$

$$- \frac{ady}{y} = \frac{adv}{a-v} = dx$$

Quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $= a$ (§. 54. *Anal. infin.*).

Tab. IX. Fig. 74. Sit itaque AB $= a$, AP = BO $= x$; erit Oo = P$p = dx$. Quoniam PQ $= v$; erit QO $= a - v = y$, adeoque QL $= -dy$. Quodsi ergo sumta AB pro subtangente describatur Logarithmica, cujus asymptotus BF; erit $dx = -\frac{ady}{y}$ æquatio ad eandem. Est igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum AQH Logarithmica, cujus asymptotus BF, semiordinatæ vero sunt differentiæ inter lineas, quæ celeritates in fine singulorum temporum residuas exponunt, atque rectam quandam constantem AB, cui subtangens æqualis est (§. 54. *Anal. infin.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

711. Quodsi fiat PM = AP & MN = PQ; erit PN celeritas per resistentiam amissa tempore AP, consequenter ANG curva resistentiæ totalis (§. 682). Data igitur curva celeritatum residuarum in fine singulorum temporum, datur curva resistentiæ totalis ANG.

THEOREMA 159.

712. *Si gravi descendenti resistitur in ratione celeritatum, spatia movendo confecta sunt ut celeritates extinctæ.*

DEMONSTRATIO.

Si omnia fuerint ut in theoremate præcedente, erit $vdx = adx - adv$ (§. 708). Est vero $vdx = ds$ (§. *cit.*). Ergo $ds = adx - adv$, consequenter $s = ax - av$. Est igitur propter constantem a spatium movendo confectum ut $x - v$ (§. 181. *Arithm.*). Quoniam PM $= x$, MN $= v$; PM vero est celeritas cadendo tempore AP acquisita & MN celeritas in fine temporis in medio resistente residua, erit PN $= x - v$ celeritas tempore AP extincta. Sunt igitur

tur ſpatia movendo confecta ut celeritates extinctæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

713. Quoniam PM exprimens celeritatem in medio non reſiſtente a gravi acquiſitam eſt ut tempus AP (§. 68), PN vero denotans celeritatem extinctum ut ſpatium movendo confectum (§. 712); igitur dantur lineæ temporibus inſumtis proportionales, a quibus ſpatia movendo in medio reſiſtente confecta ſi ſubtrahantur relinquunt rectas NM celeritati in medio reſiſtente a gravi acquiſitæ proportionales.

THEOREMA 160.

Tab. XIIX Fig. 174. 714. *Si complementa celeritatum a gravi in medio reſiſtente in ratione celeritatum cadendo acquiſitarum ad celeritatem maximam, quam corpus cadendo acquirere valet, ſumantur ut numeri, erunt tempora inſumta ut eorum logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Si BF exponit tempus, curva AQH celeritatum reſiduarum eſt Logarithmica; cujus aſymptotus BF, ſubtangens AB (§. 710). Quoniam Logiſtica AQH cum aſymptoto BF non concurrit niſi infinito intervallo (§. 553. *Anal. fin.*); AB eſt celeritas, quam in medio reſiſtente infinito tempore grave cadendo acquirere poteſt, adeoque abſolute maxima. Eſt itaque QO celeritatis tempore AP in medio reſiſtente acquiſitæ complementum ad maximam. Quamobrem ſi complementa celeritatum acquiſitarum ad maximam ſunt ut numeri; erunt tempora inſumta, quæ per AP, ſive BO denotantur, ut ipſorum Logarithmi (§. 550. *Anal. fin.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 161.

715. *Si grave in medio cadit, quod in ratione celeritatum deſcenſui ejus reſiſtit; celeritatem abſolute maximam nunquam acquirit.* Tab. XIIX Fig. 174.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim curva celeritatum reſiduarum in medio reſiſtente, ſeu acquiſitarum, ſi medium in ratione celeritatum reſiſtit, AQH Logarithmica, cujus aſymptotus BF (§. 710). Quoniam celeritates acquiſitæ ſunt ſemiordinatæ QP ad axem AK applicatæ; celeritas maxima repræſentatur per ſemiordinatam, quæ reſpondet puncto, in quo curva AQH aſymptotum BF ſecat. Quare cum id fiat infinito intervallo (§. 553. *Anal. fin.*), ſeu quando AK infinita evadit; tempus infinitum requiritur ut grave cadendo celeritatem abſolute ma-

maximam acquirat. Eam igitur nunquam acquirit. *Q.e.d.*

THEOREMA 162.

Tab. XIIX Fig. 174. 716. *Si grave descendit per medium in ratione velocitatum resistens, celeritatum temporibus in progressione arithmetica auctis cadendo acquisitarum a maxima, quam per idem cadendo acquirere potest, differentiæ in progressione geometrica decrescunt.*

DEMONSTRATIO.

Constat enim ex antecedentibus, si AQH sit Logarithmica, cujus asymptotus BF & AK eidem parallela; esse QP celeritatem tempore AP vel BO cadendo acquisitam (§. 710) & BA celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens cadendo acquirere valet (§. 714). Sunt igitur abscissæ BO, BR ut tempora, semiordinatæ ipsis respondentes OQ & VR ut celeritatum QP & VT istis temporibus acquisitarum differentiæ a maxima, seu ut earundem complementa ad maximam. Enimvero si in Logarithmica abscissæ crescunt in progressione arithmetica, semiordinatæ in geometrica decrescunt (§. 552. *Anal. fin.*). Ergo si grave per medium in ratione velocitatum resistens cadit & tempora in progressione arithmetica crescunt, celeritatum temporibus istis acquisitarum differentiæ a maxima in geometrica decrescunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 163.

717. *Si gravi per medium descendenti resistatur in ratione celeritatum & axis* AK *tempora descensus repræsentet,* ANG *sit curva resistentiæ totalis,* AQH *vero curva celeritatum acquisitarum, & circa axem* AD *ad* AK *normalem describatur parabola* AIC, *cujus parameter est ut dupla celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere valet; spatium in medio resistente confectum est ad spatium eodem tempore in vacuo conficiendum in ratione* PN *ad* PI, *seu ut semiordinata curvæ resistentiæ totalis ad semiordinatam parabolæ externæ ad eundem axem relatæ.* Tab. XIIX Fig. 174.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim spatium in medio resistente in ratione celeritatum movendo confectum est tempore AP $= x$ ut $ax - av$ (§. 712), spatium vero eodem tempore in vacuo conficiendum ut $\frac{1}{2}x^2$ (§. 80); erit istud ad hoc ut $ax - av$ ad $\frac{1}{2}x^2$, consequenter ut $x - v$ ad $x^2 : 2a$

(§.181. *Arithm.*). Jam cum ANG sit curva resistentiæ totalis *per hypoth.* erit PN = $x - v$ (§.712) & quia AQH est curva celeritatum temporibus x acquisitarum *per hypoth.* celeritas maxima, quam corpus cadendo acquirere potest, est ut recta AB = a (§.715.). Enimvero si circa axem AD parametro $2a$, quæ est ut dupla celeritas maxima a gravi acquisitu possibilis describatur parabola AIC, cum sit QI = AP = x; erit AQ = PI = $x^2 : 2a$ (§.398 *Anal. fin.*). Est igitur spatium movendo in medio resistente confectum ad spatium eodem tempore in medio non resistente conficiendum ut PN ad PI. *Q. e. d.*

THEOREMA 164.

Tab. XIIX. Fig. 174. 718. *Spatium a gravi per medium in ratione velocitatum resistens descendente confectum tempore infinito infinitum est: celeritas vero tempore isto acquisita finita est.*

DEMONSTRATIO.

Iisdem enim positis, quæ in antecedentibus, spatium movendo confectum tempore AP est ut semiordinata PN. Quare cum crescente AP crescat etiam PN; ubi AP fit infinita, etiam applicata ad AP infinita evadere debet, consequenter tempore infinito percursum spatium infinitum est. *Quod erat unum.*

Jam celeritas absolute maxima, quam corpus in medio resistente cadendo acquirere potest, exponitur per subtangentem Logisticæ AQH ipsi AB æqualem, adeoque per lineam finitam, consequenter & ipsa finita est. Celeritas igitur tempore infinito acquisita finita est. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 165.

719. *Si intra asymptotos* CB & BA *rectangulas describatur Hyperbola æquilatera & recta* AB *vel rectangulum* ABNE *exponat celeritatem maximam, quam corpus per medium in ratione celeritatum resistens acquirere valet: area* AILE *exponet tempus, rectangulum* AIKE *celeritatem cadendo acquisitam &* EKL *spatium tempore isto confectum.* Tab. XIX. Fig. 175.

DEMONSTRATIO.

Sit AB = a seu ut celeritas maxima, quam corpus acquirere valet, AI = v, seu ut celeritas tempore x acquisita, & AE = b; erit ob constantem b, $ab : bv = a : v$ (§. 178. *Arithm.*), adeoque etiam rectangulum ABNE exponet celeri-

leritatem maximam, quam corpus cadendo in medio resistente acquirere valet & AIKE exponet celeritatem dato tempore x acquisitam. *Quod erat primum.*

Quoniam medium resistit in ratione celeritatum; erit $dx = \frac{adv}{a-v}$ (§.710), adeoque $bdx = \frac{abdv}{a-v}$. Quoniam $AB = a$, $AI = v$; erit $BI = a - v$. Est vero in Hyperbola BA.AE = BI. IL (§. 486. *Analys. fin.*), adeoque $(a-v)$. IL $= ab$, consequenter IL$= ab : (a-v)$. Est igitur $abdv : (a-v)$ elementum areæ AILE. Quamobrem bx æquatur areæ AILE, & hinc x seu AP = AILE : AE. Ob constantem itaque AE tempus x est ut spatium hyperbolicum asymptoticum AILE (§. 178. *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Jam si tempus x exponatur per rectam AP & celeritas eodem acquisita v per rectam AI; spatium cadendo confectum est ut $x - v$ (§.712). Quare si tempus exponitur per spatium hyperbolicum AILE & celeritas isto tempore acquisita per rectangulum AIKE; spatium descensus exponitur per eorum differentiam, adeoque per trilineum hyperbolicum EKL. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

720. Quoniam celeritas per resistentiam medii in ratione celeritatis extincta est ut spatium dato tempore cadendo confectum (§.712), spatium vero hoc est ut trilineum hyperbolicum EKL (§. 719); erit etiam celeritas tempore AILE extincta ut trilineum KLE.

COROLLARIUM 2.

721. Et quia rectangulum AIKE celeritatem cadendo tempore AILE acquisitam exponit (§.719); celeritas acquisita est ad celeritatem extinctam ut rectangulum AIKE ad trilineum hyperbolicum EKL.

THEOREMA 166.

722. *Si recta dimidia* AB *sit subtangens & AC asymptotus Logarithmicæ* BOI, *ductaque* BF *ipsi* AC *parallela fiat ut semiordinata Logarithmicæ* OP *aucta dupla subtangente* AB *ad* OK *semiordinatam, ita abscissa* AP *ad quartam proportionalem* PQ; *erit punctum* Q *in curva celeritatum residuarum* AQH, *seu abscissa* AP *tempus, semiordinata* PQ *celeritatem hoc tempore cadendo a gravi acquisitam exponet, siquidem eidem resistitur in ratione celeritatum duplicata.* Tab. XIIX Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PQ = v$; erit

erit $adx - adv = zdx$ (§. 708). Est vero $z = v^2 : a$ *per hypoth.* observata scilicet lege homogeneorum. Ergo

$$adx - adv = \frac{v^2 dx}{a}$$

$$a^2 dx - a^2 dv = v^2 dx$$

$$a^2 dx - v^2 dx = a^2 dv$$

$$dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$$

Fiat $v = \dfrac{ay - a^2}{y + a}$

erit $dv = \dfrac{aydy + a^2dy - aydy + a^2dy}{(y+a)^2}$

$$= \frac{2a^2dy}{(y+a)^2}$$

& $v^2 = \dfrac{a^2y^2 - 2a^3y + a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

adeoque $a^2 - v^2 = a^2 - \dfrac{a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{y^2 + 2ay + a^2}$

$$= \frac{a^2y^2 + 2a^3y + a^4 - a^2y^2 + 2a^3y - a^4}{(y+a)^2}$$

$$= \frac{4a^3y}{(y+a)^2}$$

Ergo $\dfrac{a^2dv}{a^2 - v^2} = \dfrac{2a^4dy(y+a)^2}{4a^3y(y+a)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}ady}{y}$$

Habemus itaque $dx = \frac{1}{2}ady : y$, quæ est æquatio ad Logarithmicam, cujus subtangens $\frac{1}{2}a$.

Sit itaque AB $= a$, BF ad AB in puncto B, AC ad eandem rectam in altero extremo A perpendicularis. Describatur Logarithmica BOI, cujus asymptotus AC, subtangens $= \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}a$. Si jam sumatur AP $= x$; erit PO $= y$, adeoque OK $= y - a$, consequenter $dx = \frac{1}{2}ady : y$ (§. 54. *Anal. infin.*). Jam vero vi calculi $v = (ay - a^2) : (y + a)$, adeoque $y + a : y - a :: = a : v$. Est itaque PO + AB : OK = AB : PQ. Quare cum PQ $= v$ sit celeritas tempore x residua; recta AP tempus, PQ celeritatem residuam seu hoc tempore acquisitam exponit, consequenter AQH est curva celeritatum residuarum (§. 682). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

723. Quodsi fiat PM = AP & MN = QP; erit punctum N in curva resistentiæ totalis ANG. Quoniam enim AP tempus exponit, PM est ut celeritas cadendo in vacuo seu medio non resistente acquisita (§. 68). Quare cum QP sit ut celeritas in medio resistente tempore AP acquisita (§. 722); si MN ipsi QP æqualis fiat, erit PN ut celeritas

tas refiftentia medii extincta tempore AP. Eft igitur ANG curva refiftentiæ totalis (§. 682).

THEOREMA 167.

Tab. XIIX. Fig. 176. 724. *Iisdem positis, quæ in propositione præcedente, dupla subtangens* AB *Logarithmicæ* BOI, *cujus ope curva celeritatum residuarum* AQH *construitur, celeritatem maximam exponit, quam grave in medio in ratione duplicata celeritatum resistente cadendo acquirere potest; eam vero grave non acquirit nisi tempore infinito elapso & recta* BF *est curvæ celeritatum residuarum* AGH *asymptotus.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus femiordinatam QP, quæ celeritatem in medio refiftente tempore AP acquifitam exponit, fieri ipfi AB feu fubtangenti Logarithmicæ BOI æqualem; punctum H coincidet cum puncto F, curva nimirum AQH cum recta BF concurrente. Eft vero PO + AB : OK = AB : PQ (§. 722), hoc eft, OK + 2 AB : OK = AB : PQ. Quare fi PQ ipfi AB æqualis fieri debet, necesfe eft ut OK æqualis evadat ipfi OK + 2 AB. Enimvero hoc fieri nequit, nifi quando 2 AB refpectu ipfius OK infinite parva evadit (§. 4. *Analyf. infin.*), confequenter quando OK, adeoque etiam BF infinita evadit. Ergo PQ ipfi AB æqualis fieri nequit, nifi quando AC infinita evadit. Curva igitur celeritatum refiduarum cum recta BF nonnifi infinito intervallo concurrit, atque adeo BF eft ipfius afymptotus & AB exponit celeritatem maximam, quam corpus in medio refiftente acquirere poteft, cumq; recta tempus repræfentans AP infinita evadit, quando fit PQ = AB, celeritas maxima nonnifi infinito tempore acquiritur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

725. Quoniam OK + 2 AB : OK = AB : PQ (§. 722); erit AB − PQ : PQ = 2 AB : OK (§. 193. *Arithm.*), hoc eft, KQ : QP = 2 AB : OK, feu differentia celeritatis dato tempore acquifitæ a maxima, quæ in medio refiftente acquiri poteft, eft ad celeritatem dato tempore acquifitam ut dupla maxima, quæ acquiri poteft, ad femiordinatam OK Logarithmicæ BOI applicatam ad afymptotum BF curvæ celeritatum in medio refiftente acquifitarum AQH.

COROLLARIUM 2.

726. Quoniam celeritas maxima a gravi cadente in medio, quod in ratione duplicata celeritatum refiftit, non acquiritur, nifi infinito tempore elapfo (§. 724); grave cadens eandem nunquam attingere poteft.

SCHO-

SCHOLION.

727. Hugenius *celeritatem maximam, quam grave in medio resistente acquirere potest*, celeritatem terminalem *appellat* (k).

THEOREMA 168.

728. *Si grave descenderet in vacuo seu medio non resistente, tempore finito eam celeritatem acquireret, quam in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente nonnisi tempore infinito acquirere potest.*

DEMONSTRATIO.

Sive enim mobile descendat in medio, quod in ratione celeritatum simplici resistit, sive in medio cadat, quod in illorum duplicata ratione descensum impedit; celeritas maxima, quam cadendo acquirere potest grave, est ut linea quædam data (§. 715. 724), adeoque finita. Quamobrem cum celeritates in vacuo acquisitæ sint ut tempora (§. 68); celeritas terminalis gravium in medio resistente tempore finito acquiritur in non resistente. Enimvero eadem celeritas in medio utroque resistente non acquiritur nisi tempore infinito (§. 715. 726): Ergo in non resistente finito tempore acquiritur, quæ in resistente utroque infinito acquiritur. *Q. e. d.*

THEOREMA 169.

729. *Spatium in vacuo celeritate terminali* AB *tempore* AP *a gravi percursum est ad spatium eodem tempore percursum in medio sive in simplici, sive in duplicata ratione celeritatum resistente ut rectangulum* ABKP *ad aream* AQP. Tab. XIIX. Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim mobile in vacuo celeritate terminali latum motu æquabili movetur *per hypoth.* erit idem in ratione composita celeritatis terminalis AB & temporis AP (§. 34), adeoque ut rectangulum ABKP. Enimvero in omni medio resistente spatium tempore AP percursum est ut area curvæ celeritatum residuarum AQP (§. 708). Est igitur spatium a gravi in medio resistente percursum, sive motus impediatur in ratione celeritatum, sive in ratione earundum duplicata, ad spatium eodem tempore celeritate terminali in vacuo confectum ut area curvæ celeritatum residuarum AQP ad rectangulum ABKP. *Q. e. d.*

THEO-

(k) in Discursu de causa gravitatis p. 170.

THEOREMA 170.

730. *Si celeritate terminali tanquam radio describatur quadrans circuli & celeritas in medio, quod in ratione duplicata celeritatum resistit, a gravi cadendo acquisita exponatur per cosinum arcus, spatium in medio isto descriptum erit ut differentia logarithmorum sinus versi & excessus diametri supra eundem.*

DEMONSTRATIO.

Si enim tempus $= x$, celeritas in medio resistente acquisita $= v$; erit spatium in eodem percursum $\int v dx$ (§. 708). Reperimus vero supra (§. 722) $dx = \frac{a^2 dv}{a^2 - v^2}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$. Sed $\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)\ (a+v)} - \frac{\frac{1}{2} a dv + \frac{1}{2} v dv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2} dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} dv}{a+v}$. Ergo $v dx = \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ per demonstrata $= \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a-v} - \frac{\frac{1}{2} a^2 dv}{a+v}$. Jam $\int dv : (a-v) = - l(a-v)$ & $\int dv : (a+v) = l(a+v)$ quia quantitate constante a sumta pro unitate $a-v$ exprimit numerum unitate minorem, adeoque logarithmum habet negativum (§. 351. *Arithm.*). Ergo $\int v dx = -\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$. Sunt ergo spatia in medio resistente tempore x percursa ut $-\frac{1}{2} a^2 l(a-v) - \frac{1}{2} a^2 l(a+v)$, consequenter ob constantem $\frac{1}{2} a^2$ ut $- l(a-v) - l(a+v)$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, ut differentiæ Logarithmorum quantitatum $a-v$ & $a+v$. Quodsi jam celeritate terminali AB describatur quadrans BD ducaturque recta QE ipsi PD parallela; erit AL sinus arcus ED, seu cosinus arcus BE $= v$, adeoque BL sinus versus arcus ejusdem BE $= a-v$, consequenter logarithmus negativus $a-v$ logarithmus sinus versi BL. Jam diameter circuli $= 2a$. Quare si inde subducas $a-v$, relinquetur $a+v$. Est igitur $a+v$ excessus diametri BS supra sinum versum BL, adeoque logarithmus positivus $a+v$ logarithmus excessus diametri BS supra sinum versum BL. Jam cum $- l(a-v) - l(a+v)$ sit differentia Logarithmi negativi ipsius BL & positivi LS; spatium a mobili in ratione celeritatum duplicata resistente descriptum est ut differentia logarithmorum sinus versi BL & excessus diametri BS supra sinum versum BL, si celeritate terminali describitur Qua-

Tab. XIX Fig. 176.

drans circuli BED & AL cosinus arcus BE fiat æqualis rectæ QP, quæ celeritatem tempore AP acquisitam exponit, quo spatium istud confectum est. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

731. Quoniam excessus diametri supra sinum versum est hujus complementum ad diametrum, & differentia Logarithmorum sinus versi & excessus ejus supra diametrum est Logarithmus sinus versi per complementum ejus ad diametrum divisi (§. 243. *Arithm.*), consequenter logarithmus rationis sinus versi ad complementum ejus ad diametrum (§. 128. *Arithm.*); si celeritate terminali sumta pro sinu toto, cosinus arcuum sint ut celeritates cadendo acquisitæ, erunt logarithmi rationis sinuum versorum ad eorum complementa ad diametrum ut spatia temporibus istis descripta, quibus celeritates fuere acquisitæ.

THEOREMA 171.

Tab. XII. X Fig. 376. 732. *Si gravis descensus impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritate terminali* AB *describitur quadrans circuli* BED, *sitque* ER = AL *sinus arcus* ED *ut celeritas in medio resistente cadendo acquisita, erit spatium percursum ut logarithmus sinus complementi* EL.

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione praecedentis theorematis, si spatium sit s, AL = ER = v, AB = a, esse $ds = \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Sit EL = y: erit (§. 377. *Anal. fin.*).

$$y^2 = a^2 - v^2$$
$$2ydy = -2vdv$$
$$ydy = -vdv$$
$$-a^2ydy = a^2vdv$$
$$\frac{a^2vdv}{a^2-v^2} = -\frac{a^2ydy}{y^2}$$

hoc est, $ds = -\frac{a^2dy}{y}$

$$s = -a^2\int\frac{dy}{y}$$
$$= -a^2 ly$$

Sunt igitur spatia ut $-a^2ly$, seu propter constantem a (§. 181. *Arithm.*) ut $-ly$. Est vero $-ly$ logarithmus sinus EL, utpote negativus, quia sinus EL continuo decrescunt, crescentibus sinibus ER. Quare si velocitates residuæ sumuntur ut sinus arcuum ED, erunt spatia descripta eodem tempore, quo celeritates istæ cadendo acquisitæ, ut logarithmi cosinuum EL,

EL, seu sinuum complementorum arcuum ED. *Q. e. d.*

SCHOLION.

733. *Quodsi dubites summam differentialis* $-a^2dy : y$ *esse* $-a^2 ly$, *propterea quod quantitas constans eidem in integratione adjici possit* (§. 95. Anal. infin.): *adjice quantitatem constantem* c *ut sit* $s = c - a^2ly$. *Quoniam in casu* $v = o$ *evadit* $y = la$, *erit* $c - a^2la = o$. *Sumatur* a *pro unitate, erit* $c - la = o$, *adeoque* $c = la$. *Sed logarithmus unitatis* $= o$ (§. 334. Arithm.). *Ergo etiam* $c = o$. *Patet igitur si* AB *sumatur pro unitate, non opus esse ut quantitas quædam constans in summatione elementi cosinus* EL *adjiciatur.*

THEOREMA 172.

734. *Si gravi descendenti resistitur in ratione duplicata celeritatum & cosinus arcus* EB *exponit celeritatem cadendo acquisitam, radius vero* AB *celeritatem terminalem; tempus, quo celeritatem istam cadendo acquisivit grave, est ut logarithmus rationis* SL *ad* LB, *seu complementi sinus versi ad diametrum ad sinum versum.*

DEMONSTRATIO.

Si sit $AB = a$, $AL = ER = v$, tempus descensus $= x$; erit $dx = \frac{a^2dv}{a^2-v^2}$, prouti apparet ex demonstratione theorematis 169. (§. 730).

Jam vero $\frac{adv}{(a-v)(a+v)} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v}$ utpote (facta reductione ad denominationem eandem) $= (\frac{1}{2}dv + \frac{vdv}{2a} + \frac{1}{2}dv - \frac{vdv}{2a}) : (a-v)(\frac{1}{2}a+v)$. Ergo $\frac{adv}{a^2-v^2} = \frac{\frac{1}{2}adv}{a-v} + \frac{\frac{1}{2}adv}{a+v} = dx$. Quoniam $\int\frac{dv}{a-v} = -l(d-v)$ & $\int\frac{dv}{a+v} = l(a+v)$; erit $x = \frac{1}{2}al(a+v) - \frac{1}{2}al(a-v)$. Sunt igitur propter constantem $\frac{1}{2}a$ tempora, quibus celeritates v acquiruntur, ut $l(a+v) - l(a-v)$. Jam $l(a+v) - l(a-v) = l\frac{a+v}{a-v}$ (§. 243. *Arithm.*), hoc est, cum sit $a+v = LS$ & $a-v = BL$, $l(a+v) - l(a-v) = l(LS:LB)$, qui est logarithmus rationis LS ad LB (§. 129. *Arithm.*). Ergo si radius circuli AB exponit celeritatem terminalem & AL cosinus arcus BE celeritatem in medio resistente data lege acquisitam; erit tempus, quo celeritas hæc a gravi cadendo acquiritur ut logarithmus rationis complementi sinus versi ad diametrum LS ad sinum versum LB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

735. Patet ex demonstratione theorematis præsentis esse tempus x ut $l\frac{a+v}{a-v}$ si a exponat celeritatem terminalem & v celeritatem tempore x acquisitam. Est vero $a+v$ celeritas acquisita terminali aucta & $a-v$ differentia ejus a terminali, seu complementum ad terminalem; consequenter $(a+v):(a-v)$ exprimit rationem celeritatis acquisitæ terminali auctæ ad ipsius complementum ad terminalem. Tempus igitur est ut logarithmus rationis celeritatis acquisitæ terminali auctæ ad ipsius complementum ad terminalem.

COROLLARIUM 2.

736. Quoniam QP $= v$, KQ $= a-v$; si fiat PT $=$ AS $=$ AB; erit QT $= a+v$, consequenter logarithmus rationis TQ ad QK ut tempus.

THEOREMA 173.

737. *Si rationis inter summam celeritatis terminalis & acquisitæ atque differentiam acquisitæ a terminali sumantur ut numeri & descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum; erunt tempora, quibus celeritates fuerunt acquisitæ, ut logarithmi.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis fuerit $= a$, acquisita $= v$; erit summa terminalis & acquisitæ $a+v$ & differentia acquisitæ a terminali $a-v$, consequenter ratio summæ istius ad hanc differentiam $= \frac{a+v}{a-v}$ (§.129 *Arithm.*). Sunt vero tempora, quibus celeritates istæ acquiruntur, ut $l\frac{a+v}{a-v}$ (§.734). Quare si ratio summæ terminalis celeritatis ac acquisitæ ad differentiam acquisitæ a terminali sumitur ut numerus; erit tempus, quo celeritas acquisita fuit, ut logarithmus. *Q. e. d.*

THEOREMA 174.

738. *Si descensui gravis resistitur in ratione duplicata celeritatum & spatia percursa sint ut logarithmi Sinuum* LE *arcus* BE *quadrantis* BD *celeritate terminali tanquam radio descripti; tempora insumta sunt ut logarithmi rationis, inter sinum versum* BL *&* *complementum ejus ad diametrum* LS. Tab. XXI Fig. 176.

DEMONSTRATIO.

Si enim descensus gravis impeditur in ratione duplicata celeritatis & celeritate terminali AB descripto quadrante BED cosinus arcus BE, seu arcus ED sinus LA est

est ut celeritas acquisita, spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum EL (§.732), tempora vero insumta ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus complementum ad diametrum LS (§.734). Quamobrem quando spatia percursa sunt ut logarithmi sinuum; tempora insumta sunt ut logarithmi rationum inter sinum versum BL & ejus ad diametrum complementum LS. *Q. e. d.*

THEOREMA 175.

739. *Incrementum celeritatis gravium in medio non resistente est ad incrementum acquisitæ in medio, quod in ratione duplicata celeritatis resistit, ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus supra quadratum celeritatis acquisitæ excessum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam celeritas gravium in medio non resistente crescit in ratione temporis (§.68); si tempus dicatur x, erit incrementum celeritatis momentaneum in tempusculo scilicet dx uti dv. Jam si celeritas terminalis $= a$, celeritas toto tempore x in medio, quod in ratione duplicata celeritatis resistit; acquisita $= v$; erit $a^2dx - v^2dx = a^2dv$, prouti patet ex demonstratione theorematis 166. (§.722). Est igitur $dx : dv = a^2 : a^2 - v^2$. Quare cum dv sit incrementum momentaneum celeritatis in medio data lege resistente acquisitæ, erit incrementum celeritatis in vacuo ad ejus incrementum in medio resistente ut quadratum celeritatis terminalis ad ejus excessum supra quadratum acquisitæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

740. Quoniam $(a^2 - v^2) = (a + v)(a - v)$; erit dx ad dv in ratione composita a ad $a + v$ & a ad $a - v$, hoc est, incrementum celeritatis in vacuo momentaneum est in casu dato ad incrementum in medio resistente in ratione composita celeritatis terminalis ad eandem celeritate acquisita auctam & ejusdem celeritatis terminalis ad ipsius supra acquisitam excessum.

THEOREMA 176.

741. *Si motus gravium impeditur in ratione duplicata celeritatum & celeritas terminalis exponitur per rectam* AB = CF; *qua tanquam radio describitur quadrans, eodem vero pro latere potentiæ hyperbolæ sumto intra asymptotos* AC & CD *describatur hyperbola* BME *fiatque* HF *celeritati in medio resistente acquisitæ æqualis; area hyperbolica* APMB *exprimit spatium eo tempore a* Tab. XIIX Fig. 177.

 gra-

gravi percursum, quo celeritatem ut HF *acquisivit.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim AB = AC = CF = a, HF = v; erit ob $GF^2 = GH^2 + HF^2$ (§. 417. *Geom.*) GH = CP = $\surd(a^2 - v^2)$, consequenter ob PC. PM = AB^2 (§. 488. *Anal. fin.*) PM = $a^2 : \surd(a^2 - v^2)$. Jam differentiale rectæ AP = $a - \surd(a^2 - v^2) = \frac{vdv}{\surd(a^2 - v^2)}$. Quamobrem elementum areæ APMB = $\frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$, consequenter area APMB = $\int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$. Est vero spatium a gravi interea temporis percursum, quo celeritas v acquisita, $\int \frac{a^2 vdv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Ergo spatium hyperbolicum APMB exprimit spatium a gravi interea temporis percursum, quo celeritas ut HF acquisita. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

742. Quando celeritas acquisita FH in terminalem FC degenerat, semiordinata PM cum asymptoto CD coincidit, adeoque area hyperbolica ABMP degenerat in infinitam EBACD, consequenter spatium repræsentat infinitum a gravi percursum, aut percurrendum. Quoniam itaque celeritatem terminalem non attingit nisi tempore infinito elapso (§. 726); spatium infinitum a gravi nonnisi tempore infinito percurritur.

THEOREMA 177.

743. *Si intra asymptotos rectangulas* AB *&* AC *describatur Hyperbola æquilatera* EMD, *cujus latus potentiæ est ut celeritas terminalis,* BP *vero ut tertia proportionalis ad celeritatem terminalem & celeritatem tempore finito acquisitam, spatium hyperbolicum* DBPM *exponet spatium eodem tempore a gravi in medio descriptum, quod in ratione duplicata descensui resistit, quo celeritas acquisita fuit.* Tab. XIII Fig. 171.

DEMONSTRATIO.

Sit AB = a, erit etiam latus potentiæ hyperbolæ = a. Sit celeritas tempore dato a gravi cadendo acquisita = v; erit PB = $\frac{v^2}{a}$, consequenter AP = $a - \frac{v^2}{a} = \frac{a^2 - v^2}{a}$. Unde ob AP. PM = a^2 (§. 488. *Anal. fin.*), reperitur PM = $\frac{a^3}{a^2 - v^2}$. Jam differentiale abscissæ PB = $\frac{2vdv}{a}$, consequenter elementum spatii hyperbolici DBPM = $\frac{2a^2 vdv}{a^2 - v^2}$,

adeo-

adeoque DBPM $= 2\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$.

Est igitur area hyperbolica DBPM ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ propter constantem 2 (§. 181. *Arithm.*). Ex antecedentibus constat spatium a gravi in medio data lege resistente interea temporis descriptum, dum celeritatem v acquirit, esse ut $\int \frac{a^2 v dv}{a^2 - v^2}$ (§. 730). Idem igitur spatium est ut spatium hyperbolicum asymptoticum DBPM.

SCHOLION.

744. *Patet adeo, unum idemque spatium descensus multis modis per figuras repraesentari posse.*

CAPUT XV.

DE
MACHINIS SIMPLICIBUS.

DEFINITIO 71.

745. *Machina* vocatur, quicquid ad motum producendum conducit, ut vel virium, vel temporis compendio efficiatur.

SCHOLION.

746. *Quoniam effectus machinarum ex structura ipsarum secundum immutabiles motuum leges consequuntur; omnes operationes rerum corporearum mechanica dicuntur, quia agunt structura sua convenienter & juxta aeternas motuum leges. Hinc manifestum est, illum demum mechanice philosophari, qui evidenter ostendit, quomodo vi legum motus effectus rerum ex structura ipsarum consequantur. Nec difficulter hinc colligitur, paucos admodum esse, qui mechanice philosophantur. Apparet etiam, philosophiam mechanicam liberam esse ab ea labe, quam imperiti eidem adspergere conantur. Immo nec obscurum est, sine Matheseos praesidio de rebus naturalibus temere philosophari.*

DEFINITIO 72.

747. Per *Potentiam* intelligo vim, quae machinae applicata ad motum tendit, sive actu eundem producat, sive non. In priore casu dicitur *Potentia movens*; in posteriore *Potentia sustentans*.

DEFINITIO 73.

748. *Pondus* appello, quod ope machinae vel sustentatur, vel movetur, vel motui producendo utcunque resistit.

DE-

DEFINITIO 74.

Tab. V. Fig. 58. 749. *Vectis* est linea recta inflexilis & gravitatis expers AB, unico sui puncto C fulcro firmo D innixus, circa quod moveri potest.

COROLLARIUM.

750. Omnia ergo instrumenta, in quibus rectam circa punctum fixum mobilem concipere licet, cui uno in loco pondus aliquod, in alio potentia in usu applicatur, ad vectem revocantur, consequenter quæ de vecte demonstrantur, ad eadem recte applicantur.

SCHOLION 1.

751. *Ex natura vectis adeo ratio redditur non modo structuræ & effectuum omnium instrumentorum in officinis artificum atque opificum, nec non passim in vita communi obviorum; sed & motuum animalium: quod posterius primus docuit* Johannes Alphonsus Borellus *in peculiari* de motu animalium *opere.*

SCHOLION 2.

752. *In genere autem notandum est, ubi machinarum leges investigamus, non considerari materiam, ex qua constant, nec materiæ affectiones, neque varias figuras, quæ ob certos usus inducuntur; sed tantum eorum rationem haberi, quæ machinæ essentiam absolvunt, ut nempe constet, quæ machinæ qua tali conveniunt. Quodsi enim contingat, vel materiam, vel figuram, vel aliud quodcunque obstaculum impedire, quo minus lex ista accurate observari queat; ea ex suis principiis seorsim sunt determinanda.*

DEFINITIO 75.

753. *Hypomochlium* est fulcrum, cui vectis innititur.

DEFINITIO 76.

754. *Vectis homodromus* est, in quo pondus medium locum tenet inter locum potentiæ B & hypomochlium C, vel potentia A medium locum occupat inter locum ponderis B & hypomochlium C. Tab. V. Fig. 58.

DEFINITIO 77.

755. *Vectis heterodromus* est, in quo hypomochlium medium locum C tenet inter locum ponderis A & locum potentiæ B. Tab. V. Fig. 58.

DEFINITIO 78.

756. *Axis in peritrochio* est circulus AB basi cylindri concentricus & una cum ipso circa axem ejus EF mobilis. Cylindrus ille *Axis*, circulus *Peritrochium*, radii circuli (qui subinde soli comparent) *Scytalæ* appellantur. Tab. V. Fig. 60.

SCHOLION.

757. *Proprie per axem intelligitur virga ferrea, cui circumpositus est cylindrus ligneus schytalis instructus. Enimvero rationem paulo ante reddidi (§. 746), cur definitiones ad geometriam puram revocari consultum sit.*

COROLLARIUM.

758. Axi adeo in peritrochio locus est, quotiescunque in motu machinæ con-

concipere licet circulum circa axem fixum descriptum & cylindri huic circumpositi plano concentricum.

DEFINITIO 79.

Tab. I. Fig. 1. 759. *Trochlea* est circulus circa centrum C volubilis.

DEFINITIO 80.

Tab. I. Fig. 2. 3. 760. *Cochlea* est cylindrus rectus AB spirali similiter sulcatus. Describitur autem illa spiralis, si recta FG motu æquabili in superficie cylindri circumferatur & interea punctum I ex F versus G motu itidem æquabili descendit. *Cochlea mas* est, si superficies convexa; *Cochlea fœmina* vero, si concava fuerit sulcata.

SHOLION.

Tab. I. Fig. 3. 761. *Mas & fœmina, si motus gigni debet, semper conjunguntur. Loquor nimirum de cochlea simplicis usu. Si enim cum axe in peritrochio conjungitur; fœmina opus non est, cum is vices ejus adimpleat. Sed hoc in casu machina composita prodit.*

DEFINITIO 81.

762. *Cuneus* est prisma triangulare, cujus bases sunt triangula æquicrura acutangula.

AXIOMA 10.

763. *Potentia æqalis est ponderi quod, salvo effectu, in ejus locum substitui potest.*

SCHOLION.

764. *Patet ex ipsa aqualitatis definitione* (§.15. Arithm.)

THEOREMA 178.

765. *Si potentia* B *vecti sive homodromo, sive heterodromo applicata sustentat pondus in* A *applicatum, rationem reciprocam distantiarum ab hypomochlio ad pondus habet.* Tab. V. Fig. 58.

DEMONSTRATIO.

Sit primum vectis AB heterodromus. Quoniam supponitur horizonti parallelus; linea directionis utriusque ponderis erit ad ipsum perpendicularis, centrumque gravitatis unius in A, alterius in B (§.215). Quodsi ergo pro potentia in B applicata substituatur pondus æquale; habebimus duo pondera, quorum centra gravitatis recta AB connectuntur, eaque in æquilibrio, cum potentia pondus sustentet *per hypoth.* Est igitur C centrum gravitatis commune (§.122), consequenter pondus in B, hoc est, potentia ad pondus in A reciproce se habet ut AC ad CB (§.144). *Quod erat unum.*

Si vectis fuerit homodromus CB, ponderis G non aliam partem sustentat potentia in B applicata, quam Tab. V. Fig. 59.

quam quæ ferenda est a fulcro ibi supposito. Est igitur ad pondus A ut distantia ponderis ab hypomochlio AC ad distantiam potentiæ CB (§.231). *Quod erat secundum.*

Tab. V. Fig. 65. Si vectis fuerit inclinatus, hoc est, si linea directionis ponderis & potentiæ cum vecte AB angulum efficiat obliquum, erunt CD & CE ad lineas directionis AF & EG perpendiculares distantiæ a centro motus C (§.229), consequenter eodem, quo ante, modo demonstratur, potentiam sustentantem, quæ in B applicatur, esse ad pondus in A suspensum ut DC ad CE (§.272). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

766. Quodsi potentia, quæ pondus sustentat, augeatur, præpollebit, adeoque dato vecte pondus movebit.

SCHOLION.

767. *Facile itaque ad vectem ea omnia transferuntur, quæ superius de æquiponderantibus* (§. 144. & seqq. item jue §.231. & seqq. §. 272. & seqq.) *demonstrata sunt.*

PROBLEMA 118.

Tab. V. Fig. 58. 768. *Data gravitate vectis heterodromi* AB, *distantia centri gravitatis ab hypomochlio* CV, *distantiis ponderis atque potentiæ* AC & CB, *una cum pondere* O, *invenire potentiam, quæ ipsum sustentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Concipiamus vectem gravitatatis expertem & ejus loco in V appensum pondus eidem æquale G. Quodsi fiat ut AC ad CV ita gravitas vectis ad quartum: reperietur pondus, quod vectis sustentare valet (§.765).
2. Subtrahatur id a pondere dato, residuum erit pondus a potentia sustentandum.
3. Fiat igitur ut CB ad CA ita pondus residuum ad quartum: & reperietur potentia in B applicanda, ut dato vecte datum pondus sustentet (§. 765).

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10 librarum, O = 300. Fiat

$$1 - 2 - 10 \qquad 5 - 1 - 280$$
$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 20 \\ 3.00 \\ \hline 280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \hline 280 \end{array}$$

$\frac{280}{5}$ (56. Potentia.

PROBLEMA 119.

769. *Datis gravitate vectis heterodromi* AB, *distantia centri gravitatis ab hypomochlio* CV, *distantiis potentiæ atque ponderis* BC Tab. V. Fig. 58.

& CA

& CA, invenire pondus sustentandum.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ut in problemate præcedente pars ponderis a vecte solo sustentandi.
2. Quæratur eadem ratione pars altera ponderis, quam potentia in B applicata sustentare valet.
3. Jungantur partes sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit pondus quæsitum.

Sit e. gr. CA = 1, CV = 2, CB = 5, G = 10, potentia 56. librarum: invenietur

ponderis pars prima = 20
altera = 280

pondus integrum = 300

PROBLEMA 120.

Tab. V. Fig. 58. 770. *Datis gravitate vectis heterodromi AB, pondere sustentando G, potentia in B applicanda, longitudine ac centro gravitatis vectis V, invenire centrum gravitatis commune seu centrum motus C.*

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in centro gravitatis V appensum pondus G. Quæratur centrum gravitatis commune Z potentiæ in B applicatæ & ponderis G (§. 149.)
2. Subtrahatur ZB ex AB, relinquetur AZ.
3. Concipiatur denique in Z appensum pondus, gravitati vectis & potentiæ junctim sumtis æquale, & inveniatur hujus ponderis & ponderis dati O centrum gravitatis commune C (§. 149), quod quærebatur.

E. gr. Sit potentia in B 56, gravitas vectis 10, pondus O 300 librarum, AB = 6, VB = 3. Fiat

66 — 10 — 3

3

30

$ZB = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$
$AB = \frac{66}{11}$

$AZ = \frac{61}{11}$

$366 - 66 - \frac{61}{11}$
h. e. 61 11 $\frac{61}{11}$ 84 (1 = AC
11 84

61

PROBLEMA 121.

771. *Datis gravitate & centro gravitatis F vectis homodromi CB, pondere G, distantia ejus ab hypomochlio CA, una cum distantia potentiæ CB, invenire potentiam, quæ pondus sustentare valet.* Tab. V. Fig. 59.

RESOLUTIO.

1. Concipiatur vectis gravitatis expers & ejus loco in F appensum pondus ei æquale, quæraturque

potentia vectem solum sustentatura (§. 765).

2. Quæratur porro potentia requisita ad pondus datum G sustentandum (*§. cit.*)

3. Addantur potentiæ sigillatim repertæ in unam summam. Ita prodit potentia quæsita.

Sit e. gr. CA = 1, CF = 3, CB = 6, pondus datum 300. gravitas vectis 10. librarum. Reperietur potentia vectem sustentatura 5, pondus vero solum sustentatura 50, adeoque potentia integra 55. librarum.

THEOREMA 179.

772. *Si potentia vecte sive heterodromo, sive homodromo pondus attollit, spatium illius est ad spatium hujus ut hoc ad potentiam, quæ idem pondus tantum sustentare valet.*

DEMONSTRATIO.

Tab. V. Fig. 58. 59. Dum pondus attollitur per arcum A*a*, potentia movetur per arcum B*b*. Sunt vero arcus A*a* & B*b* similes, in vecte heterodromo ob angulos verticales ad C æquales (*§. 156. Geom.*); in homodromo, quia concentrici, consequenter A*a* : B*b* = AC : CB (*§. 138. 412. Geom.*). Sed ut AC ad CB ita potentia ad pondus, quod sustentare valet (*§. 756*). Ergo spatium potentiæ ad spatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ idem sustentare valet (*§. 167*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

773. Lucrum itaque virium cum temporis dispendio conjungitur & contra.

PROBLEMA 122.

774. *Stateram construere, hoc est, instrumentum, quo unico pondere mediante diversorum corporum gravitatem explorare licet.*

RESOLUTIO.

1. In virga ferrea aut lignea, aut ex quacunque materia alia parata, AB assumatur ad arbitrium punctum C & in eo perpendiculariter erigatur examen seu lingula CD. Tab. V. Fig. 56.

2. Jugum intra trutinam seu scapum GF supendatur &

3. Brachium minus AC unco AH & lance G alioque quocunque modo oneretur, donec majori æquilibretur, aut non multum ab æquilibrio absit.

4. Pondus I huc illucque promoveatur, donec cum una, duobus, tribus, quatuor &c. libris in lance G collocatis æquilibretur, notentur puncta, in quibus I ponderat ut una, duo, tres, quatuor &c. libræ.

Ipsa

Ipsa conoructio loquitur, hoc modo unici ponderis I ope pondera corporum admodum differentium explorari posse (§. 756).

SCHOLION 1.

775. *Quodsi onera ingentia, quales sunt currus fœno onusti, ponderanda, non opus est, ut ad æquilibrium reducantur brachia; ingentes vero illæ staterae trutina & lingula non habent opus. Situs enim jugi horizontalis, quantum ad praxin sufficit, nudo oculo facile dignoscitur.*

SCHOLION 2.

776. *Empirica staterae, qua utuntur artifices, divisio geometrica præferenda est, qua brachium longius BC ejusdem ubique spissitudinis in partes æquales dividi jubetur. Neque enim materiæ conditio artificumque negligentia patitur, ut constructio satis sit accurata.*

SCHOLION 3.

777. *Cum pondera non ubivis locorum æqualia sint; staterae quoque empirico modo constructæ universales non sunt.*

SCHOLION 4.

778. *Utut autem commodissimus sit staterae usus, quia non multis opus est ponderibus & axis minus gravatur; e vita tamen communi eam proscribi præstat, quoniam venditores fraudulenti fallacem facile reddunt, nec adeo in promptu sit fallaciam retegere. Ad communem itaque usum construuntur libræ æqualium brachiorum. Sed antequam constructionem tradamus, fundamenta quædam theoretica sunt præmittenda.*

THEOREMA 180.

779. *Si libra, cujus centrum motus* C *fuerit supra rectam, e cujus extremis pendent pondera æqualia* H & I, *horizonti sit parallela, quiescit; sed si inclinatur, tamdiu movetur, donec iterum horizonti sit parallela.* Tab. V. Fig. 67.

DEMONSTRATIO.

Si enim jugum AB horizonti parallelum, lineæ directionis ponderum ad eam sunt perpendiculares, (§. 212) adeoque brachia AL & LB coincidunt cum distantiis a centro motus (§. 229). Quare cum sit AL = LB, erit in L centrum gravitatis commune ponderum (§. 244). Ex hoc igitur suspensa quiescunt (§. 124). *Quod erat unum.*

Quodsi ex situ suo dimoveatur, ducatur CD ad horizontem perpendicularis & GF cum eodem parallela: erunt distantiæ GE & EF (§. 229), quæ cum inæquales sint, pondera non æquilibrantur (§. 765), sed alterum I præponderat (§. 152): quod cum descendat, redit libra in statum horizonti parallelum. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 181.

Tab. V. Fig. 68. 780. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus infra jugum AB, fuerit horizonti parallela, quiescit; si vero inclinatur, in situm horizontalem non revertitur, sed descendit pondus unum, donec libra pervenerit in situm priori contrarium.*

DEMONSTRATIO.

Si jugum AB fuerit horizontale, erunt lineæ directionis ponderum H & I ad id perpendiculares (§. 212), adeoque distantiæ a centro motus rectæ AL & LB (§. 229). Est vero AL = LB, ex natura libræ, adeoque cum pondera itidem æqualia sint, *per hypoth.* centrum gravitatis commune eorundem est in C (145), adeoque situm non mutat (§. 124). *Quod erat unum.*

Si jugum inclinetur, ducatur DC ad horizontem perpendicularis & per E recta GF eidem parallela; erunt distantiæ GE & EF a centro motus C inæquales. Præponderat ergo H ex majori distantia EG adeoque continuo descendit, donec A, B & L sint in eadem recta horizontali (§ 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 182.

781. *Si libra, æqualibus ponderibus utrinque onusta, cujus centrum motus C in ipso jugo AB, fuerit horizonti parallela, quiescit, nec quomodocunque inclinata situm mutat.* Tab. V. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Prius eodem modo patet, quo in theoremate præcedente. Posterius ita demonstratur. Ducatur DE per C horizonti parallela, erunt DC & CE distantiæ ponderum H & I (§. 229). Sed ob rectos ad F & D atque verticales angulos ad C æquales (§. 156. *Geom.*) itemque AC = CB, ex natura libræ, erit DC = CE (§. 252. *Geom.*). Quare cum pondera H & I æqualia sint *per hypoth.* adhuc æquilibrantur (§. 765). Libra igitur quiescit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 123.

782. *Libram construere, hoc est, instrumentum, in cujus extremitatibus appensa gravia æqualia æquiponderant in situ horizontali.*

RESOLUTIO.

1. Jugum AB bifariam dividatur in C, ita ut brachia AC & CB sint ejusdem longitudinis, sintque tum brachia cum uncis suis Tab. V. Fig. 70.

A &

A & B, tum lances D & E ejusdem prorsus ponderis, ita ut jugum ex puncto C appensum tam lancibus instructum, quam sine iisdem situm tueatur horizontalem.

2. In medio jugi puncto C excitetur perpendiculariter examen sive lingula CF.

3. Jugum denique intra trutinam HI ita suspendatur, ut centrum motus C sit paulo supra jugum seu rectam AB, quæ appensionum puncta A & B conjungit, vel ut centrum motus sit in ipsa recta AB.

Dico, si libra ex trutina HI suspensa examen intra eandem abscondatur, gravia lancibus imposita esse æqualia, seu gravitatem utriusque esse eandem.

DEMONSTRATIO.

Si libra ex I suspendatur, erit trutina HI ad lineam horizontalem perpendicularis (§. 215). Quodsi ergo lingula intra eam absconditur, cum ea sit ad jugum AB perpendicularis *per constructionem*, jugum AB erit horizonti parallelum. Quare cum centrum motus C sit vel in jugo AB, vel supra jugum, *per construct.* pondera utrinque suspensa æqualia sunt (779. 781). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

783. Si brachia sint inæqualia, libra dolosa est.

SCHOLION 1.

784. *Præstat brachia esse longiora, quam breviora, quia idem error in divisione brachiorum admissus minorem in ponderibus producit, si brachia longiora, quam si breviora. Fac enim brachium* AC *esse justo longius uno scrupulo quarto, seu una decima linea. Si brachium* AB $= 5''$, *erit* BC : AC $= 500 : 501$. *Si* AB $= 5'$; *erit* BC : AC $= 5000 : 5001$. *In casu itaque posteriori differentia brachiorum est* $\frac{1}{5000}$; *in priore* $\frac{1}{500}$ *brevioris. Hinc & pondus majus in casu posteriore excedere debet minus* $\frac{1}{5000}$ *sui, in priore autem* $\frac{1}{500}$ *sui.*

SCHOLION 2.

785. *Vulgares libræ ita construuntur, ut centrum motus sit paulo altius jugo, quo libra ex situ horizontali emota, ponderibus utrinque æqualibus appensis, non quiescat, nisi eidem restituta* (780). *Non tamen nimis ab eo removeri debet, ut lingula minores declinationes indicet.*

SCHOLION 3.

786. *Ne affrictus impediat jugi e situ horizontali emotionem, axis ejus, qui trutinæ inseritur, cylindricus sit & foramen in trutina rotundum, ut contactus exiguus evadat. Immo motus jugi pernicior evadit, si axis in aciem desinat, qua parte trutinam tangit. Unde & jugum leve ac tenue esse debet, quantum per materiam ponderandam fieri*

potest

poteſt, ut minori vi e ſitu ſuo dimoveatur ſicque accuratius indicet æquilibrium.

PROBLEMA 124.

787. *Libram propoſitam examinare, utrum accurata ſit, nec ne.*

RESOLUTIO.

Permutentur lances aut pondera in iis æquilibrata. Quodſi enim maneat æquilibrium, libra accurata eſt; ſin minus, doloſa.

DEMONSTRATIO.

Si enim libra doloſa eſt, brachia inæqualia ſunt (§. 783) adeoque lanx ex majori brachio ſuſpenſa levior altera (§. 765). Quare ſi lancem leviorem e minori, graviorem e majori brachio ſuſpendas: præponderabit e majori brachio ſuſpenſa adeoque æquilibrium tollitur (§. 152). Q. e. d.

PROBLEMA 125.

Tab. V. Fig. 70. 788. *Libra doloſa verum pondus mercis explorare.*

RESOLUTIO.

1. Merce in lance E collacata, notetur pondus in altera D ipſi æquilibratum.
2. Eadem translata in D, notetur pondus in E ipſi æquilibratum.
3. Pondera iſta in ſe invicem ducantur &
4. Ex facto radix quadrata extrahatur. Dico hanc eſſe verum mercis pondus.

Sit e. gr. pondus in E = 10, in D = 9 librarum, reperietur verum mercis pondus $9\frac{58}{100}$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut AC ad BC ita merx ad pondus in D poſitum & ut AC ad BC ita pondus in E ad mercem (§ 765). Ergo mercis pondus eſt medium proportionale inter pondera in lancibus D & E collocata (§. 167. 156. *Arithm.*), conſequenter æquale radici ex facto ponderum in ſe invicem extracta (§. 301. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

789. Si verum mercis pondus inventum, ratio brachiorum non amplius latet. Eſt enim AC ad CB ut pondus mercis ad pondus in D ipſi æquilibratum (§. 765), e. gr. in noſtro exemplo ut 948 ad 900 ſeu ut 237 ad 225 (§. 181. *Arithm.*

COROLLARIUM 2.

790. Data ratione brachiorum AC & CB facile determinatur error in æquilibrio admiſſus (§. 765). Æquiponderent e. gr. in lance E 100 libræ merci in altera D collocatæ. Ut habeamus quæſitum, fiat

237—225—100

100 237) 225.00 (95 fere

2133.

2250

1170

1185

Dolus ergo committitur 5 librarum.

COROLLARIUM 3.

791. Invenitur quoque pars, qua brachium longius excedit minus, iisdem datis. Sit enim jugum integrum 100 partium. Fiat ut summa brachiorum 237 + 225 seu 462 ad majus 237 ita 1000 ad idem brachium in partibus jugi millesimis 513 fere. Sed ex natura libræ esse debet 500: excedit ergo veram quantitatem particulis 13, qualium scilicet jugum est 1000.

THEOREMA 183.

b. 792. ***Si potentia ope axis in peritrochio sustentet pondus* G *sitque linea directionis* AL *ad peripheriam rotæ vel ad scytalam perpendicularis; erit ut radius axis* CE *ad radium rotæ* CA *seu longitudinem scytalæ ita potentia ad pondus.***

DEMONSTRATIO.

Quodsi potentia in A applicata deprimit rotam vel scytalam, perinde est ac si vecte heterodromo ACE, cujus centrum motus in C, pondus G sustentaret. Si vero in *a* applicata eandem attollit, perinde est ac si vecte homodromo *a*EC pondus idem G sustentaret. Omnes enim machinæ partes reliquæ ad ponderis sustentationem nil conferunt, cum utrinque sibi mutuo æquilibrentur, ut machina tanquam gravitatis expers considerari possit. Jam cum linea directionis potentiæ in A vel *a* sit ad AC vel *a*C perpendicularis, *per hypoth.* & funis EG a pondere G extensus ad EC horizontalem *per hypoth.* similiter normalis (§. 215); erit ut CE ad CA vel ut EC ad C*a* ita potentia ad pondus (§. 765). *Q. e. d.*

THEOREMA 184.

793. *Si potentia in* F *deprimat rotam juxta lineam directionis* FD *ad radium rotæ obliquam sed directioni perpendiculari parallelam; ad potentiam, quæ juxta directionem perpendicularem* AL *agit, eam habet rationem, quam sinus totus ad sinum anguli directionis* DFC. Tab. VI. Fig. 75.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FD perpendicularis ad AC, *per hypoth.* erit DC potentiæ in F applicatæ distantia a centro motus C (§. 229). Est ergo ut potentia in F ad pondus G ita EC ad CD (§. 272) & ut potentia in A ad pondus G ita EC ad

CA (§. 792). Ergo potentia in F ad potentiam in A ut DC ad AC (§. 199. *Arithm.*). Sed si AC vel FC (§. 40. *Geom.*) sumatur pro sinu toto, erit DC sinus anguli DFC (§. 2. *Trigon.*). Potentia igitur in A est ad potentiam in F ut sinus totus ad sinum anguli directionis DFC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

794. Quare cum distantia potentiæ in A sit radius CA; dato angulo directionis DFC inveniri potest distantia DC.

Sit e. gr. FC = 4' & DFC = 48°. Calculus ita subducetur:

Log. sin. Tot.	10.0000000
Log. FC	0.6020600
Log. sin. DFC	9.8710735
Log. DC	10.4731335,

cui quam proxime respondent in tabulis 2' 9'' 7'''.

THEOREMA 185.

Tab. VI. Fig. 71. 795. *Potentiæ in diversis punctis* F & K *rotam juxta directiones* FD & KI *perpendiculari* AL *parallelas deprimentes sunt inter se ut distantiæ a centro motus* CD & CI *reciproce.*

DEMONSRATIO.

Est enim potentia in F ad pondus G ut EC ad CD & idem pondus G ad potentiam in K ut IC ad CE (§. 799). Ergo potentia in F ad potentiam in K ut IC ad CD (§. 198. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

796. Crescente adeo distantia a centro motus, potentia decrescit & contra, pondere manente eodem.

COROLLARIUM 2.

797. Quare cum radius AC sit distantia maxima & potentiæ juxta lineam directionis ad eundem perpendicularem agenti conveniat (§. 792); erit potentia perpendicularis omnium minima, quæ datum pondus G sustentare valent juxta diversas directiones parallelas agentes.

COROLLARIUM 3.

798. Si ex centro C erigatur radius CH ad AC perpendicularis, erit FD eidem parallela (§. 256. *Geom.*). Quare si ex F demittatur perpendicularis FM, erit eadem ipsi AC parallela (§. *cit.*), consequenter FM = DC (§. 257. *Geom.*). Cum adeo FM sit distantia potentiæ in F applicata; in praxi facile definitur absque calculo.

THEOREMA 186.

799. *Si potentia juxta perpendicularem* AL *deprimit rotam &* Tab. VI.
pondus G *attollit, erit spatium po-* Fig.
tentiæ ad spatium ponderis, ut 71.
pondus ad potentiam, quæ id sustentare valet.

DE-

DEMONSTRATIO.

Dum rota ſemel circumvolvitur, potentia integram ejus peripheriam percurrit. Interea autem pondus attollitur per ſpatium peripheriæ axis æquale. Eſt itaque ſpatium potentiæ ad ſpatium ponderis ut peripheria rotæ ad peripheriam axis, conſequenter ut radius rotæ AC ad radium axis CE (§. 412. *Geom.*). Sed ut AC ad CE ita pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet, (*§.* 729). Ergo ſpatium potentiæ eſt ad ſpatium ponderis ut pondus ad potentiam, quæ id ſuſtentare valet. *Q. e. d.*

PROBLEMA 126.

800. *Dato pondere dataque potentia ipſum ſuſtentatura axem in peritrochio conſtruere.*

RESOLUTIO.

1. Aſſumatur radius axis ponderi ſuſtentando conveniens, ne ſcilicet axis frangatur.
2. Fiat ut potentia ad pondus ita radius axis ad radium rotæ, ſeu longitudinem ſcytalæ (§. 792).

COROLLARIUM.

801. Quodſi potentia fuerit pars ponderis exigua, radius rotæ enormis prodit. E. gr. Sit pondus 3000, potentia 50 librarum; erit radius rotæ ad radium axis ut 60 ad 1. Hinc ſi radius axis non excederet pedem dimidium, foret radius rotæ pedum 30.

SCHOLION.

802. *Huic malo medela affertur, rotas cum axibus multiplicando, & ut una alteram circumagere valeat, dentibus vel etiam tympanum paxillis inſtruendo.*

THEOREMA 187.

803. *Si pluribus rotis dentatis potentia aliqua, cujus linea directionis* KL, *peripheriam ultimæ tangit, pondus* H *ſuſtentat; erit ea in ratione compoſita omnium earum, quas radii axium ad radios rotarum habent, nempe* CB : CD, EF : EG, HI : HK. Tab. VI. Fig. 72.

DEMONSTRATIO.

Quodſi concipiamus potentiam applicari in D: erit ea ad pondus A ut CB ad CD (*§.* 792), conſequenter = A. CB : CD (§. 297. *Arithm.*). Axis igitur DF tantopere gravatur, ac ſi pondus A. CB : CD appenderetur. Concipiamus itaque porro potentiam in G applicari, quæ hoc pondus ope rotæ alterius ſolius, conſequenter pondus A ope duarum ſuſtentet. Cum ſit ad pondus A. CB : CD ut EF ad EG (§. 792); reperietur = A. CB. EF : CD. EG (*§.*

297. *Arithm.*). Quare axis tertius GI tantopere gtavatur, ac si pondus A. CB. EF : CD. EG appenderetur. Quoniam potentia in K est ad hoc pondus ut HI ad HK (§. 792); reperietur ea = A. CB. EF. HI : CD. EG. HK (§. 297. *Arithm.*) & ita porro, si plures fuerint rotæ. Est igitur potentia in K applicata ad pondus A, quod ope plurium rotarum sustentat, ut A. CB. EF. HI : CD. EG. HK ad A, hoc est, ut A. CB. EF. HI ad A. CD. EG. HK (§. 178. *Arithm.*), adeoque & ut CB. EF. HI ad CD. EG. HK (§. 181. *Arithm.*), consequenter in ratione composita CB : CD, EF : EG & HI : HK (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

804. Quodsi pondus ducas in factum ex radiis axium & productum dividas per factum ex radiis rotarum; potentia ipsum sustentatura reperitur, quæ aucta idem attollet. Sit e. gr. A = 6000 librarum, BC = 6″, CD = 34″, EF = 5″, EG = 35″, HI = 4″, HK = 27″; erit BC. EF. HI = 120. & CD. EG. IK = 32130 & hinc potentia = 6000. 120 : 32130 = $22\frac{1314}{3213}$ = $22\frac{146}{357}$ = $22\frac{1}{2}$ quam proxime.

COROLLARIUM 2.

805. Si vero potentiam ducas in factum ex radiis rotarum, & productum dividas per factum ex radiis axium; prodibit pondus, quod sustentare valet. Sit e. gr. Potentia $22\frac{146}{357}$ librarum, reliqua omnia sint ut ante; reperietur pondus 6000.

SCHOLION.

806. *Loco ultimæ rotæ in praxi adhibetur manubrium* ABCD, *ubi* AE *radio axis,* CD *radio rotæ respondet.*

PROBLEMA 127.

807. *Data potentia datoque pondere, invenire numerum rotarum & in unaquaque rationem radii axis ad radium rotæ definire, ita ut potentia peripheriæ rotæ ultimæ applicata juxta directionem perpendicularem pondus datum sustentet.* Tab. VI. Fig. 71.

RESOLUTIO.

1. Dividatur pondus per potentiam.
2. Quotus dispergatur in factores.

Dico, numerum factorum indicare numerum rotarum, radiosque axium se habere ad radios rotarum ut unitatem ad radios singulos.

Sit e. gr. pondus 3000 librarum & potentia 60; erit quotus 500, qui resolvitur in factores 4. 5. 5. 5. Quatuor igitur construi possunt rotæ, in quarum una radius axis est ad radium rotæ ut 1 ad 4, in reliquis ut 1 ad 5.

DEMONSTRATIO.

Si pondus per potentiam dividitur,

ditur, unitas est ad quotum ut potentia ad pondus (§. 66. *Arithm.*). Est igitur potentia ad pondus in ratione composita unitatis ad singulos factores (§. 159. *Arithm.*). Quare si radii axium fiant ad radios rotarum ut unitas ad eosdem factores; potentia erit ad pondus in ratione composita radiorum axium ad radios rotarum. Potentia igitur pondus sustentare valet ope machinæ constructæ (§. 803). *Q. e. d.*

SHOLION.

808. *Quoniam in excessu peccari nequit, consultum est, ubi potentia non exacte dividit pondus, quotum unitate majorem assumere. Similiter unam, immo aliquot unitates quoto addere licet, si in factores commode dispergi nequit.*

THEOREMA 188.

Tab. VI. Fig. 2. 809. *Si ope duarum rotarum potentia movet pondus, revolutiones tardius motæ sunt ad revolutiones celerius motæ ut peripheria axis celerius motæ ad peripheriam rotæ, cui occurrit.*

DEMONSTRATIO.

Interea dum rota tardius mota M unam revolutionem absolvit, peripheria axis FD, qui eidem occurrit, totam ejus peripheriam emetiri debet. Toties igitur axis FD, consequenter rota N, circumvolvitnr, antequam rota M unam revolutionem absolvit, quoties peripheria axis FE in peripheria rotæ M continetur. Sunt adeo revolutiones rotæ tardius motæ ad revolutiones velocius motæ ut peripheria axis FD ad peripheriam rotæ M, cui occurrit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

810. Eædem igitnr revolutiones sunt ut radius axis FE ad radium rotæ DC (§. 412. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

811. Cum numerus dentium in axe FD sit ad numerum dentium in peripheria rotæ M ut peripheria illius ad peripheriam hujus; erunt revolutiones rotæ tardius motæ M ad revolutiones celerius motæ N, ut numerus dentium seu paxillorum in axe ad numerum dentium in rota M, cui iste occurrit.

THEOREMA 189.

812. *Si ope plurimum rotarum* M, N, O *&c. potentia movet pondus* A *erunt revolutiones rotæ celerrime motæ* O *ad revolutiones tardissime motæ* M *in ratioae composita ex rationibus reciprocis peripheriarum axium* IG, FD *&c. & peripheriarum rotarum* N, M *&c. quibus illi occurrunt.* Tab. VI. Fig. 72.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M & N *m* & *n*, peripheriæ axium DF & GI *a* & *b*: erit ut *a* ad *m* ita 1 ad numerum revolutionum rotæ N (§. 809) = *m* : *a* (§. 302. *Arithm.*). Est vero porro ut *b* ad *n* ita *m* : *a* ad numerum revolutionum rotæ O (§. 809) = *mn* : *ab* (§. 302. *Arithm.*). Quare revolutiones rotæ celerrime motæ O sunt ad revolutiones rotæ tardissime motæ M ut *mn* : *ab* ad 1, hoc est ut *mn* ad *ab* (§. 178. *Arithm.*) consequenter in ratione composita ex rationibus peripheriarum rotarum M & N ad peripherias axium DF & GI, qui ipsis occurrunt, (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

813. Quoniam numeri dentium sunt in ratione peripheriarum; revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O in ratione composita earum, quas habent numeri dentium in axibus FD, IG &c. ad numeros dentium in rotis N & M &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 2.

814. Quia peripheriæ sunt ut radii (§. 412. *Geom.*), revolutiones rotæ tardissime motæ M sunt ad revolutiones rotæ velocissime motæ O in ratione composita earum, quas habent radii axium GH, DE &c. ad radios rotarum GE, DC &c. quibus occurrunt.

COROLLARIUM 3.

815. Quare si factum ex radiis rotarum GE, DC &c. ducas in numerum revolutionum rotæ tardissime motæ M & productum dividas per factum ex radiis axium, qui ipsis occurrunt, GH, DE &c. prodit numerus revolutionum rotæ velocissime motæ O (§. 301. *Arithm.*). E. gr. sit GE = 8, DC = 12, GH = 4, DE = 3, & revolutio rotæ M una, erit numerus revolutionum rotæ O = 96 : 12 = 8.

PROBLEMA 128.

816. *Datis revolutionibus rotæ velocissime circumactæ O interea absolutis, dum tardissime mota M semel in orbem redit: invenire dentium in axibus & rotis numerum.* Tab. VI. Fig. 71.

RESOLUTIO.

1. Numerus datarum revolutionum dispergatur in factores.
2. Numerus dentium seu paxillorum in axibus pro arbitrio assumtus ducatur sigillatim in singulos factores.

Dico, facta exhibere numeros dentium in peripheriis rotarum, quibus totidem axes occurrunt.

E. gr. Si rota velocissime mota 40 revolutiones absolvat, dum tardissime mota semel circumagitur; resolvatur numerus 40 in factores 5 & 8. Hinc intelligitur, duabus opus esse rotis totidemque axibus dentatis, qui istis occurrant. Quodsi axis

axis habuerit dentes 6; rota una habebit 30, altera 48, tertia, cui potentia applicatur, nullis instruenda, figuram sortitura pro potentiæ applicandæ conditione.

DEMONSTRATIO.

Revolutiones rotæ tardissime motæ sunt ad revolutiones velocissime circumactæ in ratione composita numerorum dentium in axibus ad numeros dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 811). Cum itaque numeros dentium in rotis invenerimus, numeris dentium in axibus per factores multiplicatis, in quos numerus revolutionum rotæ velocissime circumactæ resolvitur, fitque adeo unitas ad factores hosce ut numerus dentium in axibus ad numerum dentium in rotis, quibus occurrunt (§. 66. *Arithm.*); revolutiones rotæ tardissime motæ erunt ad revolutiones velocissime circumactæ in ratione composita unitatis ad factores numeri revolutionum posteriorum dati, consequenter ut unitas ad ipsum hunc numerum (159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 190.

817. *Si ope plurium rotarum potentia movet pondus, spatium ponderis est ad spatium potentiæ ut potentia sustentans ad pondus.*

DEMONSTRATIO.

Sint peripheriæ rotarum M, N, O &c. *a*, *b*, *c* &c. axium CB, DE, GH &c. *d*, *e*, *f* &c. erit numerus revolutionum rotæ O interea peractarum, dum M semel in orbem redit, *ab*:*ef* (§. 812). Jam si rota M semel circumagitur, spatium a pondere percursum æquatur peripheriæ axis BC, spatium vero potentiæ, peripheriæ rotæ O per numerum revolutionum interea absolutarum multiplicatæ. Est igitur spatium ponderis ad spatium potentiæ ut *d* ad *abc* : *ef*, consequenter ut *def* ad *abc* (§. 178. *Arithm.*). Sed $d:a$ = CB:CD, $e:b$ = DE : EG, $f:c$ = GH : HK (§. 412. *Geom.*) adeoque *def*: *abc* = CB. DE. GH: CD. EG. HK (§. 218. *Arithm.*). Ergo spatium ponderis ad spatium potentiæ ut CB. DE. GH ad CD, EG. HK (§. 167. *Arithm.*) & ideo ut potentia sustentans ad pondus (§. 812). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 72.

COROLLARIUM.

818. Quo major itaque potentia, eo velocior ponderis motus; quo illa minor, eo hic tardior.

THEOREMA 191.

819. *Spatia ponderis atque potentiæ sunt in ratione composita revolutionum rotæ tardissime motæ*

tæ ad revolutiones rotæ velocisſime motæ & pnripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus revolutionum rotæ tardisſime motæ $= m$, numerus revolutionum velocisſime motæ $= n$, peripheria axis in rota priore $= a$, peripheria poſterioris $= b$. Cum in una revolutione ſpatium ponderis ſit a, potentiæ b; erit ſpatium ponderis, durantibus revolutionibus m, $= ma$; ſpatium potentiæ, durantibus revolutionibus n, $= nb$. Eſt igitur ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut ma ad nb, hoc eſt, in ratione compoſita revolutionum m & n, atque peripheriæ axis rotæ tardisſime motæ a & peripheriæ rotæ velocisſime motæ b (§. *Arithm.* 159). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

820. Cum ſpatia ponderis & potentiæ ſint reciproce ut potentia, ſuſtentans ad pondus (§. 817); potentia ſuſtentans pondus erit ad pondus in ratione compoſita revolutionum rotæ tardisſime motæ ad revolutiones velocisſime motæ & peripheriæ axis iſtius ad peripheriam hujus.

PROBLEMA 129.

821. *Data peripheria axis rotæ tardisſime motæ cum peripheria rotæ velocisſime motæ & ratione revolutionum rotæ iſtius ad revolutiones hujus, invenire ſpatium, quod potentia decurrit, donec pondus emetiatur ſpatium datum.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria axis rotæ tardisſime motæ in antecedentem & peripheria rotæ velocisſime motæ in conſequentem rationis.
2. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium ponderis datum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium potentiæ quæſitum (§. 819).

Sit e. gr. ratio revolutionum rotæ tardisſime motæ ad revolutiones rotæ velocisſime motæ $= 2:7$, & ſpatium ponderis 30 pedum. Peripheria axis rotæ tardisſime motæ ſit ad peripheriam velocisſime circumactæ ut 3 ad 8. Reperietur ſpatium potentiæ $= 7.8.30 : 2.3 = 7.4.10 = 280'$.

PROBLEMA 130.

822. *Data peripheria rotæ velocisſime motæ, una cum numero revolutionum ejusdem & ratione tam peripheriarum ejusdem rotæ atque axis rotæ tardisſime motæ, quam revolutionum utriusque, invenire ſpatium ponderis.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Ducatur peripheria rotæ velocisſime motæ in numerum revolutionum ejusdem, factum erit potentiæ ſpatium.
2. Ducantur quoque in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
3. Quæratur ad hæc duo facta & ſpatium potentiæ modo inventum numerus quartus proportionalis: erit is ſpatium ponderis quæſitum (§. 819).

E. gr. Sit peripheria rotæ velocisſime motæ 10, ratio ejus ad peripheriam axis, ex quo pondus ſuſpenditur, = 8 : 3, numerus revolutionum = 28, ratio revolutionum = 7 : 2. Reperietur ſpatium ponderis = 3. 2. 28. 10 : 8. 7 = 3. 10 = 30.

PROBLEMA 131.

823. *Data ratione peripheriarum rotæ velocisſime motæ atque axis rotæ tardisſime motæ, itemque revolutionum utriusque, una cum pondere, invenire potentiam, quæ id ſuſtentare valet.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur in ſe invicem tam antecedentes, quam conſequentes datarum rationum.
2. Quæratur ad factum antecedentium, factum conſequentium & pondus datum numerus quartus proportionalis; erit is potentia quæſita (§. 820).

Sit ratio peripheriarum 8 : 3, ratio revolutionum 7 : 2, pondus 2000. Reperietur potentia = 3. 2. 2000 : 8. 7 = 12000 : 56 = $214\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

824. *Non abſimili modo pondus invenitur, ſi potentia detur & ratio tam peripheriarum axis rotæ tardisſime motæ & rotæ velocisſime circumactæ, quam revolutionum utriusque.*

PROBLEMA 132.

825. *Datis revolutionibus rotæ velocisſime motæ interea abſolvendis, dum tardisſime mota ſemel in orbem redit, una cum ſpatio, per quod pondus elevari debet & peripheria rotæ tardisſime motæ, invenire tempus elevationi quæſitæ impendendum.*

RESOLUTIO.

1. Fiat: ut peripheria axis rotæ tardisſime motæ ad ſpatium ponderis datum, ita numerus revolutionum rotæ velocisſime motæ datus ad quartum proportionalem; qui erit numerus revolutionum interea abſolvendarum, dum pondus emetitur ſpatium datum.
2. Per experientiam determinetur numerus revolutionum rotæ

velocissime circumactæ intra unius horæ spatium aut tempus datum quodcunque absolvendarum.

3. Per hunc dividatur numerus quartus proportionalis] paulo ante inventus.

Quotus erit tempus elevationi ponderis impendendum. *Q. e. d.*

THEOREMA 192.

Tab. V. Fig. 61. 826. *Si potentia* P *ope trochleæ simplicis* Q *pondus sustentat, ita ut linea directionis utriusque tangat peripheriam: erit huic æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lineæ directionis potentiæ atque ponderis peripheriam trochleæ tangunt, *per hypoth.* ad radios AC & CB perpendiculares sunt (§. 304. *Geom.*). Jam cum ad sustentationem præter rectam ACB partes reliquæ nil conferant, sitque centrum motus in C (§. 759); potentia erit ad pondus ut CB ad CA (§. 765). Sed CB = CA (§. 759). Ergo potentia ponderi æqualis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

827. Trochlea igitur simplex, si lineæ directionis potentiæ atque ponderum peripheriam tangunt, nec juvat, nec impedit potentiam, sed ejus directionem tantum mutat.

COROLLARIUM 2.

828. Utimur ergo trochlea, quoties potentiæ trahentis directio verticalis in horizontalem, aut sursum tendens in tendentem deorsum & contra mutari debet.

SCHOLION 1.

829. *Hoc ipso securitati trahentium sæpissime prospicitur. Fac enim pondus ingens esse ad insignem altitudinem attollendum ab operariis funem trahentibus. Quodsi contingat funem* DE *abrumpi & operariorum capitibus imminere pondus, in extremo vitæ periculo constituuntur. Enimvero si ope trochleæ* B *directio verticalis* AB *in horizontalem* BC *mutatur rupto fune* DE *nihil metuendum periculi.* Tab. VI. Fig. 74.

SCHOLION 2.

830. *Hac ipsa mutatio lineæ directionis ope trochlearum in horizontalem hunc etiam præstat usum, ut, si potentia aliqua secundum unam directionem plus virium impendere possit, quam secundum alteram, vi maxima utamur, nec non ut potentiis uti liceat, quæ juxta datam directionem agere non possent.* E. gr. *equus non trahit secundum directionem verticalem, trahit tamen secundum horizontalem. Verticalis igitur tractio si mutatur in horizontalem, equus pondus attollere poterit.*

THEOREMA 193.

831. *Si potentia in* E *applicata secundum lineam directionis* BE, Tab. VI. Fig. 75.

quæ

quæ trochleam in B *tangit & funi* AD *parallela est, pondus* F *ex centro trochleæ* C *suspensum sustentet; ponderis subdupla est.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim præter rectam AB partes trochleæ reliquas nihil conferre ad ponderis F sustentationem. Cum vero trochlea sit circa centrum C mobilis (§. 759) in eo erit centrum motus. Et quia tam linea directionis ponderis CF, quam linea directionis potentiæ BE ad AB perpendicularis, *per hypoth.* erit potentia in E ad pondus F ut AC ad AB (§. 765). Est vero AC = $\frac{1}{2}$AB (§. 759). Ergo potentia ponderis F subdupla. *Q.e.d.*

SHOLION.

832. *Cum trochlea cum unco suo & loculamento, quod in usu abesse nequit, una attollatur a potentia sursum trahente secundum directionem* EB, *ejus gravitas ponderi* F *addenda est.*

THEOREMA 194.

Tab. VI. Fig. 77. 833. *Si potentia in* B *applicata ope polyspasti sustentet pondus* F, *ita ut omnes funes* AB, HI, GF, EL, CD *sint inter se paralleli; erit potentia ad pondus ut unitas ad numerum funium* HI, GF, EL, CD, *quæ a pondere* F *trahuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam funes omnes sunt inter se paralleli adeoque a centris trochlearum suarum intervallo radiorum utrinque distant; nulla est ratio, cur a pondere F unus magis trahatur quam alter. Pondus igitur æquali vi omnes extendit adeoque æqualiter per eos dividitur, ita ut, si fuerint funes quatuor, perinde sit ac si tantum pars quarta ponderis ex fune CD suspenderetur. Potentia igitur in B applicata cum æqualis sit ponderi ex fune CD suspenso (§. 826); quartam non nisi ponderis partem in præsenti casu sustentat, hoc est, in genere eam ad pondus rationem habet, quam unitas ad numerum funium, quos pondus F extendit. *Q.e.d.*

SCHOLION 1.

834. *Ne polyspastorum altitudo in nimium excrescat, si ex pluribus trochleis componantur; trochleæ ita junguntur, ut tam omnes superiores, quam omnes inferiores circa communem axem versatiles existant. Tum vero omnes inter se æquales esse debent, ut funes sint paralleli.* Tab. VI. Fig. 76.

SCHOLION 3.

835. *Usus trochlearum insignis est in ponderibus elevandis, tum quod machina spatium exiguum occupet & facile huc illucque transportetur, tum quod*

insigni virium compendio pondus satis ingens attolli possit.

COROLLARIUM 1.

836. Cum numerus trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum æqualis sit numero funium inferiores sustentantium; potentia pondus F ope polyspasti sustentans est ad pondus ut unitas ad numerum trochlearum inferiorum & superiorum simul sumtarum.

COROLLARIUM 2.

837. Datis igitur trochlearum numero & potentia, facile invenitur pondus sustentandum; potentia nempe per pondus multiplicatur. Sit e. gr. potentia 50 librarum, numerus trochlearum 5; erit pondus 250.

SCHOLION 3.

838. Dechales (a) *autor est, experientia constare, quod homo simpliciter solo insistens 150 libras elevare possit. Cum igitur 150 librarum potentia ope polyspasti ex 6 trochleis compositi 900 libras sustentare possit; evidens est, quod unus homo ejus ope pondus 900 fere librarum attollere possit.*

SCHOLION 4.

Tab. VI. Fig. 76. 839. *Mire multiplicantur trochlearum vires, si polyspasti plures conjunguntur, tum enim potentia in polyspasto uno ad attollendum pondus Q applicanda vicem subit ponderis F ex polyspasto altero appensi. Ponamus igitur pondus Q esse 1000 librarum & trochleas in unoquoque polyspasto quatuor; erit ergo pondus F ex altero polyspasto suspensum nonnisi quarta illius pars, nempe 250, consequenter potentia quarta pars hujus, hoc est, decima sexta totius, $62\frac{1}{2}$.*

PROBLEMA 133.

840. *Datis pondere atque potentia, invenire numerum trochlearum, ex quibus componendus est polyspastus.*

RESOLUTIO.

Pondus per potentiam dividatur, quotus erit numerus quæsitus (§. 836).

Sit e. gr. pondus 600 librarum, potentia 150; erit numerus trochlearum 4: quarum omnium eadem diameter, si duæ in parte inferiore, duæ in superiore circa communem axem versatiles construantur (§. 834).

THEOREMA 195.

841. *Si potentia trochlearum ope movet pondus, erit spatium potentiæ ad spatium ponderis ut pondus ad potentiam sustentantem.* Tab. VI. Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim pondus F per pedem unum attolli: evidens est, funium omnium, ex quibus trochleæ inferiores cum pondere sustentantur, longitudinem intervallo unius pedis minui debere. Po-

(a) Mechanic, lib. 4. prop. 4. Mund. Math. Tom. 2. f. m. 189.

Potentia igitur tot pedes extrahere debet, quot ſunt funes trochleas inferiores ſuſtentantes. Quare ſpatium ejus eſt ad ſpatium ponderis ut numerus funium trochleas inferiores ſuſtentantium ad unitatem, conſequenter ut pondus ad potentiam ſuſtentantem (§. 833). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

842. Quo minor itaque potentia pondus ope polyſpaſti attollit; eo tardius id movetur: ut adeo virium compendium cum temporis diſpendio conjungatur.

THEOREMA 196.

Tab. XIIX Fig. 178. 843 *Si potentia in* F *applicata ſuſpendit pondus* E *ſecundum directionem obliquam* BD *& hujus directio ſit itidem obliqua* ED *& hujus directio ſit itidem obliqua* ED, *linea vero directionis trochleæ* DG *per centrum* C *tranſit; erit potentia ponderi æqualis & tam iſta, quam hoc vim, qua trochlea in* L *retinetur, ut ſinus anguli* ADB *ad ſinum anguli dimidii.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim funes DF & DE quomodocunque extenſi trochleam in B & A tangunt, ſi ex centro C ducantur radii AC & CB; erunt anguli ad A & B recti (§. 308. *Geom.*) & AD = DB (§. 325. *Geom.*). Quare cum etiam ſit AC = CB (§. 40. *Geom.*); erit angulus ADC ipſi CDB æqualis (§. 179. *Geom.*) Jam perinde eſt ac ſi mobile aliquod ſecundum directionem CD trahens trahatur a duabus viribus ſecundum directiones AD & DB trahentibus illique æquipollentibus propter ſtatum æquilibri *ex hypotheſi.* Eſt adeo vis in F applicata ad pondus E ut ſinus anguli ADC ad ſinum anguli CDB (§. 253). Sunt vero anguli æquales *per demonſtrata*, adeoque & ſinus eorum, (§. 142. *Geom.* & §. 2. *Trigon.*). Quamobrem pondus potentiæ æquale eſt. *Quod erat unum.*

Jam potentia eſt ad vim trochleam ſecundum directionem DC ſuſtinentem ut ſinus anguli ADC ad ſinum anguli ADB & pondus E ad eandem vim ut ſinus anguli BDC ad ſinum anguli ADB (§. 253). Quare cum anguli ADC & BDC æquales ſint *per demonſtrata*, adeoque dimidii anguli ADB; erit vis trochleam ſuſtentans in ſtatu æquilibrii ponderum E & F ad horum alterutrum ut ſinus anguli ADB, quem directiones obliquæ AD & BD intercipiunt ad ſinum anguli dimidii. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 197.

Tab. XIIX Fig. 179. 344. *Si ponderis* G *linea directionis* DC *per centrum trochleæ transit & trochlea trahatur secundum directiones obliquas* ED *&* DF; *erunt hæ vires inter se æquales; earum vero alterutra ad pondus ut sinus anguli a directionibus obliquis intercepti* ADB *ad sinum anguli dimidii* ADC:

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis, ita ut præcedens vix unica immutata litera huc transcribi tota possit.

COROLLARIUM.

345. Quoniam sinus anguli dimidii non est dimidius totius, seu, quod perinde est, simpli anguli sinus non est dimidius dupli (§.325. *Analys. fin.*); in casu directionum, obliquarum potentia pondus, cujus directio per centrum trochleæ transit, sustentans non est ponderis dimidia.

SCHOLION.

346. *Ex duobus hisce theorematis deduci possunt, quæ de trochleis in casu directionum obliquarum præterea demonstranda sunt, quemadmodum videre est apud* Varignonium, *qui hanc staticæ partem diffuse pertractat* (b).

THEOREMA 198.

847. *Si pondus vel resistentia cochlea superanda fuerit ad potentiam ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam binarum helicum* BI, *potentia ponderi æquipollet.* Tab. V. Fig. 61.

DEMONSTRATIO.

Celeritates, quibus moventur potentia & pondus, sunt ut spatia eodem tempore descripta, nempe ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI (§.33). Sed vires mortuæ sunt in ratione composita celeritatum & massarum (§. 278). Quare cum potentiæ pondus æquale substitui possit (§.763), sitque ut pondus potentiæ æquale ad pondus elevandum aut deprimendum reciproce ut peripheria a potentia percurrenda ad distantiam helicum BI *per hypoth.* celeritates sunt ut massæ reciproce. Ergo vis potentiæ est ad vim ponderis ut factum ex massa potentiæ in massam ponderis ad factum ex massa ponderis in massam potentiæ (§. 159. *Arithm.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207. *Arithm.*); vires æquales sunt. *Q. e. d.*

CO-

(b) Nouvelle Macanique, ou Statique Tom. 1. Sect. 3. p. 283. & seqq.

COROLLARIUM 1.

848. Cum peripheria a potentia percursa in una cochleæ conversione sit ſpatium ejus, diſtantiæ autem duarum helicum BI reſpondeat ſpatium ponderis; erit hic quoque ſpatium ponderis ad ſpatium potentiæ ut reciproce potentia ſuſtentans ad pondus.

COROLLARIUM 2.

849. Virium itaque compendium cum temporis diſpendio denuo conjungitur.

THEOREMA 199.

850. *Si diſtantia helicum* BI *minor fuerit, potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperandam applicata minor eſt, quam ſi illa major fuerit.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim ut ſpatium potentiæ ad helicum diſtantiam, ita pondus ad potentiam (§. 847). Quodſi ergo helicum diſtantia minuitur, ſpatium potentiæ ad eandem (§. 205. *Arithm.*), adeoque & pondus ad potentiam rationem majorem habet, quam ante. Eſt igitur potentia in caſu poſteriore minor, quam in priore (§. 206. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 200.

851. *Si cochlea mas intra fœminam quieſcentem convertitur, minor potentia ad eandem reſiſtentiam ſuperandam requiritur, ſi ſcytala* CD *longior, quam ſi brevior.* Tab. VI. Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Ut peripheria ſcytala CD tanquam radio deſcripta ad helicum diſtantiam IK ita reſiſtentia ſuperanda ad potentiam (§. 848) ſed ſi ſcytala longior, major peripheria deſcribitur, quam ſi brevior (§. 412. *Geom.*). Ergo in illo caſu ad diſtantiam helicum IK (§. 203. *Arithm.*), conſequenter & reſiſtentia ſuperanda ad potentiam, majorem rationem habet, quam in hoc caſu. Quare cum reſiſtentia eadem maneat, *per hypoth.* potentia in caſu poſteriore major, quam in priore (§. 189. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 134.

852. *Data diſtantia potentiæ a centro cochleæ* CD, *diſtantia helicum* IK *& potentia in* D *applicata, determinare reſiſtentiam ſuperandam, vel hac data invenire illam.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur paripheria circuli radio CD deſcribenda (§. 429. *Geom.*
2. Quæratur porro ad diſtantiam heli-

helicum, peripheriam modo inventam & potentiam datam; vel ad peripheriam inventam, distantiam helicum IK & resistentiam datam numerus quartus proportionalis: erit is in priore casu resistentia superanda, in altero potentia, qua ad resistentiam datam vincendam utendum (§. 847).

E. gr. Sit distantia helicum 3″, distantia potentiæ a centro cochleæ CD 25″, potentia 30 librarum. Fiat

100 — 314 — 50″
50

175|00 Peripheria a potentia conficienda

Fiat porro
3 — 157 — 30
1 10 10 (§. 316. *Arithm.*)

1570 pondus, cui resistentia æqualis.

PROBLEMA 135.

Tab. VI. Fig. 78. 853. *Data resistentia, quæ data potentia superari debet, cochleæ diametrum, distantiam helicum* IK *&* *longitudinem scytalæ* CD *definire.*

RESOLUTIO.

1. Distantia helicum & diameter cochleæ pro arbitrio assumantur, si ope scytalæ convertenda est cochlea intra matricem.
2. Fiat ut potentia data ad resistentiam, quam superare debet, ita helicum distantia ad quartum: quæ erit peripheria a scytala CD in conversione cochleæ describenda (§. 847).
3. Quodsi ergo quæratur semidiameter hujus peripheriæ (§. 429. *Geom.*); habebitur longitudo scytalæ CD.
4. Quodsi vero cochlea fœmina circa marem convertitur sine scytala, peripheria *per n. 2.* inventa eadem fere est, quæ cochleæ, adeoque semidiameter *per n. 3.* reperta cochleæ semidiameter.

E. gr. Sit pondus 6000 librarum, potentia 100, distantia helicum 1″. Reperietur peripheria a potentia percurrenda 6000 : 100 = 60, adeoque longitudo scytalæ, si qua utaris, 1′ 9″: si nulla utaris, erit latus cochleæ fœminæ 19″.

COROLLARIUM.

854. Quodsi peripheria cochleæ in rectam BC transferatur, & in B perpendicularis BA erigatur altitudini cochleæ æqualis, tandemque factis B 1, 1. 2, 2. 3 &c. distantiæ helicum æqualibus ducantur rectæ C 1, D 2, E 3 &c. parallelogrammum circa cylindrum, cujus peripheria rectæ BC æqualis, circumvolutum helicem, qua cylindrus sulcandus, exhibebit.

DE-

DEFINITIO 82.

Tab. VI. Fig. 80. 855. *Cochlea infinita* seu *perpetua* vocatur, si rotam stellatam DF circumagit.

COROLLARIUM.

856. Dum cochlea semel circumvolvitur; rota nonnisi unius dentis intervallo promovetur.

SCHOLION.

857. *Dicitur autem ideo infinita, quia sine fine circumagi potest.*

THEOREMA 201.

Tab. VI. Fig. 80. 858. *Si potentia manubrio cochleæ infinitæ* AB *applicata fuerit ad pondus in ratione composita ex peripheria axis rotæ* EH *ad peripheriam manubrio versato a potentia descriptam & revolutionum rotæ* DF *ad revolutiones cochleæ* CB*; ponderi æquivalebit.*

DEMONSTRATIO.

Si peripheriam axis HE per numerum revolutionum rotæ stellatæ DF multiplices, prodibit spatium ponderis G. Sed si peripheria manubrio AB descripta multiplicetur per numerum revolutionum cochleæ CB; factum est spatium potentiæ. Sunt igitur celeritates, quibus pondus & potentia moventur, ut ista spatia (§. 33). Quare cum pondus ad potentiam sit in ratione reciproca eorundem spatiorum (*per hypoth. & §. 159. Arithm.*); vires sunt in ratione composita earum, quas habet spatium ponderis ad spatium potentiæ & spatium potentiæ ad spatium ponderis (§. 278), hoc est, ut factum ex spatio ponderis in spatium potentiæ ad factum ex spatio potentiæ in spatium ponderis (§. 159. *Arithm.*), adeoque æquales (§. 207. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

859. Quoniam rotæ motus tardissimus (§. 569); exigua potentia ingens pondus moveri potest ope cochleæ infinitæ.

COROLLARIUM 2.

860. Utimur adeo cochlea infinita, vel si ingens admodum pondus per exiguum spatium movendum, vel si motus tardissimus efficiendus.

SCHOLION.

861. *Commodus igitur ejus usus est in horologiis. Unde* Hugenius *eadem utitur in automato planetario.*

PROBLEMA 136.

862. *Datis dentium numero, distantia potentiæ a centro cochleæ* AB, *& radio axis* HE *una cum potentia invenire pondus.* Tab. VI. Fig. 80.

RESOLUTIO.

1. Ducatur distantia potentiæ a cen-

centro cochleæ AB in numerum dentium: factum est ut ſpatium potentiæ interea abſolutum, dum pondus conficit ſpatium peripheriæ axis æquale (§. 413. *Geom.* & 858. *Mech.*).

2. Quæratur numerus quartus proportionalis ad radium axis, ſpatium potentiæ modo inventum & potentiam; erit is pondus, quod potenria ſuſtentare valet (§. 858).

E. gr. Sit AB = 3, radius axis HE = 1, potentia 100 librarum, numerus dentium rotæ DF 48; erit pondus = 3. 48. 100 : 1. 1 = 14400.

SCHOLION 1.

863. *Apparet hinc, cochlearum infinitam in amplificandis potentiarum viribus reliquas omnes antecellere.*

SCHOLION 2.

864. *Solent etiam cochleæ conſtrui, quæ a rotis dentatis circumaguntur, cumque cochlea a ſingulis dentibus ſemel circumvolvatur, motus efficitur velocisſimus. Hinc ejus uſus eſt in machinis, quæ ad peliendum corpora aſpera, veluti ad poliendum vitra, adhibentur.*

THEOREMA 202.

Tab. V. Fig. 64. 865. *Si potentia cuneo ita applicata, ut linea directionis* CD *ſit ad latus* AB *perpendicularis, fuerit ad reſiſtentiam ſuperandam, ut* AB *ad* CD, *reſiſtentiæ æquipollet.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus cuneum detrudi usque ad rectam GF ipſi AB parallelam: erit DE ſpatium potentiæ, FG ſpatium ponderis. Eſt vero DE : FG = DC : AB (§. 396. *Geom.*). Ergo celeritates potentiæ & ponderis ſunt ut DC ad AB (§. 33). Sed vires potentiæ ac ponderis ſunt in ratione compoſita ipſorummet atque celeritatum (§. 278), potentia vero ad pondus ut AB ad DC, *per hypoth.* Ergo vires ſunt AB. DB ad DC. AB (§. 159. *Arithm.*), adeoque æquales (§. 207. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

866. Potentia igitur dimidiæ reſiſtentiæ æquivalens eſt ad eam ut AC ad DC, hoc eſt, ut ad ſinum totum tangens anguli dimidii cunei ADC (§. 7. *Trigon.*).

COROLLARIUM 2.

867. Cum tangens anguli minoris minor ſit quam majoris (§. 7. *Trigon.*), potentia ad dimidiam reſiſtentiam majorem rationem habet, ſi angulus major, quam ſi minor (§. 203. *Arithm.*). Unde in priori caſu major eſt quam in poſteriori (§. *cit.*), hoc eſt, cunei acutiores magis potentiæ vires amplificant quam minus acuti.

SCHO-

SCHOLION.

868. *Ex natura cunei reddenda est ratio omnium fere instrumentorum, quibus ad scindendum aut dividendum utimur: qualia sunt cultri, enses, secures, scissella aliaque instrumenta celatoria.*

CAPUT XVII.

DE

POTENTIARUM AD MACHINAS APPLICATIONE.

DEFINITIO 83.

869. Per *potentias animatas* intelligo homines & animantia bruta: *per inanimatas* vero aërem, aquam, ignem, gravitatem, elaterem.

DEFINITIO 84.

870. Potentia dicitur *trudendo movere*, si linea directionis tendit in plagam moventi oppositam.

DEFINITIO 85.

871. Potentia dicitur *deprimere*, si linea directionis tendit a movente deorsum.

DEFINITIO 86.

872. Potentia dicitur *trahere*, si linea directionis tendit ad moventem, seu si mobile sequitur moventem vel ad eum accedit.

DEFINITIO 87.

873. Potentia dicitur *elevare*, si linea directionis tendit sursum, seu si mobile ascendit.

DEFINITIO 88.

874. Potentia animata dicitur *calcando* movere, si pedibus deprimit vel protrudit mobile.

DEFINITIO 89.

875. Potentia animata *Versando movere* dicitur, si eidem loco insistentis manus per peripheriam circuli movetur.

PROBLEMA 137.

876. *Machinam construere, quam homo trudendo movere possit.* Tab. VII. Fig. 81.

RESOLUTIO.

1. Cylindrus ligneus EF verticaliter

ter erigatur, ita ut in punctis E & F circa axem EF versari possit.

2. In quatuor fere pedum altitudine infigatur vectis GI.

Quodsi enim homo manibus continuo protrudat vectem GH, cylindrus EF circa axem suum circumagetur (§. 870).

SCHOLION.

877. *Si machina ita simplex ad pondera attollenda adhibetur*, Ergata *appellari solet.*

COROLLARIUM 1.

Tab. VII. Fig. 82. 878. Quodsi GH fuerit temo cum libra; equus vel taurus *trahendo* machinam movebit (§. 872).

COROLLARIUM 2.

Tab. VII. Fig. 81. 879. Si annulo L alligetur funis, quem manibus prehendat homo aut corpori suo circumplicet; machinam *trahendo* movebit (§. 872).

PROBLEMA 138.

Tab. VI. Fig. 83. 880. *Machinam construere, quam homo versando movere possit.*

RESOLUTIO.

Ad cylindrum horizontalem applicetur manubrium vel rectangulum BDC, vel in arcum circuli incurvatum HI. Cum enim homo manu circa centrum radium BD circumducit; versando machinam movet (§. 875. Mech. & §. 131. Geom.).

SCHOLION.

881. *Si duo manubria eidem machinæ applicantur, necesse est, ut situm habeant contrarium, quia dum unus manubrium* ABDC *deprimit, alter alterum* EFGH *attollere debet.*

PROBLEMA 139.

882. *Machinam construere, quam homo partim trahendo, partim deprimendo movere possit.*

RESOLUTIO.

Talis est axis in peritrochio EABF. Quodsi enim scytalam AV manu prehendas & ad te adducas, trahendo axem EF movebis (§. 872): sed ubi ulterius eandem deorsum urgeas, deprimendo eundem axem movebis (§. 871). Tab. V. Fig. 60.

Loco peritrochii sufficiunt scytalæ solæ GH & KI: quæ si duobus in locis ad axem aptentur, duo homines una eandem partim trahendo, partim deprimendo movebunt. Tab. VII. Fig. 84.

SCHOLION.

883. *Si cylindrus horizontaliter positus & solis scytalis instructus ad pondera attollenda aut attrahenda adhibetur,* sucula *vocatur.*

PRO-

PROBLEMA 140.

884. *Machinam construere, quam partim trahendo, partim protrudendo movere possit homo.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 85. 1. Vectis homodromus HFG circa punctum G mobilis trajiciatur per annulum F virgæ ferreæ EF, aut virga alio quocunque modo ad eum firmetur.

2. Per annulum E alteri extremo ejusdem virgæ affixum transeat uncus rectangulus ABCD cylindro interrupto KL infixus.

Quodsi enim manu applicata vectem HG ad te adducas, radius AB semiperipheriam desctibet, sicque trahendo movebis machinam (§. 872). Si vero manubrium ABCD, quod nunc partem sui BC tibi obvertit, in pristinum situm redigis; idem radius BA alteram semiperipheriam describet, sicque trudendo movebis machinam (§. 870).

Aliter.

Tab. VII. Fig. 86. Idem præstabis, si vectis HFG solo affigatur, ita tamen ut, quemadmodum ante, circa punctum G moveri libere possit: reliqua omnia eadem ratione se habeant, ut ante.

SHOLION.

885. *Uncus interdum geminatur, ut alter sit altero superior & in contrarium positus: ita nimirum duo simul machinam agitare possunt motibus contrariis, uno scilicet trahente, dum alter trudit & contra.*

PROBLEMA 141.

886. *Machinam construere, quam homo calcando movere possit.*

RESOLUTIO.

Construatur tympanum AB cum cyclindro circa axem ejus mobile, & ejus altitudinis, ut homo unus vel plures intra ejus ambitum stare possint. Hanc enim calcando cylindrum cum rota circumagent (§. 874). Tab. VII. Fig. 87.

Aliter.

Construi quoque potest rota ad horizontem inclinata AB, cujus inferior superficies dentibus, superior scalis instruitur: quamvis autem rationem plani inclinati habeat, ut adeo potentia non tota vi sua in eam agat (§. 261), major tamen distantia a centro motus esse potest, quam in verticaliter erectis. Tab. VIII. Fig. 88.

Aliter.

Si pondus movendum sit exiguum & motus celer requiritur, ve- Tab. VII. Fig. 89.

cte homodromo FH ad horizontem parumper inclinato & circa centrum F mobili utimur, qui virga ferrea HE cum manubrio BE connexus cylindrum GL circumducit, si pede deprimatur. Tornatores filum cylindro circumducunt perticæ flexili aut laminæ elasticæ KN alligatum. Quoniam potentia in G, adeoque in minori distantia, applicatur, motus est celer, utut potentia major esse debeat resistentia in H vincenda (§. 765. 772).

Tab. VIII. Fig. 91.

PROBLEMA 142.

887. *Machinam construere, quam equus vel bos trahendo movere possit.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 82.

Utendum est cylindro verticaliter erecto NO cum temone HG 8 minimum pedum, ut supra (§. 875). Præstat autem temonem esse longiorem, quam breviorem, ne vertigine capiatur brutum in peripheria circuli continuo decurrens.

PROBLEMA 143.

Tab. VIII. Fig. 91.

888. *Machinam construere, quam equus vel bos calcando movere possit.*

RESOLUTIO.

Construendum est tympanum AB subscudibus transversis munitum & super eo stabulo includatur equus vel bos per solum pertusum pedibus posterioribus rotæ insistens subscudemque ad horizontem inclinatam protrudens.

Aliter.

Si pondera minora moveri debent, veluti veru cum assa, tympanum eum in modum construi solet, quo majora (§. 885), ab hominibus intra earum ambitum consistentibus impellenda, & canis intus collocatur, tam pedibus, quam corporis sui mole eandem circumagens.

SCHOLION.

889. *Cum machinæ hactenus descriptæ omnes, ad axem in peritrochio revocentur, nisi quod nonnullæ earum sint ex vecte & axe in peritrochio compositæ, si attendatur ad lineam directionis potentiæ & inde determinetur distantia a centro motus (§. 229), virium æstimatio haud difficulter instituitur (§. 765. 792. 793).*

PROPBLEMA 144.

890. *Machinam construere, quæ a pondere descendente moveatur.* Tab. VIII. Fig. 92.

RESOLUTIO.

1. Circa cylindrum AB horizontali-

taliter positum funis circumvolvatur &

2. idem circa trochleam C circumducatur in magna a pavimento distantia.

3. Ejus denique extremitati alligetur pondus Q, quod dum descendit, cylindrum AB circumagit.

COROLLARIUM 1.

891. Quo major est altitudo, per quam pondus Q descendit, eo diutius durat motus.

SCHOLION.

892. *Hinc horologia, quæ a pondere descendente moventur, in editis turribus collocantur, aut, si index circumagendus fuerit exiguus, in suprema conclavis parte.*

COROLLARIUM 2.

893. Ut pondus Q lento gradu descendat, nec motus ejus acceleretur (§. 70); cylindri AB motus esse debet quam tardissimus, consequenter pondus ad movendam machinam adhiberi nequit, nisi in machinis compositis, ubi motus in principio tardus, sed per plures machinæ partes propagatus fit celerior (§. 528).

COROLLARIUM 3.

894. Cum adeo pondus in minori a centro distantia applicandum sit, ibi potissimum huic potentiæ est locus, ubi non magna est resistentia.

COROLLARIUM 4.

895. Quodsi pondus P ex polyspasto FP suspendatur, pondus celerius cylindrum LM circumagere potest. Dum enim per spatium peripheriæ cylindri descendit, & funes fuerint quatuor; cylindrus quater circumvolvitur, cum sine polyspasto nonnisi semel circumageretur. Sed quia funis HI a quarta tantum ponderis Q parte trahitur (§. 831) vel etiam a minore (§. 843); perinde est ac si quarta tantum ejus pars vel etiam quarta minor sine polyspasto ad machinam agitandam adhiberetur. Utendum igitur est polyspasto, ubi spatium non satis altum descensui ponderis conceditur. Tab. VIII. Fig. 95.

PROBLEMA 145.

896. *Pondere appenso adjuvare potentiam moventem.* Tab. VIII. Fig. 49.

RESOLUTIO.

1. Ponderi movendo F alligetur funis EF & circa trochleam G circumducatur.
2. Alteri ejus extremo alligetur pondus D movendo fere æquilibratum.

Quodsi ergo exigua vis applicetur ad funem HD, pondus E movebit.

PROBLEMA 146.

897. *Machinam elateris vi movere.* Tab. VIII. Fig. 95.

RESOLUTIO.

1. Lamella chalybea AB altero sui extre-

extremo axiculo CD afferruminata in gyros contorqueatur & thecæ cylindricæ, cui altero sui extremo afferruminata, includatur.

2. Huic affigatur catenuula, altero suo extremo axi coniformi GH alligata.

Quoniam enim laminæ vis elastica continuo minuitur, sub initium utique utpote fortius trahens in minori a centro motus distantia GL applicanda; sub finem vero, ubi segnius trahit, in majori IK (§. 792): quo obtinetur, ut potentia hæc in se sat inæquabilis, ad motum tamen regularem, qualis est horologiorum portatilium, adhiberi possit.

SCHOLION.

898. *Equidem figura fusi* GH *non conica, sed alia conoidica esse debebat & celeberrimus* de la Hire (b) *in ejus constructionem inquirit. Sed cum hypotheses assumere cogatur a rigore veritatis alienas; ipsimet non diffitetur, regulam, quam invenit, praxi non satis exacte respondere. Caterum vi elastica animantur quoque automata culinaria.*

DEFINITIO 90.

899. *Rota directa* est, quæ ab aqua desuper labente & intra cavitates palmularum collecta movetur. *Rota* vero *retrograda* vocatur, quæ ab aqua celeriter profluente & in infimam rotæ palmulam impetum faciente circumagitur.

COROLLARIUM 1.

900. Quoniam aqua rarissime ea rapiditate fertur, ut rotas molares circumagere possit; ex alto præcipitata impetum acquirat necesse est (§. 79. 583).

COROLLARIUM 2.

901. Cum itaque corpus grave tamdiu deorsum tendat, quamdiu centro telluris propius fieri potest; locus, ubi rotæ collocantur, centro telluris vicinior esse debet quam is, unde aqua in eas derivatur.

COROLLARIUM 3.

902. Et cum aquæ fluentes successive cadant, a latice seu origine earundem nonnisi exigua declivitas, nempe quam sufficere experientia loquitur, ad distantiam 100 pedum minimum $\frac{1}{4}$ unius pedis, ad summum dimidii, concedenda, reliqua autem proxime ante rotam in præcipitium mutanda.

COROLLARIUM 4.

903. Inquirendum itaque quanto depressior sit locus, ubi rotæ molares constituuntur, quam origo aquarum.

DEFI-

(c) Traite de Mecanique prop. 72. p. 233 & seqq.

DEFINITIO 91.

904. *Ars libellandi* est ars determinandi declivitatem aquarum, seu generalius, quanto intervallo punctum aliquod sit terræ centro propius quam alterum.

COROLLARIUM.

905. Quoniam lineæ horizontalis puncta singula a centro Telluris æqualiter distant (§. 207); aquæ libellantur, si linea horizontalis in datorum locorum superiore inventa usque ad inferiorem continuetur & ejus a superficie aquarum distantia utrobique investigetur. Distantiarum enim differentia declivitatem metitur.

DEFINITIO 92.

906. *Libella* est instrumentum, quo invenitur linea horizontalis & ad datum quodcunque intervallum continuatur.

PROBLEMA 147.

907. *Libellam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro semicirculi C suspendatur pondusculum H.
2. Diametro AB infigantur unci E & F.

Quodsi enim funis per uncos E & F ita extendatur, ut filum CD semicirculum appensum bifariam secet; lineam horizontalem apparentem repræsentabit.

DEMONSTRATIO.

Quia pondusculum H filum CD extendit; erit CD linea directionis ejus (§. 17). Et quia semicirculum bifariam secat *per hyp.* ad AB perpendicularis est (§. 143. 78. *Geom.*). Ergo AB est linea horizontalis apparens (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Regulæ orichalceæ AB afferruminentur dioptræ & inferius in C lamina cochlea E instructa. Tab. VIII. Fig. 98.
2. Laminæ vero huic afferruminentur prisma excavatum FG cum stylo GHIK bifurcato.
3. Inferius afferruminetur annulus cum ansula, ut, si opus fuerit, pondus appendi possit.
4. Paretur denique fulcrum semicirculare aut semiellipticum NO superius in P cochlea PQ instructum, ut instrumentum cruribus IK in cuspides acutas desinentibus in punctis S & T insistere queat.

Quodsi enim fulcimentum mediante cochlea ad arborem aut baculum erectum firmetur, instrumentum eidem insistens vi gravitatis in eum situm sese disponet, ut regula cum dioptris sit horizonti parallela (§. 215).

Ali-

Aliter.

Tab. IX. Fig. 98. *Ricciolus* propria experientia fretus hanc libellam (c) commendat

1. Super regula AB pedum 12 aut ad summam 20 canaliculo excavato inseratur tubus CD ex laminis ferreis stanno obductis, vel cupreis paratus, cruribus CA & BD ad angulos rectos reclinatis.
2. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ fœminæ, quibus aliæ mares inserantur, ut tubus quam arctissime claudi possit.
3. Glutine quodam in cochleis maribus firmentur tubi vitrei EC & FD ad AB normales.
4. Denique in G afferruminetur globus orichalceus, isque cavus, ne gravitate molestus sit, & intra matricem fulcro affixam ita reponatur, ut libere huc illucque libella moveri & in situ eodem, si necesse sit, immota servari possit. Orificia vero tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere possit inter transferendum.

Quodsi enim instrumentum aqua repleas & tubum ita constituas, ut aqua utrobique in tubis vitreis eandem altitudinem AH & BI attingat; erit HI linea horizontalis apparens, cum fluidorum quiescentium partes omnes eandem a centro telluris distantiam habeant: alias enim remotiores vi gravitatis ruerent versus locum inferiorem, qui conceditur.

5. Consultum quoque est, ut ad tubos BD & AC afferruminentur dioptræ K & L ad juvandam collineationem, quamvis etiam sine iisdem per utriusque aquæ superficiem collineatio in omni situ tubi fieri possit.

Aliter.

1. Tubus vitreus, cujus longitudo IL ultra pedis longitudinem excrescere potest, glutine quodam firmetur intra tubulos orichalceos IP & QL, sitque tubus in altero extremo L apertus, sed obturaculo quodam ex subere parato & capite orichalceo instructo claudendus. Tab. IX. Fig. 99.
2. Tubus ita paratus firmetur super regulam ST, ad quam etiam
3. Firmentur dioptræ M & N.
5. Infra hanc regulam firmetur alia minor CD circa axiculum in C mo-

(d) Geograph. Reformatæ lib. 6. c. 26. §. 8. f. 230.

C mobilem, mediante cochlea G nunc attollenda, nunc deprimenda.

5. Intra has regulas sit lamina elastica H ex orichalco aut chalybe parata, ut instrumentum tanto accuratius ad situm horizontalem disponi possit.

6. In medio denique regulæ inferioris afferruminetur matrix seu cochlea fœmina, ut libella ad fulcrum quoddam, quoties ea utendum, firmari possit.

Quodsi tubum vel aqua, vel spiritu vini colorato repleas, ita tamen ut pauculum aeris remaneat, bullulam in superficie fluidi formaturum; ascendet bullula in partem superiorem, si tubus fuerit inclinatus, sed datum situm e. gr. in F tuebitur, si horizontalis fuerit. Levia enim sursum ascendunt, quantum datur.

SCHOLION 1.

907. *Alia libellarum genera a viris celeberrimis* Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo *inventa describuntur a modo laudato* Picardo (e). *Adhuc alia dederunt* viri Cl. Coupletus (f) & Hartsœkerus (g). *Ego eas descripsi, quas mea instrumentorum suppellex mihi suppeditavit. Omnium fere, quæ passim prostant, descriptionem dedit* Jacobus Leupoldus (h).

SCHOLION 2.

908. *Prima libellarum, quam exhibui, non satis fida.* Ricciolus *enim jam observavit, facile aberrari 5 minutis, immo gradu dimidio, nisi ingens fuerit. Sed moles usum molestum reddit. Facile tamen medela paratur, si scilicet loco semicirculi utamur regula* AB *trium pedum cum altera longiore* CD *quatuor pedum ad angulos rectos priori insistente: quæ si dioptris instruatur & libere suspendatur, fulcro conveniente adhibito, exactissimam libellam constituit.* Tab. IX. Fig. 100.

SCHOLION 3.

909. *Solent quoque a nonnullis in libellationibus præsertim longioribus dioptrarum loco adhiberi telescopia: sed multa circumspectione opus est, ut rite ad instrumenta applicentur. Enimvero ea de re in Astronomia ex principiis opticis dicetur.*

PROBLEMA 148.

910. *Rectificare libellam.*

RESOLUTIO.

Ut certus sis, libellam esse revera in situ horizontali

1. Instrumento in A collocato col- Tab. IX. Fig. 101.

 linea-

(e) Traité du nivellement c. 2. p. 37 & seqq.
(f) Memoires de l' Academie Royale des Sciences A. 1699. p. 172.
(g) in Miscellan. Berolinens. p. 318. & in Actis Eruditorum A. 1712. p. 34.
(h) in Theatro Horizontostatico sive libellationis, quod est pars quarta Theatri Statici universalis.

lineatio fiat in C centrum tabulæ in B erectæ.

2. Libella, quæ eum in finem duplicibus dioptris instrui debet, invertatur & denuo collineatio fiat in tabulam eandem,

3. Quodsi idem punctum C sit in linea visuali, libella convenientem habet situm; sin in puncto altiori aut depressiori desinat, paulisper attollenda vel deprimenda est (quo spectant regulæ cum cochleis in libellis paulo ante descriptis), donec linea visualis punctum inter duas collineationes medium attingat.

DEMONSTRATIO.

Tab. IX. Fig. 101. Ponamus instrumentum esse in linea horizontali AC & visu attingi punctum C. Si situs instrumenti mutetur, ut B in A & A in B constituatur, cum linea horizontalis non sit nisi unica, adhuc linea visualis AB ultra dioptras continuata in puncto C terminabitur. *Quod erat unum.*

Quodsi instrumentum non sit horizonti parallelum, linea visiva in centro ejus G secabit horizontalem AB eritque HGB = AGF (*§.* 156. *Geom.*), & collineanti per F & H occurret punctum altius D. Quodsi libella invertatur, ut H in *h* & F in *f* constituatur; erit *h*GA = BG*f* (*§.* 156. *Geom.*). Est vero *h*GA = HGB, quia instrumentum situ respectu lineæ horizontalis immutato inversum. Ergo BG*f* = HGB. Quare cum porro, ob rectam D*d*, in quo sunt puncta D & *d*, ad lineam horizontalem perpendicularem anguli recti ad C æquales sint (*§.* 245. *Geom.*;) erit CD = C*d* (*§.* 267. *Geom.*), hoc est, linea horizontalis cadit in punctum C intra duo collineata D & *d* medium. *Q. e. d.*

PROBLEMA 149.

911. *Aquas libellare.*

RESOLUTIO.

1. Eo in loco, ubi origo declivitatis statuitur, ope ponderis ex fune suspensi exploretur, quanto intervallo superficies aquæ a ripa absit. Tab. IX. Fig. 101.

2. Idem fiat altero in loco, ubi declivitatis terminus statuitur.

3. Erectis in A & B baculis ad horizontem perpendicularibus cum tabulis D & C nigro colore tinctis, sed cruce alba notatis, atque ope cochleæ in quocumque situ ad baculos firmandis, libella EF collocetur in P.

4. Tabula utraque D & C nunc attollatur, nunc deprimatur, do-

donec per EF collineanti punctum medium, in quo lineæ albæ sese mutuo intersecant, occurrat.

5. Investigentur exactissime altitudines punctorum D & C, nempe AD & BC atque in schedula notentur.

6. Tum instrumento in Q & baculo AG in M translato, fiat ut ante collineatio in O & P, notenturque altitudines OB & PM. Et ita operatio continuetur, donec terminum declivitatis M attigeris.

7. Addantur in unam summam altitudines AD & BO &c. itemque BC & MP &c. & priori adjiciatur altitudo ripæ in origine declivitatis A, posteriori vero altitudo ripæ in fine declivitatis M.

8. Quodsi enim aggregatum posterius e priori auferas, relinquetur declivitas aquarum a termino A usque ad alterum M fluentium respectu lineæ horizontalis apparentis.

9. Quare si tractus AM fuerit longus; quod ab ea subtrahendum est, ut habeatur declivitas respectu lineæ horizontalis veræ, invenitur per problema 39 (§. 216) aut sine novo calculo in tabula superius exhibita (§. 227). Sit e. gr.

altit. ripæ AL	64	altit. ripæ MN	58
AD	34″	BC	57″
BO	68	PM	102
Summa	166	Summa	217
			166
		declivitas LI	51

Sit LK 900 pedum, erit declivitas LI mulctanda 3 lineis, ut relinquatur vera 5′0″7‴.

DEMONSTRATIO.

Ducantur IN & LK itemque OG parallelæ; erit DG = OC, PN = GI DL = PC, OB = GL (§. 226. *Geom.*). Ergo DA + AL + OB = GL + BC & PM + MN + BC = GI + BC, consequenter GI + BC − GL − BC = LI *Q. e. d.*

SCHOLION.

912. *Quoniam in hac operatione facile aberrari potest, consultum est, ut libellatio bis instituatur, nempe primum a termino* A *usque ad terminum* M, *deinde retro a termino* M *usque ad terminum* A.

DEFINITIO 93.

913. *Sectio fluminis* est planum ad angulos rectos secans aquam in alveo fluentem, cujus fundus horizontalis, ripæ autem intet se parallelæ.

COROLLARIUM. 1.

914. Quoniam linea directionis particularum aquæ tanquam corporis gravis est ad horizontalem perpendicularis (§. 215) & fundus alvei atque superficies aquæ horizontalis, ripæ vero inter se parallelæ, *per hypoth.* latera plani secantis erunt ad basin perpendicularia & inter se parallela, consequenter opposita æqualia (§. 226. 238. *Geom.*), adeoque sectio rectangulum est (§. 100. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

915. Invenitur adeo, si latitudo alvei in profunditatem aquæ ducatur (§. 375. *Geom.*)

COROLLARIUM 3.

916. Sunt etiam sectiones diversæ in ratione composita latitudinum alveorum & profunditatum aquarum (§. 376).

SCHOLION 1.

917. *Cum aquæ fluentes nunc intumescant, nunc tabescant, eo potissimum tempore sectionem fluminis dimetiri debet molendina exstructurus, quo mediocrem habet altitudinem.*

SCHOLION 2.

918. *Quodsi aquæ copia non abundamus, consultum est, ut aqua in stagno colligatur inde per alveum in rotas deducenda, ne minimum ejus pereat. Quærendi etiam sunt fontes in vicinia siti & aqua ex iis in stagnum derivanda.*

SCHOLION 3.

919. *Cum ex superioribus constet, in conflictu corporum non modo habendam esse rationem massæ, sed etiam celeritatis, qua corpus in aliud quiescens impingens movetur* (§. 532); *in molendinis aquarum vi agitandis consideranda est & sectio earum & declivitatis in præcipitium mutanda, unde celeritas ejus dependet. Quodsi declivitas fuerit insignis, plurimorum scilicet pedum, e.gr. 10 aut 12, & sectio aquæ exigua, rota construitur directa: ast si declivitas exigua & sectio ingens, rota utendum est retrograda.*

PROBLEMA 150.

920. *Aquam fluentem in rotam directam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ut declivitas in præcipitium mutari possit, aqua per alveum aut canalem ex ligno constructum deducatur ad rotam, & distantiæ 100 pedum concedatur declivitas $\frac{1}{4}$ unius pedis, ne aqua nimis segniter fluat.
2. Rota ratione decente constructa sub canali ita constituatur, ut aqua deorsum ruens per planum declive in capsulam ab axe secundam irruat, ipsa vero aquæ effusæ superficiem non attingat, ne motus retardetur.

COROLLARIUM 1.

921. Quodsi a declivitate integra subducatur pars, quæ aquæ concedenda, ut intra alveum suum fluere possit & in rotam

tam præcipitanda impetum acquirat, nec non ut aqua effusa defluat; diameter rotæ relinquitur.

COROLLARIUM 2.

922. Ut aqua omnis in palmulas incidat, eas canale latiores esse præstat.

PROBLEMA 151.

923. *Rotam directam construere.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 103. Totum artificium huc redit, ut situs palmularum determinetur: id quod sequentem in modum fieri solet.

1. Semidiametro rotæ (quæ est dimidia altitudo ejus) in scala modica sumta describatur circulus AIKA & semidiametro minore CE, quæ differat a priori quantitate latitudinis orbium AE, quibus palmulæ infiguntur, alius.
2. Recta AE dividatur in tres partes æquales, ita ut DE sit $\frac{1}{3}$AE.
3. Ex centro C per D describatur circulus in tot partes æquales dividendus, quot palmulis instruenda est rota.
4. Applicata regula ad duo divisionis puncta H & F, tertio intermedio D relicto, ducatur recta HI &
5. in H excitetur perpendicularis HG.

Recta HI situm palmulæ unius; recta vero HG situm alterius determinat. Et eodem modo situs binarum quarumcunque aliarum palmularum determinatur.

PROBLEMA 152.

924. *Aquam ad rotam retrogradam deducere.*

RESOLUTIO.

1. Ne aqua superflua in rotam incidat & tota ejus declivitas, parte demta, quæ ipsi ut fluere possit concedenda, in præcipitium mutari queat; fossa effodiatur a flumine, ex quo aqua deducitur, tanto intervallo distans, quanto conceditur, tum ut aqua impetu in rotam facto promptius defluat, tum ne aqua intumescens ripis fossæ atque molendino facile damnum inferat.
2. Ne autem aqua intumescens agros vicinos inundet, riparum sufficiens esse debet altitudo. Consultum quoque est, ut fundus fossæ arena complanetur.
3. Quo aquæ sufficiens copia in fossam deducatur, per transversum fluminis excitandus est agger,

ger, tantæ altitudinis, quanta permittitur ad aquam citra damnum alterius in motu suo retardandam.

4. In fine fossæ trabs horizontaliter sternatur, quæ *arboris molinariæ* fert nomen, ejus superficies cum fundo fossæ sit in eodem plano, ut aqua omnis in rotas præceps dari possit.

5. Super arbore molinaria perpendiculariter erigantur duæ trabeculæ tertia transversa jungendæ & canaliculis excavandæ, ut tabula nunc elevata, nunc depressa aqua a rota arceri, vel ad eandem demitti possit.

6. Ut igitur aqua tabula depressa impedita, quo minus ad rotam præcipitetur, aliorsum fluere possit, & ne aqua intumescens ripas fossæ egrediatur; alicubi fossæ molinariæ a latere jugenda est alia, ad arbitrium claudenda & aperienda, aquæ superfluæ transitum concessura.

Tab. IX. Fig. 204. 7. Alveus denique declivis in fine fossæ excitetur profunditatis AB, quanta est declivitas in præcipitium mutanda, utque in rotam directe impingat aqua, superficies per quam delabitur sternenda est juxta arcum DC ex centro rotæ E intervallo radio ejus paulo majore descriptum.

8. Quodsi fossæ molinariæ locus nullus concedatur, agger per transversum fluminis prope rotam construendus, ut aqua in motu ratardata in alveum derivetur.

COROLLARIUM 1.

925. Si ea fuerit fossæ latitudo, ut duabus rotis juxta se invicem constituendis locus concedatur; duo quoque construendi sunt alvei cum tertio intermedio, vel a latere posito, per quem aqua superflua a molendino arceatur.

COROLLARIUM 2.

926. Quodsi declivitas aquæ in præcipitium mutanda ea fuerit, ut ejus dimidium, vel subtriplum &c. rotæ agitandæ sufficiat; intra unum alveum duæ vel tres &c. rotæ constituuntur, declivitate inter eas divisa, ita tamen ut præcipitium majus sit ante posteriores, quam anteriores rotas.

SCHOLION 1.

927. *Aggeres excitantur, palis in fundum fluminis adactis, quarum anteriores altiores, posteriores humiliores, differentia altitudinis primarum & ultimarum existente aquali altitudinis, ad quam aquam in motu retardare licet. Spatia palis interjecta arena & sabulo replentur & superius stratum paratur vel ex asseribus, vel ex lapidibus. Fundus fluminis ante aggerem ad 6 vel 7 pedum*

pedum distantiam complanantur, ne aqua vim ipsi inferre possit.

SCHOLION 2.

928. *Rotarum retrogradarum constructio nihil habet difficultatis: palmularum enim situs determinatur per radios ex centro rotæ eductos, sive intra orbes collocentur, sive in fronte constituantur. Altitudo illarum variat, quemadmodum & aquæ sectio. Minoris altitudo (quam Germani* ein Staber-Rad *appellant) est* 12 *pedum; majoris vero (quæ nobis* ein Panster-Rad *nuncupatur) ordinarie* 16 *pedum. In illa distantia palmularum digitorum* 12 *&* 13; *in hac* 16 *vel ad summum* 19. *Sectio aquæ in illa duorum pedum quadratarum; in hac pedum quinque. Quodsi palmulæ ad peripheriam rotæ sint perpendiculares, ultra eam eminentes (quales rotas* Straub-Räder *dicimus); altitudo rotæ & distantia palmularum variat pro diversa fundi declivitate & sectionis magnitudine.*

PROBLEMA 153.

b. 919. *Vi venti machinam movere.*

RESOLUTIO.

1. Axi infigantur virgæ AB & CD se mutuo ad angulos rectos in E secantes, quarum longitudo 32 pedum fieri solet.
2. Ad has virgas ex scandulis construantur alæ figuram trapezii parallelarum basium habentes, quarum latitudo HI sit 6 circiter pedum, inferior FG per radios ex centro E ad C & H ductos determinatur.
3. Ita autem alæ aptandæ sunt, ut FG cum axe FL efficiat angulum 54°.
4. Denique ut alæ vento semper obverti possint; tota machina circa axem NK versatilis esse debet, ut ope vectis PQ huc illucque versari atque in omnes plagas dirigi queat.

Aliter.

Alii turriculam ex lapidibus vel lateribus construunt, ita ut tantummodo tectum cum axe alato versatilis existat. Eum scilicet in finem Tab. IX. Fig. 106.

1. Turricula annulo ligneo cingitur & in eo canaliculus effoditur, in cujus fundo hinc inde trochleæ orichalceæ ita immittuntur, ut exiguum segmentum ultra eum promineat.
2. Intra canaliculum aliis annulus reponitur, cui tectum superstructum.
3. In exteriori circa turriculam area defiguntur unci ferrei G &
4. Cum annulo mobili connectuntur trabes AB & FC, quarum alte-

altera priorem tecto firmius affigit.

5. Denique in D alligetur funis trabi AD in F circumducendus & altero sui extremo axi in peritrochio aut suculæ alligandus.

Quodsi enim funis per uncum G ducatur & sucula convertatur, trabs AB ad illum adducitur, consequenter alæ in plagam ipsi oppositam diriguntur.

SCHOLION 1.

930. *Prior modus nostris in oris usitatus, posteriore in Batavia utuntur. Et posterior quidem priori præstat, quia alæ construi possunt majores, consequenter machina a vento agitara, ubi major resistentia superanda. Quodsi vero ad hanc vincendam minores sufficiunt, prior ideo antefertur, quia sumtibus longe minoribus exstruitur.*

SCHOLION 2.

931. *De machinis vi ignis movendis cogitarunt* Thomas Savery (i) Amontons (k), Dionysius Papinus (l) & deinceps alii (m): *sed valde vereor, ne inventa ipsorum praxi parum respondeant. Hactenus cum successu eadem non usi sunt, nisi automata culinaria huc referre velis, quæ a fumo agitantur: in aliis casibus vis motrix nimis sumtuosa.*

SCHOLION GENERALE.

932. *Quæ hactenus de potentiarum ad machinas applicatione diximus, eum unice in finem proposuimus, ut in machinis inveniendis usui essent, quoniam earum structura externa, ex parte etiam interna inde pendet. Mathematica horum omnium tractatio & plus temporis requirit, quam huic operæ impendere conceditur, cum pleraque adhuc in desideratis habeantur, nec ad scopum nostrum apprime facere videtur. Neque operas manuarias hic exponere visum est, cum eadem ad Mathesin non spectent, sed ab eadem supponantur. Mathesis enim in dimetiendis iis occupatur, quæ sub mensuram cadunt; manuarias vero artes non docet: quamvis utile judicemus, ut a theoria ad praxin progressurus earum non sit ignarus, ne (de quo vulgo conqueruntur) in theoria pro veris habeantur, quæ non succedere in praxi experientia loquitur. Ne igitur in hunc scopulum impingas, nihil assumendum est tanquam arte parabile, quod arte parari posse non jam ante experientia cognoveris aut ex iis, quæ experientia constant, legitima consequentia deduxeris.*

CAPUT

(i) in Transact. Anglican. n. 252. p. 228.
(k) Mémoires de l' Academie Royale de Sciences Anno 1699. edit. Bat. p. 154.
(l) in Arte nova ad aquam ignis adminiculo efficacissime elevandam,
(m) Stephani Switzer Introduction to' a general systeme of Hydrostaticks and Hydraulicks c. 28. 29. p. 325 & seqq.

CAPUT XVIII.

DE

RESISTENTIA IN MACHINIS SEU FRICTIONE.

DEFINITIO 94.

933. *Frictio* est resistentia superficiei, per quam inceditur.

SCHOLION.

934. *Ita perspicacissimus* Leibnitius (n) *frictionem definit, qui primus hanc materiam distincte evolvit.*

DEFINITIO 95.

935. *Corpus* dicitur *asperum*, in cujus superficie eminentiæ & cavitates alternantur.

DEFINITIO 96.

936. *Superincessus radens* est, si punctum idem superincedentis lineam in superficie describit, per quam inceditur.

E. gr. Talis est superincessus parallelepipedi super plano protrusi.

DEFINITIO 97.

937. *Superincessus volvens* est, si punctum contactus continuo mutatur.

E. gr. Talis est rotæ in curru tam respectu axis, quam respectu soli.

DEFINITIO 98.

938. *Motus mixtus* est, si volutioni admiscetur motus radens elementaris seu instantaneus.

SCHOLION.

939. *Hunc motum distinctius explicat* Leibnitius (o); *sed nos eodem nunc non utemur.*

THEOREMA 203.

940. *Si superficies, per quam inceditur, & superficies corporis, quod per illam incedit, fuerint asperæ, frictio oritur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim in superficie corporis asperi eminentiæ & cavitates ubique alternentur (§. 933); si tam superficies corporis incedentis, quam ea, per quam inceditur, asperæ fuerint, eminentiæ vel sunt intra cavitates deprimendæ, vel prorsus abradendæ, vel eminentiæ unius ex cavitatibus alterius attollendæ. Sed nihil eorum fieri potest

(n) in Miscellaneis Berolinensibus p. 307.
(o) in Miscellan. Berolinens. p. 312. 313.

est sine motu, nec motus produci sine vi impressa. Vis igitur, qua corpus movetur, vel tota, vel ex parte his effectibus impendenda, adeoque motui corporis resistitur (§.20), consequenter frictio oritur (§.933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

941. Quo asperiores itaque sunt superficies, eo resistentia major.

SCHOLION 1.

942. *Asperitas æstimanda est non modo ex numero eminentiarum abradendarum vel deprimendarum; verum & ex difficultate eas abradendi vel deprimendi, nec non ex mole cavitatum. Fieri namque potest, ut eminentiæ aliæ minori vi abradantur, vel deprimantur, aliæ autem nonnisi majori vincantur.*

COROLLARIUM 2.

943. Si corpora frictione continuata politiora fiunt, frictio minuitur.

SCHOLION 2.

944. *Id ipsum experientia clarissime loquitur.*

COROLLARIUM 3.

945. Superficies adeo partium in machinis, quæ se mutuo tangunt, quantum fieri potest, poliri debent.

COROLLARIUM 4.

946. Quoniam tamen corpus nullum adeo poliri potest, ut omnis asperitas tollatur, microscopiis testibus; consultum est (quod & dudum in praxi receptum) ut partes se mutuo tangentes oleo aut alio unguine illinantur.

THEOREMA 204.

947. *Dum pondus corporis incedentis superficiem ejus ad superficiem, per quam inceditur, apprimit; frictio augetur.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim pondus corporis incedentis superficiem ejus apprimit ad superficiem, per quam inceditur; eminentiæ unius tanto profundius in cavitates alterius descendunt, adeoque majori vi inde rursus attollutur (§.265), vel etiam deprimuntur aut abraduntur. Major itaque vis requiritur ad hæc obstacula vincenda, quam si non adeo valide corpus incedens apprimeretur. Unde patet, quod appressio ex pondere superincedentis augeat resistentiam superficiei, per quam inceditur (§. 20), hoc est, frictio augetur (§. 933). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

948. Crescente adeo pondere corporis incedentis aut insistentis, frictio crescit.

SCHOLION.

949. *Hinc libra exiguis ponderibus onu-*

onusta exigua vi ab æquilibrio dimovetur; pluribus autem onusta, majori vix dimovetur.

THEOREMA 205.

950. *Si linea directionis corporis incedentis ad superficiem, per quam incedit, fuerit obliqua; frictio intenditur.*

DEMONSTRATIO.

Si enim linea directionis corporis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, obliqua; vis, qua movetur, versus superficiem, per quam inceditur, nititur adeoque perinde est, ac si superficies incedentis a pondere ad eam apprimeretur. Sed appressio ex pondere incedentis frictionem intendit (§. 947). Ergo eadem intenditur, si linea directionis incedentis ad superficiem, per quam inceditur, fuerit obliqua. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

951. Quoniam ictus perpendicularis est ad obliquum ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 552), sinus autem anguli majoris major est, minoris contra minor (§. 2. *Trigon.*); nisus corporis superincedentis in superficiem, per quam inceditur, consequenter frictio major est, quo propius ad perpendiculum accedit linea directionis corporis incedentis.

SCHOLION.

952. *Hæc denuo experientiæ valde consona sunt & præcipue in dentibus rotarum observantur, ut sæpissime hac de causa prorsus frangantur.*

COROLLARIUM 2.

953. Tollitur adeo hæc frictio, si linea directionis corporis incedentis fuerit parallela superficiei, per quam inceditur: tum enim nisus superincedentis in eam nullus est.

THEOREMA 205.

954. *Si superincessus volvens, longe minor est frictio, quam si radens extiterit.*

DEMONSTRATIO.

Sit regula dentata A B & super ea incedat rota DE, cujus dentes sint ad peripheriam normales. Quodsi superincessus fuerit radens, dens F, qui regulam tangit, lineam rectam in superficie regulæ describere debet (§. 936). Cum adeo ipsi resistat dens regulæ H, progredi omnino nequit, nisi hic frangatur, aut deprimatur, vel dens rotæ F curvetur aut prorsus abradatur. Idem ergo cum contingat, si corporis cujuscunque alterius asperi super superficie aspera incedentis superincessus radens fuerit; frictio omnis locum habet, quæ ab asperitate superficiei oriri potest. Enimvero si rota ED super

Tab. IX. Fig. 107.

per regula provolvatur, tum dens regulæ H incessui ejus non amplius resistit, nisi quatenus ex cavitate F supra eminentiam dentis H attollendus. Idem cum valear, si corpus quodcunque asperum super aspera superficie volvitur, frictio minor est, si superincessus volvens, quam si radens extiterit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

955. Ne igitur in machinis frictio magnam vis motricis partem absumat, cum cura dispiciendum est, ut, quantum fieri potest, nulla pars machinæ alteram radat, quin potius una super altera volvatur.

COROLLARIUM 2.

956. Hinc consultum est, ut axiculi cylindrorum non (quod vulgo fieri solet) matrici concavæ, sed rotulis A, B, C, D circa axiculos versatilibus imponantur.

SCHOLION 1.

957. *Suasit hoc dudum* Paulus Casatus (p) *& experientia confirmat, quantum virium hoc artificio lucremur. Quodsi metuas, ne axiculus cylindri satis tuto duobus rotulis* A *&* B *incumbat, tertiam addere licet.*

SCHOLION 2.

958. *Hinc etiam, si trochlea circa centrum mobilis, tractioni minus resistitur, quam si eadem fixa foret. Eadem est ratio, cur rota curruum circa axem versatiles sint.*

SCHOLION 3.

959. *Patet quoque ratio, cur trabes difficillime trahantur in plateis lapidibus stratis; facillime autem, si nive via obtegatur, ut planitiem probe politam exhibeat.*

[SCHOLION 4.]

960. *Ex eodem fonte* Olaus Roemerus, *cum Parisiis commoraretur, quamvis non sine subsidio Geometriæ sublimioris deduxit, figuram dentium in rotis epicycloidalem esse debere: id quod post eum quoque ostendit* Philippus de la Hire (q); *sed, quod dolendum, hactenus in praxin recepta non est.*]

COROLLARIUM 3.

961. Quoniam rotulæ circa axiculum fixum versatiles volvuntur, dum in superficie corporis alterius incedunt; earum ope superincessus radens in volventem transmutari potest, quotiescunque datur.

SCHOLION 5.

962. *Ita in machinis, quæ serrarum reciprocatione ligna secant, rectanguli lignei, cui serræ inseruntur, latera istiusmodi rotulis instrui deberent. Attenuata enim frictione, plures serræ una secare possent. Similiter brachia pistillorum* Tab. X. Fig. 19.

(p) Mechanicorum lib. 2. c. 1. p. 130.
(q) Memoires de Mathemat. & de Physique p. 51 & seqq.

lorum attollendorum CD *rotulis instruere juvat, ut super pinnulis curvis* EF *axis* FH *sine frictione incedant. Pinnulis figuram epicycloidicam assignat* Cl. de la Hire (r).

ib. I.

COROLLARIUM 4.

963. Et quia axes curvati superincessum plane tollunt (§. 597); iis rotarum loco utendum, quotiescunque datur.

SCHOLION 6.

964. *Equidem nec hic cessat frictio in* E & G. *Enimvero ea perexigua est si comparetur cum frictione, qua ex superincessu rotarum oriri solet.*

SCHOLION 7.

965. *Equidem* Amonton *regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam requisitam* (s); *sed cum omnem frictionem a sola appressione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet, quod proposito satisfacere nequeat.*

CAPUT XIX.

DE

MACHINIS COMPOSITIS.

DEFINITIO 99.

966. *Machina composita* est, quæ ex pluribus simplicibus tanquam partibus constat.

SCHOLION.

967. *Machinarum compositarum nullus est numerus. Construuntur autem tum ad onera ingentia attollenda, tum ad motus varios producendos, qui in usum vitæ humanæ redundant. Omnia nimirum hominum opera a machinis perfici possunt, ad quæ idem semper motus vel continuo, vel juxta certam periodum repetitur. Ita ad frumentum in farinam conterendum rotatione continua saxi molaris opus est: unde hæc opera machinis demandatur. Similiter ad contusionem granorum, ex quibus oleum exprimitur, pistillorum elevatione continuo iteranda opus est: hinc a machinis contusio ista perficitur. Ut arbor prostrata in asseres dissecetur, continua serrarum reciprocatione opus est. Quare denuo machinarum vires ad hunc usum transferuntur. Nostrum equidem non est, theatrum quoddam machinarum in præsenti aperire; sed ut compositionis earundem quandam ideam animo comprehendant tyrones, unum saltem alterumque exemplum in medi-*

(r) loc. cit. p. 72. & seqq.

(s) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1699. p. 160. & seqq. edit. Bat.

um afferemus, additis regulis quibusdam generalibus, quibus de machinis inveniendis solliciti juvantur.

PROBLEMA 154.

968. *Dato opere perficiendo, machinam componere.*

RESOLUTIO.

1. Ante omnia opus est, ut operis perficiendi notionem distinctam &, quantum licet, adæquatam habeamus: ad quam quomodo perveniatur, ex commentatione de methodo §. 8 & 10 colligitur, & alibi distinctius explicavi (t). Scilicet singula, quæ in opere perficiendo, ulla ratione distingui possunt, tum sigillatim expendenda, tum inter se conferenda.
2. Ex hac operis perficiendi idea colligendum, quali motu opus sit ad id præstandum, quod requiritur: qui est effectus a machina producendus.
3. Ex eadem quoque constabit quantitas virium ad resistentiam in motu superandam requisitarum: ubi
4. inprimis consideranda est frictio ex superincessu mobilis oriunda & de remediis mechanicis capite superiori expositis deliberandum.
5. Antequam vero consilium ineatur, quibusnam machinis simplicibus combinatis motus desideratus produci queat; de potentia machinam agitatura cogitandum est, quoniam pro ejus conditione variat interna quoque machinæ structura. Quam primum igitur certus fueris de potentia ad machinam applicanda: externa ejus structura statim constabit ex capite decimo quarto.
6. Unde quantitate virium, quæ ad motum ultimum producendum requiruntur, una expensa, vi capitis undecimi non difficulter determinantur machinæ simplices in composita combinandæ.

E. gr. Sit construenda machina, qua onus ingens U in altum attolli possit & quæ commode de loco in locum transferri queat. Cum onus attollendum sit corpus grave, statim apparet, lineam directionis esse ad horizontem perpendicularem. Talis ergo construenda est machina, quæ pondus sursum trahat secundum lineam directionis ad horizontem perpendicularem. Quoniam vero pondus oneris non determinatur, sed Tab. X. Fig. 113.

(t) in Philos. ration, seu Logica §. 678.

ſed ſaltem ingens ſupponitur; machinam conſtruere ſufficit, qua homo pondus aliquod viribus ſuis longe ſuperius elevare poſſit, tempore tamen non nimis longo. Et quia machina compendioſa eſſe debet, ut commode huc illucque transferri poſſit; moveri optime poterit verſando, adeoque axe incurvato ABC inſtruenda (§. 175). Enimvero ut pondus ingens moveri poſſit, axis curvatus ſolus non ſufficit, ſed cum rota dentata GF axi horizontali GH infixa combinandus. Denique ut funis pondus ſurſum trahens circa cylindrum inferiore loco conſtitutum circumvolvi queat, ſupra trochleis I & K ad axem GH adducendus. Conſtat ergo machina ex axe GH cum rota ſtellata GF & axe dentato LC atque incurvato CBA duabusque trochleis I & K. Trochleæ ad virium incrementum nil conferunt, ſed ſola rota FG & axis incurvatus CBA. Eſt nimirum ſepoſita frictione potentia ſuſtentans ad pondus in ratione compoſita radii axis dentati LC ad BC & radii axis GH ad ſemidiametrum rotæ F (§. 812).

PROBLEMA 155.

969. *Machinam conſtruere, qua ingens admodum pondus ad altitudinem mediocrem attolli poteſt.*

RESOLUTIO.

1. Erigatur vectis AB, cujus centrum C, & in D infigatur uncus, cui onus attollendum G alligari poſſit.
2. Alteri vectis extremo B affigatur annulus E, qui cochleæ fœminæ F ſeu matrici afferruminetur.
3. Matrici inſeratur cochlea HI, quæ ergatæ IL circa axem ſuum in L mobili firmiter inſiſtat.

Quodſi enim mediantibus ſcytalis M, N, O, P, cylindrus IL cum cochlea HI circumagitur; matrix EF deſcendit & vectem AB deprimit, conſequenter pondus G attollit.

Quod vero exigua admodum vi pondus admodum ingens attolli poſſit, patet ex theor. 178. (§. 765) & theor. 198. (§. 847). Eſt nimirum potentia ad pondus in ratione compoſita AC ad CB, ſi AB fuerit horizontalis, & diſtantiæ duarum helicum in cochlea ad peripheriam ſcytala deſcriptam. Sit e. gr. diſtantia helicum 3''', longituto ſcytalæ 3', erit peripheria, quæ eadem deſcribitur 942''', adeoque potentia in N eſt ad reſiſtentiam in E ut 3 ad 942, hoc eſt, ut 1 ad 314. Sit jam AC : CB = 1 : 3; erit ergo reſiſtentia in E $\frac{1}{3}$ ponderis G, conſequenter potentia ad ſcytalam M applicata $\frac{1}{942}$ ponderis. Quodſi ſingulis ſcytalis ſingulæ potentiæ appli-

centur; erit una earundem $\frac{1}{3780}$ ponderis.

COROLLARIUM.

970. Si cochlea cum ergata remota funis ET alligetur in B, pondus G similiter cum virium compendio attolletur, quamvis multo minore (§. 765).

SCHOLION.

971. *Machina posteriore utuntur ad onera ex navi una in alteram contiguam transponenda.*

PROBLEMA 156.

972. *Molam acuminariam construere, hoc est, machinam, qua instrumenta ferrea aut chalybea acuuntur.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. III.

1. Cotes aquariæ A & B axi CD curriculo F instructo infigantur ad acuendum.
2. Axi alteri EG infigantur duo orbes lignei H & I, super quorum primo H arena politura inchoatur, super altero vero I smyride continuatur. Addantur duo alii minores K & L corio superinducti, super quibus smyridis pulvere subtiliori politura perficitur.
3. Utrique axi DC & GE infigatur etiam rotula M in peripheria crena instructa, ut loro circa utriusque peripheriam circumducto una alteram movere possit.
4. Ad curriculum F circumagendum adhibeatur rota stellata N, quæ communem cum rota molari PQ, e. gr. retrograda, palmulas in fronte gerente, axem habet, ac pro diverso aquæ impetu pluribus vel paucioribus dentibus instruitur, ut motus cotium sit satis celer.
5. Denique cum cotes continuo madidæ esse debeant; ad rotam molarem applicanda sunt duo haustra, quæ aquam in canalem ST effundunt per declive ex V & Z in cotes delabentem.

SCHOLION.

973. *Solent quoque molæ unici ad poliendum construi, tumque orbes axi GE infixi aptantur ad primarium DC, ipsi vero GE alii minores inseruntur.*

COROLLARIUM.

974. Si tam aquæ copia, quam declivitas sufficiens fuerit; cotes axi rotæ molaris NY infigere licet.

PROBLEMA 157.

975. *Molam frumentariam ab aqua agitandam construere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur rota molaris sive

dire-

directa, five retrograda, prout casus tulerit, nunc major, nunc minor, prout major vel minor aquæ copia & declivitas fuerit. Sit e. gr. rota retrograda AB 18 pedum eaque 33 palmulis instructa.

2. Ejusdem axi infigatur rota DE, cujus diameter illius subdupla, vel etiam major, pro diversa aquarum moventium vi, & quæ dentes, in nostro casu numero 48, in plano gerat.

3. Per curriculum FI 6, 7, 8, immo 9 bacillis instruendum, pro diversa celeritate, qua rota molaris movetur, virga transeat ferrea, cujus capiti pyramidem fere truncatam figura sua referenti incumbat *meta* (seu lapis molaris superior) *catinum* (seu lapidem infariorem) fixum 4 fere digitis circumcirca superans atque in medio excavatus, ut frumentum inter lapides demitti & comminutum ad circumferentiam propelli possit.

4. Ex scala suspendatur infundibulum *pq* mediante axe in peritrochio *st* pro arbitrio attollendum ac deprimendum. Inde

5. bacillus propendeat in foramen metæ annulo ferreo cum unco M munitum, quo illum propellens infundibulum agitet, ut frumentum in lapidem molarem demittatur.

6. Infundibulo fere insistat capsa H pyramidem truncatam referens & tam superius, quam inferius aperta, cui frumentum indatur.

7. Lapides cingantur cista cylindrica, spatio inter eam & metam nonnisi duorum digitorum relicto.

8. Arbor farinaria NO prope contactum metæ atque catini foramine pertundatur, ut per id frumentum contritum in sacculum tremulum ex peculiari linteo (nostrates Beuteltuch appellant) confectum devolvatur & farina surfure separetur.

9. Sacci, cujus latera loris assuta, extremis vero P & Q annuli ferrei insuti sunt, longitudo in tres partes æquales dividatur & in fine partis tertiæ assuantur annuli coriacei *a* & *b*, qui infigantur bacillis ad cylindrum *cd* circa axem mobilem affixis.

10. Eidem cylindro *cd* affigatur forcipula *ef*, intra quam ope clavi lignei firmetur regula *hf* alteri *ik* cylindrulo *lm* circa

axem suum versatili infixæ in *i* incumbens.

11. Curriculo FI sub angulo obliquo infigantur tres bacilli æqualiter a se invicem distantes, qui regulam *ki* impellentes alteram *hf* protrudunt & sic saccum attollunt, mox iterum relapsurum, regula *ik* in situm pristinum recidente.

Tab. XI. Fig. 113.

12. Quodsi aquæ impetus tantus fuerit, ut molam duplicem circumagere possit; axi rotæ molaris infigitur rota stellata LM, quæ duas rotas radiatas NO ab utroque latere adjacentes impellit, quarum saltem unam ab uno latere in schemate exprimere libuit: reliqua omnia sunt ut ante. Ratio diametri rotæ LM ad diametrum rotæ molaris AB sit ut 1 ad 2, ad diametrum vero radiatæ ut 3 ad 2: quamvis eidem stricte inhærendum non sit, si aliæ circumstantiæ aliam suadeant.

SCHOLION 1.

976. *Rotarum dimensiones dentiumque numeri variant pro varietate impetus aquæ in rotam molarem impingentis, qui partim ab ejus sectione, partim a declivitate, per quam ad illam delabitur, pendet. Constat vero ex superioribus* (§. 792), *rotas fieri debere majores, ubi minor fuerit aquæ vis; minores vero, ubi hac major.* Bœcklerus (u) *diametrum rotæ vel solo impetu fluminis sine declivitate in præcipitium mutata, vel ab exigua copia aquæ per declive delapsa agitandæ fieri præcipit* 48 *pedum, numerum palmularum* 86; *diametrum rotæ stellatæ* LM 18 *pedum, numerum dentium* 180, *numerum bacillorum in rota* DE 60. Casatus (x) *annotat, in Pado communiter longitudinem rotæ molaris* AB *esse cubitorum* 10, *diametrum totam cubitorum* 6, *inferiorem rotam* DE *diametrum habere cubitorum* $5\frac{1}{2}$, *dentes* 108 *plano infixos & curriculum* FI *in fusos* 9 *distingui; lapidem molarem in crassitudine numerare uncias* 6 *aut* 7, *in diametro cubitos* $2\frac{1}{2}$. Franciscus Philippus Florinus (y) *rotæ retrogradæ ab aqua rivuli* 4 *vel* 5 *pedum declivitatis agitandæ diametrum constituit* 18 *pedum, numerum palmularum* 30 *vel* 36, *latitudinem palmularum* 10 *vel* 14 *digitorum, altitudinem unius pedis. Rota dentata* DE *dentes assignat* 72., *curriculo bacillos* 6, 8 *vel* 9, *prout rota externa vel tardius, vel celerius movetur. In fluvio Halam Saxonum alluente rotarum retrogradarum molam duplicem circumagentium altitudo non excedit* 16 *pedes.*

Tab. X. Fig. 131.

COROLLARIUM.

977. Quodsi situs rotæ verticalis LM mute-

Tab. XI. Fig. 113.

(u) Jn der Hauß- und Feld-Schule part. 3. Clas. 6. p. 500 & 501.
(x) Mechan. lib. 5. c. 7. p. 560.
(y) Jm klugen Hauß-Vater lib. 2. c. 42. f. 308. & seqq.

mutetur in horizontalem & dentes in plano infigantur; rotæ vero molari substituatur vectis veluti in ergata, reliquis omnibus manentibus ut ante: molendinum habebimus manuarium, a duobus hominibus in loco superiore deambulantibus commode agitandum. Est vero longitudo vectis ex una parte 8 pedum, ex altera totidem pedum; rotæ dentatæ LM diameter $8\frac{1}{2}$ pedum, alterius DE 10 pedum & 2 digitorum, numerus dentium in priore 72, in posteriore 40, numerus bacillorum in curriculo 6.

SCHOLION 2.

978. *Multis adhuc modis aliis molæ manuaria construi possunt. Eminet vero inter eas quoddam genus, quod vi exigua moveri potest, superincessu rotarum penitus sublato. Id igitur ut describatur, e re nostra judicamus.*

PROBLEMA 158.

979. *Molam manuariam construere.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 84. 1. Construatur duæ rotæ AB & CD, quarum diameter 5 vel 6 pedum, & inferius ad conservandum impetum plumbo infuso oneretur.

2. Per centrum utriusque defigatur axis incurvatus HG per vectes IK & IL convertendus, ut supra docuimus (§. 884).

3. In rotæ superioris AB ambitu canaliculus excavatur, ut funis ceratus commode circumduci queat: qui idem

4. Circumducendus circa peripheriam alterius rotulæ minoris MN infixi virgæ ferreæ PQ, cui eidem

5. infigatur crux ex brachiis ferreis constans RSTV, quibus singulis affixum est pondus plumbeum, ad impetum conservandum.

6. Reliqua fiant, ut in problemate præcedente (§. 979).

SCHOLION.

980. *Axiculi rotarum ferrei sustentaculo orichalceo incumbere debent, quod & affrictum minuit, & ad durabilitatem conducit. In omni autem molarum genere sustentaculum virga ferreæ, cui lapis molaris incumbit, ita construendum, ut ad arbitrium attolli ac deprimi possit, prout usus postulaverit. Major enim lapidum distantia requiritur, si grana integra conterenda, quam si jam contrita in farinam convertenda.*

PROBLEMA 159.

981. *Molam jumentariam construere.* Tab. VII. Fig. 82.

RESOLUTIO.

1. Erigatur cylindrus verticalis DN, cujus diameter 14 digitorum cum temone GH quatuor virgis ferreis ad rotam firmando.

do. Immo temo geminari potest.

2. Circa eundem cylindrum construatur rota ſtellata IK, cujus diameter $14\frac{1}{2}$ pedum, 16 lignis transverſus (quale IL) quorum latitudo 7, craſſities 2 digitorum, connectenda, & adhuc aliis 16 (quale IO) quorum longitudo 7 pedum, latitudo 4 & craſſities $8\frac{1}{2}$ digitorum firmanda.

3. Dentes ex ligno quercino probe ſicco parati ita infigendi, ut axes eorundem diſtent $4\frac{1}{2}$ digitis.

4. Curriculi IP diameter 22 digitorum & numerus fuſorum ſeu bacillorum 11, quorum longitudo 18, diameter duorum digitorum.

5. Reliqua fiant ut in probl. 157. (§. 975).

Aliter.

Tab. XI. Fig. 113. Quodſi rota adeo ingens non commoda viſa fuerit, conſtruere licet minorem, cujus diameter nonniſi 7 pedum, $1\frac{1}{3}$ digitorum, dentes 64 in plano gerentem. Hæc rota ut ſuperius (§. 975) circumagit aliam rotam radiatam NO, cujus diameter $21\frac{1}{5}$ digitorum, numerus babillorum 16. Cum eodem eidem axi infigitur rota DE, cujus diameter 6 pedum, dentes 72 in plano gerens & curriculum FE 6 fuſis inſtructum circumagens. In rota priore craſſities dentis 2, in poſteriore $1\frac{1}{2}$ digitorum. Longitudo temonis 5 pedum.

PROBLEMA 160.

982. *Molam alatam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Structuram externam docuimus ſupra (§. 929). Interna conſtat ex rota dentes in plano habente atque curriculo, ut in molis frumentariis, quæ ab aqua moventur (§. 975). Numerus dentium in rota dentata eſt 72, vel 80: numerus fuſorum in curriculo 9 vel 8. Quælibet ala eſt pedum 30 vel 32.

PROBLEMA 161.

983. *Molam oleariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Mola olearia ita conſtruenda, ut tum materiam contundere, tum ex contuſa atque toſta oleum exprimere valeat. Utrumque igitur ut præſtetur, Tab. XI. Fig. 114.

1. Axi rotæ molaris infigatur rota ſtellata AB, quæ circumagat

2. rotam radiatam AE axi EF inſertam, cui hinc inde pinnulæ G

læ G infiguntur piſtilla HI attollentes.

3. Piſtillorum baſes itemque fundi vaſorum K in trunco LM excavatorum lamina ferrea obducantur, ut ſemina lini, rapicia, amygdalæ, nuces, nuclei prunorum, vel quæcunque detur materia, probe contundantur, piſtillis proprio pondere relabentibus.

4. In parallelepipedo LM excaventur duo minora, quorum baſis inferior ſit perforata, ut oleum expreſſum inde in vaſa ſubjecta deſtillare poſſit. Intra ea reponitur materia contuſa & in aheno ſuper igne toſta, panno ex pilis contexto involuta atque inter duas tabulas P & Q, in quarum una hemiſphærium cavum, in altera convexum, comprehenſa. A parte poſtica intruditur cuneus acie ſua prominens in H & ab antica infigitur alius N.

5. Ut cuneus alter N vi adigi ſicque oleum exprimi poſſit, malleus P cum vecte PQ cylindro RL circa axem ſuum mobili affigatur, mediante ligno transverſo TV ad cuneum dirigendus.

6. Ad eundem cylindrum RS in oppoſito latere aptetur forceps *ab*, intra quem continetur contus *bd* cum pinnula *ef*, quæ a pinnula cylindro EF infixa deprimitur & malleum P attollit proprio pondere cum impetu in cuneum N mox relabentem.

COROLLARIUM 1.

984. Quoniam rota radiata AE cum ſtellata AB ideo adhibentur, ut cylindrus EF celerius circumagatur; ſi aquæ ſufficiens copia atque declivitas, vel numerus piſtillorum exiguus fuerit; ipſi cylindro EF rota molaris ab aqua agitanda infigi poteſt. Et tales ſunt molæ metallicæ, quæ malleis ferreis 57 librarum piſtillis 12 pedum affixis materiam metallicam crudam comminuunt.

COROLLARIUM 2.

985. Si vis aquæ ſufficiens adfuerit, duo cylindri pinnulis ſuis piſtilla elevantes a rota ſtellata circumagi ſolent.

COROLLARIUM 3.

986. Et quia perinde eſt, quæcunque materia contundatur; eadem manet ſtructura, ſi mola conſtruatur, ad materiam pulveris pyrii contundendam. Sint e. gr. piſtilla 16 in duas ſeries diſtributa: rotæ molaris ab aqua convertendæ altitudo erit 18 pedum, numerus palmularum, quarum latitudo 2 pedum, altitudo unius, 48; diameter rotæ AB 7′ 3″, numerus dentium 60; longitudo

tudo cylindri EF 15′ 10″, diameter 14″; diameter rotæ radiatæ 3′ 2″, numerus fuſorum 24; integra piſtilli altitudo 9′ 2″, craſſities & latitudo 4″. Sed ſi rota externa calcando movetur (§. 886), diameter ejus eſſe poteſt 16 pedum, rotæ ſtellatæ AB $5\frac{1}{2}$, numerus dentium 60, numerus fuſorum in rota radiata 20; longitudo cylindri EF 16 pedum, numerus piſtillorum 9.

SCHOLION 1.

987. *Structura molarum chartariarum eadem eſt, quam in corollario primo (§. 984) expoſuimus, niſi quod tudicula* AB *ferro obducta in* B *vectis homodromo* DC *circa baculum* EF *mobilem ad angulos rectos infigantur, a pinnulis axi rotæ molaris infixis in* C *impellendo, & per canalem vel ope antliæ, vel ope hauſtrorum ad rotam molarem applicatorum aqua continuo in linamenta contundenda deduci debeat.* Tab. XI. Fig. 116.

SCHOLION 2.

988. *Cum ſtructura molæ oleariæ prorſus convenit ſtructura trituratoria, quæ anno 1700. Erzæ in ditione Electorali Brunſwicenſi inventa & cum inſigni fructu ad frumenta ſtraminibus ejicienda adhibetur, niſi quod peculiari artificio opus ſit ad flagella dextre applicanda & rota verticularis addatur. Deſcribitur in Miſcellaneis Berolinenſibus* (z).

PROBLEMA 162.

989. *Machinam conſtruere, quæ materiam pulveris pyrii ſine piſtillis conterat.*

RESOLUTIO.

1. Rota dentata AB communem axem cum aquaria habens impellat radiatam CD, ad cujus axem. Tab. XI. Fig. 117.
2. Aptentur duo cylindri plumbei lamina orichalcea obducti aut (quod melius judicatur) marmorei DE, quorum diameter 6, 7 vel 8 pedum, craſſities 6 digitorum.
3. Cylindri, axe HI circumacto, vel in vaſe cylindrico orichalceo, ſi plumbei fuerint; vel ſuper ſaxo mormoreo ad profunditatem duorum digitorum excavato, ſi marmorei fuerint, incedant.

SCHOLION 1.

990. *Ideo ex orichalco aut potius e marmore machina conſtruitur, quia ex hac materia per frictionem nulla ſcintillulæ eliciuntur, unde non ſine ingenti damno in aliis molendinis materia pulveris pyrii ignem concipere ſolet.*

SCHOLION 2.

991. *Cæterum cylindris verticaliter erectis utuntur etiam ad materias alias conterendas.*

PRO-

(z) pag. 325.

PROBLEMA 163.

Tab. XII. Fig. 118. 992. *Molam ſerrariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

In molis ſerrariis duplex motus conſiderandus, quorum altero ſerra reciprocatur, altero vero lignum ad ſerram continuo promovetur. Ad motum ſerrarum producendum

1. Axi rotæ aquariæ, cujus diameter 17 vel 18 pedum, infigatur rota ſtellara AB, cujus diameter ſine dentibus 8 pedum, numerus dentium 72. Hæc
2. Incedat ſuper rota radiata CD 12 vel 8 (pro diverſa vi aquarum) bacillis inſtucta & communem axem habente cum rota verticulari EF, cujus diameter 4 vel 5 pedum.
3. Alteri hujus axis extremo infigatur axis ferreus curvatus G, eique mediante bacillo GH jungatur tendicula lignea IK cum ſerra HL, intra duas pilas ita conſtricta, ut nonniſi ſurſum protrudi ac deorſum trahi poſſit.
4. Ad motum ligni efficiendum conſtruendus eſt currus *abcd*, cujus longitudo longitudini ligni ſecandi proportionata, e. gr. 18 pedibus major, latus vero alterum dentibus inſtructum.
5. Ut ergo lignum uncis ferreis ad currum firmatum ad ſerram continuo promoveatur, axi *gh* infigatur baculus *ik*, cujus alterum extremum *k* inditum eſt annulo ad rendiculam IK firmato: & prope alterum extremum forreps *m* contineat furcam *ml* usque ad dentes rotæ ſerratæ *ln* extenſam, cujus diameter duorum pedum.
6. Porro axi rotæ ſerratæ ferreæ infigenda eſt alia radiata *pq* 6 bacillis inſtructa, qua circumagitur rota ſtellata *rſ* dentes 36 & axem communem cum alia radiata *tv* habens, quæ 6 bacillis inſtructa currum propellit.

SCHOLION.

993. *Dantur & adhuc alii modi currum propellendi, quos repræſentat* Bœcklerus (a). *Nos eum deſcripſimus, quo ordinarie utuntur. Cæterum idem* Bœcklerus (b) *molam ſerrariam manuariam accurate delineat.*

PROBLEMA 164.

Tab. XII. Fig. 116. 994. *Horologium oſcillatorium Hugenianum conſtruere.*

RE-

(x) in Theatro Machinarum f. 60 & ſeqq.

(y) in der Haus- und Feld-Schule Tom. 1. claſſ. 6. p. 512 & 513.

RESOLUTIO.

1. Fiant laminæ AA & BB semipedali longitudine, pollices duos & semis latæ, quibus rotarum præcipuarum axes inserantur.
2. Rota infima CC 80 dentibus incidatur in convexo & eidem axi affigatur orbiculus aculeatus DD. ex quo pondera suspendantur.
3. Rota CC impellat tympanum E dentium octo & una rotam stellatam F dentium 48.
4. Rota F circumagat tympanum G dentium 8 & una rotam coronariam H dentes 48 in plano habentem.
5. Hæc agitet tympanum I dentium 24 & rotam serratam K dentium 15.
6. Supra eam collocetur axis pinnatus LL eique affigatur clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo penduli intra duas laminas cycloidicas duplici filo suspensi virgam ferream cum appenso pondere plumbeo X complexa.
7. A lamina AA quarta digiti parte distet alia YY, in qua describentur circuli horarii ex centro axis rotæ infimæ CC. Interior in 12 horas; exterior in 60 scrupula prima dividatur.
8. Axi rotæ C aptetur rota *bb* tubulo ultra laminam YY continuato cohærens, ita ut una cum axe circumagatur, sine eodem tamen converti possit, ubi e re fuerit.
9. In tubuli prædicti extremo *e* applicetur index horæ spatio circuitum absoluturus atque ita minuta horaria indicaturus.
10. Rota *bb* impellat aliam *gg* 30 itidem dentium, cujus axi cohæreat tympanum sex dentium *d*: quod tandem
11. Convertat rotam dentium 72 indicem horarium minutario breviorem circumferentem.
12. Axi rotæ H affigatur orbis *ll* & in eo circulus in 60 partes æquales divisus describatur, qui per incisum in lamina YY foramen minuta secunda monstret.
13. Longitudinem penduli, ut jam supra notatum est, *Hugenius* (c) inventor experimentis factis deprehendit esse partium trium, quarum una est ad pedem Parisinum ut 864 ad 881 (§. 470).
14. Pondus perpendiculi X trilibre esse debet & ne occursu aëris motus impediatur, optima ejus forma est lenticularis. Ponderis *b*, quo horologium movetur, magnitudo certo definiri ne-

(c) in Horologio oscillatorio f. 7.

nequit, sed per experientiam determinanda. *Hugenius* pondere 6 librarum usus est, diametro orbiculi D unius digiti existente, longitudine autem penduli ea, quam diximus.

15. Cæterum ne motus horologii interrumpatur, dum pondus sursum trahitur; peculiari hoc artificio suspendendum, quod a laudato *Hugenio* repertum. Funis scilicet in se rediens orbiculum D amplectatur & inde descendens altera sui parte trochleam *c* subeat, cui pondus *b* appensum. Hinc super orbiculum D extrinsecus horologio affixum ascendit iterumque ad trochleam alteram F descendit, cui pondus G appensum majus *b* retinens, ne aliter quam orbiculo D revoluto descendat. Hic autem serratis dentibus ita aptatur, ut tracto fune E volvatur, in partem vero contrariam revolvi nequeat.

SCHOLION I.

995. *Horologia hac oscillatoria Hugeniana adeo accurate construi possunt, ut tempus æquale accuratius dimetiantur quam motus solis diurnus inæqualis, ceu in chronologicis ostendetur. Unde in Astronomia, ubi accurata temporis mensura requiritur, ingens eorum est usus. Sane Vir* Cl. Philippus de la Hire (d) *testatur, se sæpius expertum esse, quod intra ostiduum a medio solis motu vel minuto secundo non aberrent.*

SCHOLION 2.

996. *Cum pleraque machinæ ex ligno construi soleant, non incongruum videtur epilogi loco rotarum dentatarum lignearum constructionem edocere.*

PROBLEMA 165.

997. *Rotas dentatas & radiatas ligneas construere.* Tab. XI. Fig. 120. n. 1. 2. 3.

RESOLUTIO.

1. Orbes rotarum, quibus dentes infiguntur, ex diversis partibus componuntur. Si dentes in plano infiguntur, aliæ partes sunt segmenta circuli A, aliæ segmenta annulorum circularium B. Posteriores ita superimponuntur prioribus, ut juncturæ D partium A medio partium B & contra juncturæ C partium B medio partium A respondeant. Foraminibus perforatæ clavis ligneis junguntur. Quot vero partes in uno plano habuerit orbis, tot lignis transversis FF firmantur. Quodsi dentes in convexo infigendi; partes in utroque plano sunt segmenta annularia B.

Rr 2 2. Pe-

(d) in epistola dedicatoria Tabulis Astronomicis præmissa.

2. Peripheria circuli, in qua centra dentium infigendorum existunt, in tot partes æquales divisa, quot dentes rota habere debet, intervallum unum dividitur in 16 partes æquales, quales 7 tribuuntur denti, 9 vero interstitio inter binos relinquuntur, quarum 8 cedunt diametro bacilli. Vel idem dividitur in 7 partes æquales, quarum 3 spisfitudini dentis IK, $3\frac{2}{3}$ spisfitudini seu diametro bacilli tribuuntur.

Tab. XII. Fig. 121. 3. Idem intervallum dividitur in 3 partes æquales & 2 tribuuntur altitudini dentis HG. Sunt & qui HG fere $\frac{1}{4}$ faciunt.

4. Anguli dentium secundum convexitatem arcus prope contactum bacilli terminati resecantur, ut superincessus super bacillo volvens (§. 937) frictionem imminuat (§. 954).

5. Foramina, quibus dentes infiguntur, esse debent quadrata & axiculi ferrei in centris rotarum exacte constituendi, eo meliores, quo minores, quia minorum minor est frictio, eadem de causa imponendi concavo orichalceo aut saltem ligneo, nequaquam ferreo.

6. Rotæ radiatæ duplicem plerumque habent orbem, nisi bacilli exiguæ fuerint longitudinis, & si numerus bacillorum exiguus & resistentia ingens, cylindro ligneo inciduntur: id quod in molis ferrariis fieri consuevit.

SCHOLION 1.

998. *Distantia dentium in rotis, quorum usus in molendinis est, intra spatium 4 & 5 digitorum fere continetur.*

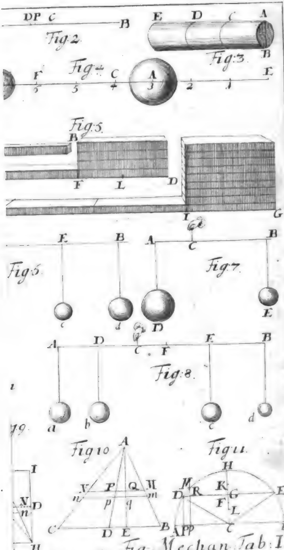
SCHOLION 2.

999. *Rotæ horologiorum metallicæ accuratam inprimis exigunt divisionem, ad quam absolvendam peculiaribus instrumentis opus est* a Leupoldo (c) descriptis.

(c) in Theatro Machinarum generali c. 5. §. 93. 94.

FINIS MECHANICÆ.

ELE-



I. Lit. A. Fig: Mechan: Tab: I.

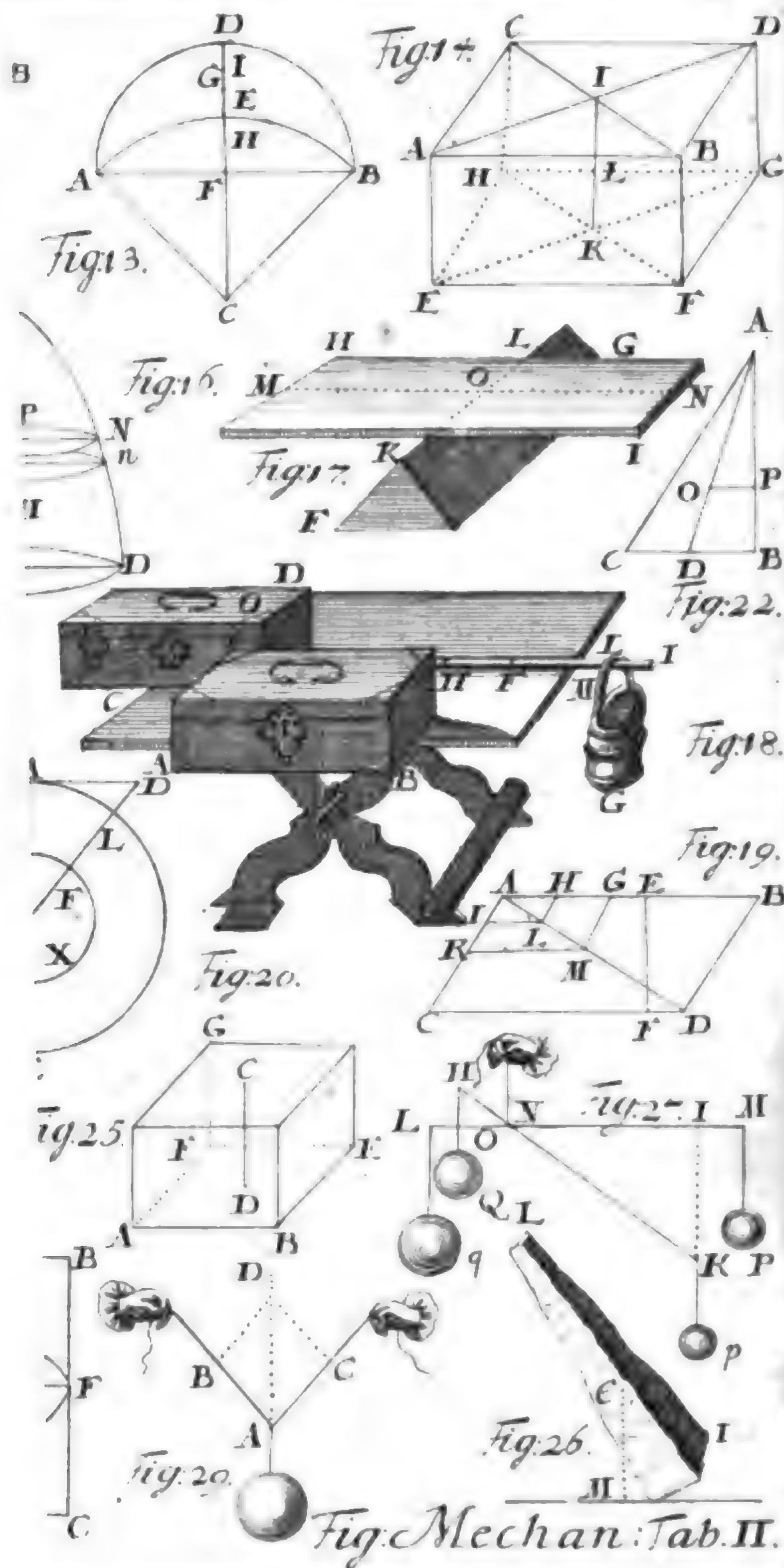


Fig.13.
Fig.14.
Fig.16.
Fig.17.
Fig.18.
Fig.19.
Fig.20.
Fig.22.
Fig.24.
Fig.25.
Fig.26.
Fig.29.
Fig: Mechan: Tab. II.

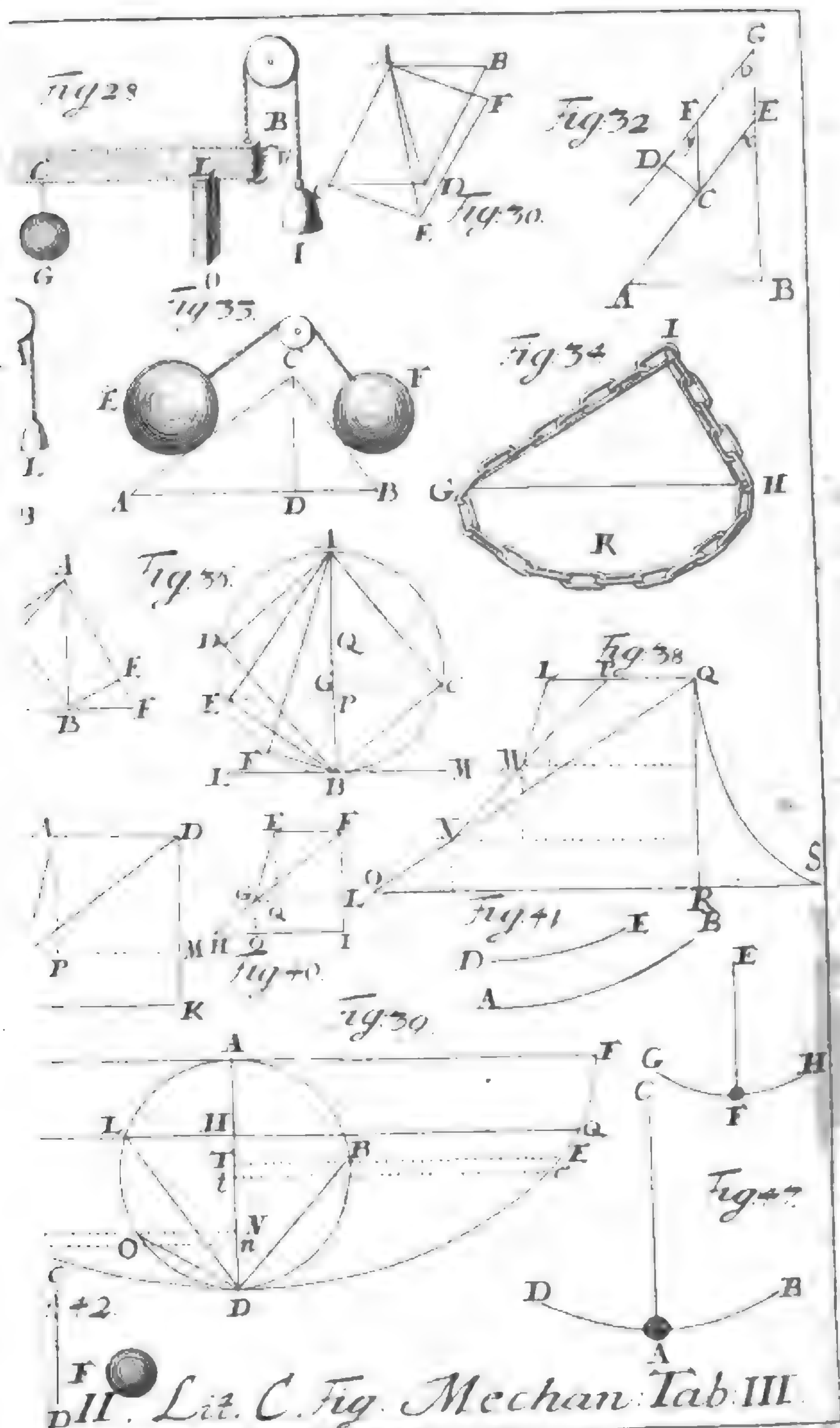


Fig 28
Fig 30
Fig 32
Fig 33
Fig 34
Fig 35
Fig 38
Fig 39
Fig 40
Fig 41
Fig 42
II. Lit. C. Fig. Mechan. Tab. III.

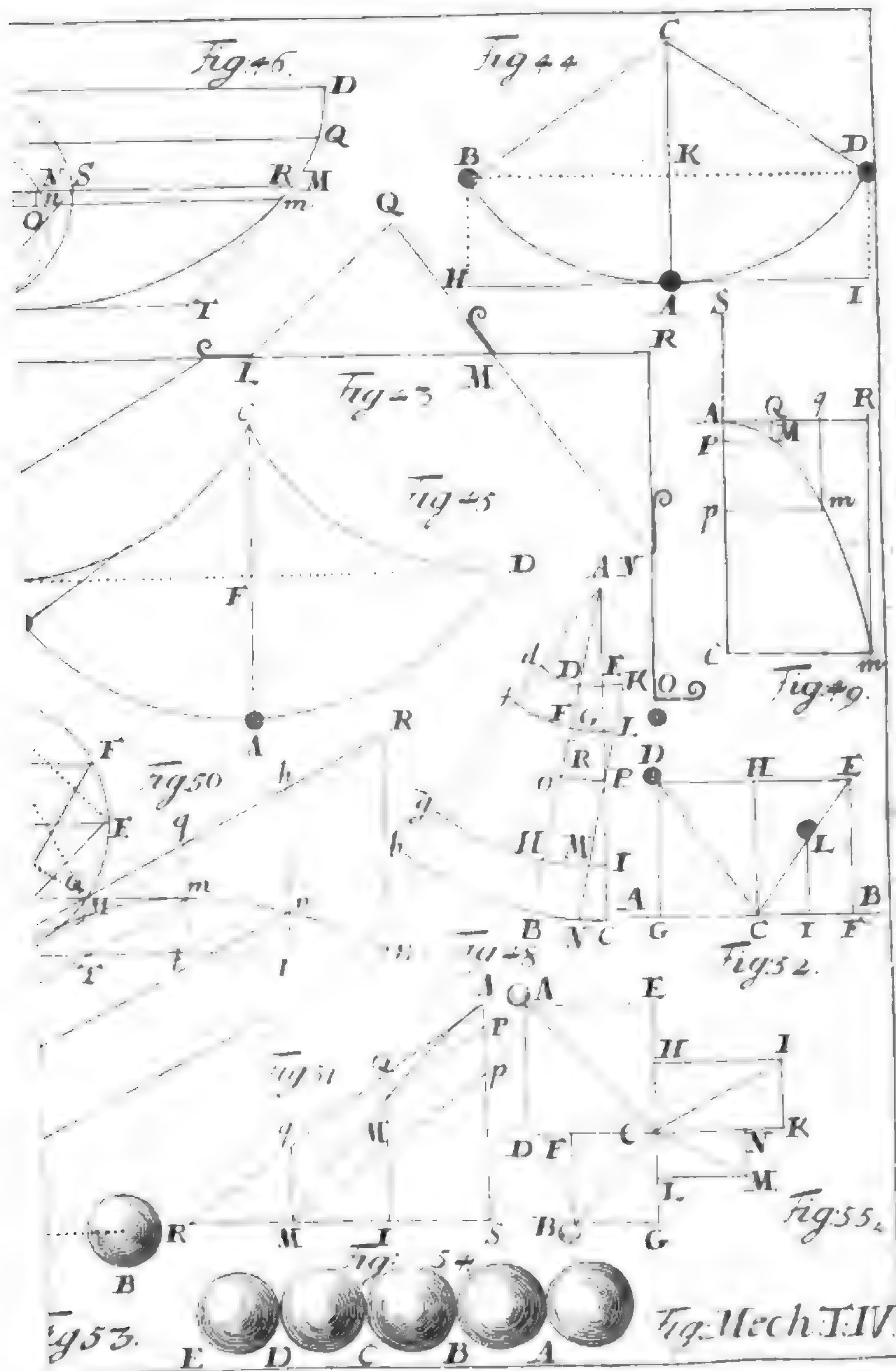


Fig.46.
Fig.44
Fig.43
Fig.45
Fig.49.
Fig.50
Fig.48
Fig.52.
Fig.51
Fig.55.
Fig.54
Fig.53.
Fig: Mech.T.IV.

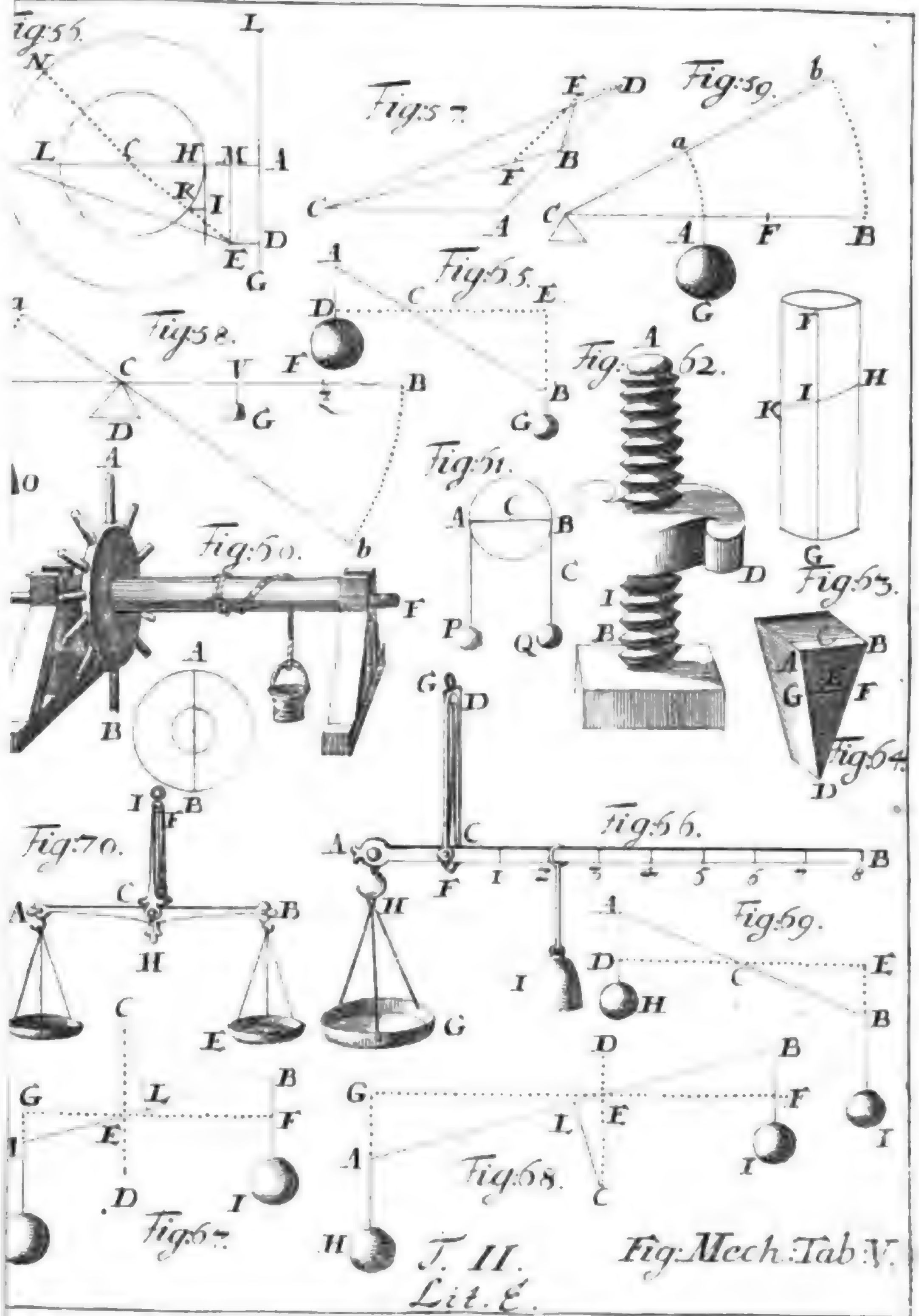


Fig:56.
Fig:57.
Fig:59.
Fig:65.
Fig:58.
Fig:62.
Fig:61.
Fig:60.
Fig:63.
Fig:64.
Fig:70.
Fig:66.
Fig:69.
Fig:68.
Fig:67.
T. II.
Lit. E.
Fig: Mech: Tab. V.

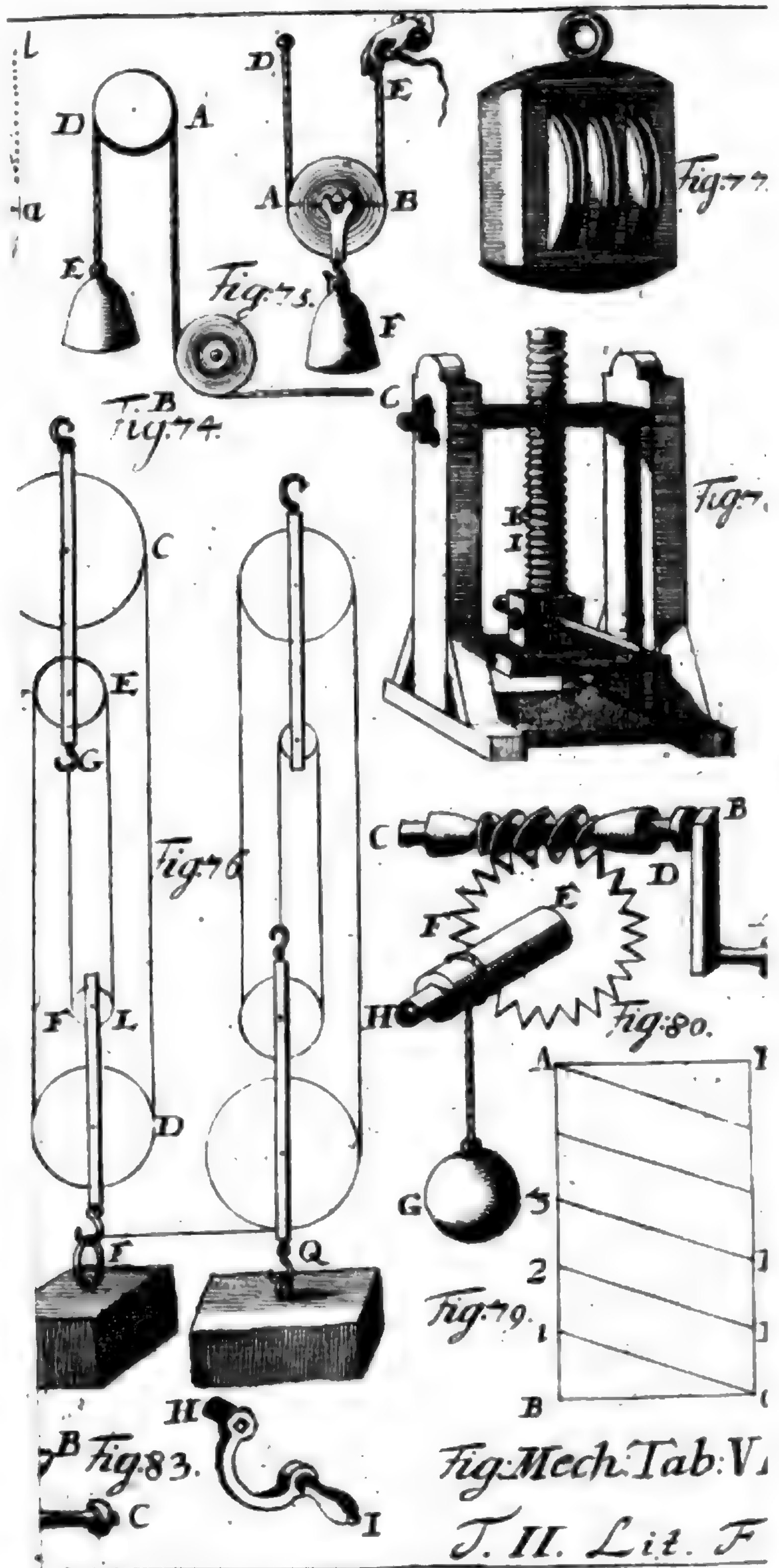


Fig.74.
Fig.75.
Fig.76
Fig.79.
Fig.80.
Fig.83.
Fig:Mech:Tab:V.
T. II. Lit. F

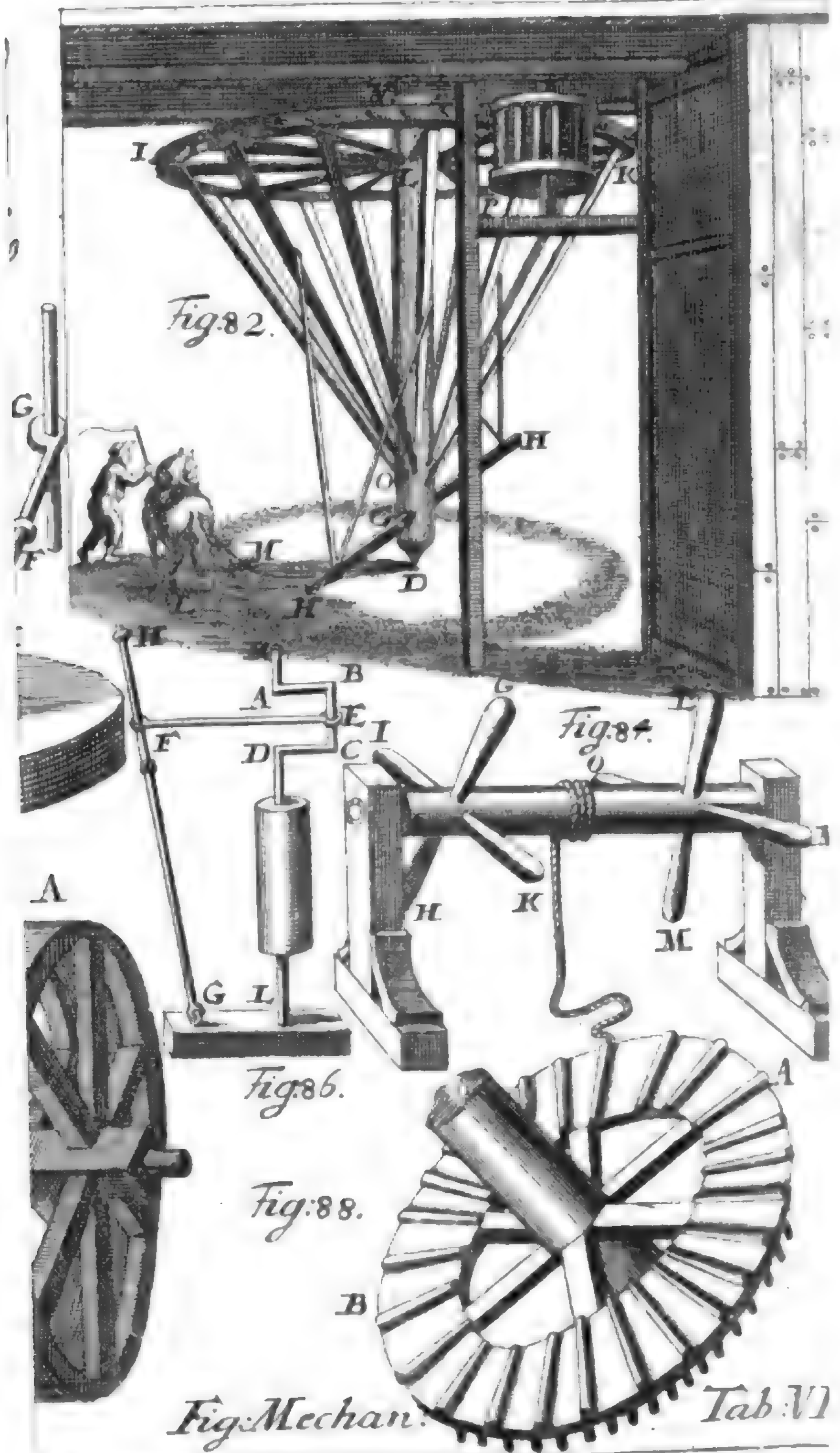


Fig:82.
Fig:84.
Fig:86.
Fig:88.
Fig:Mechan:
Tab:VI

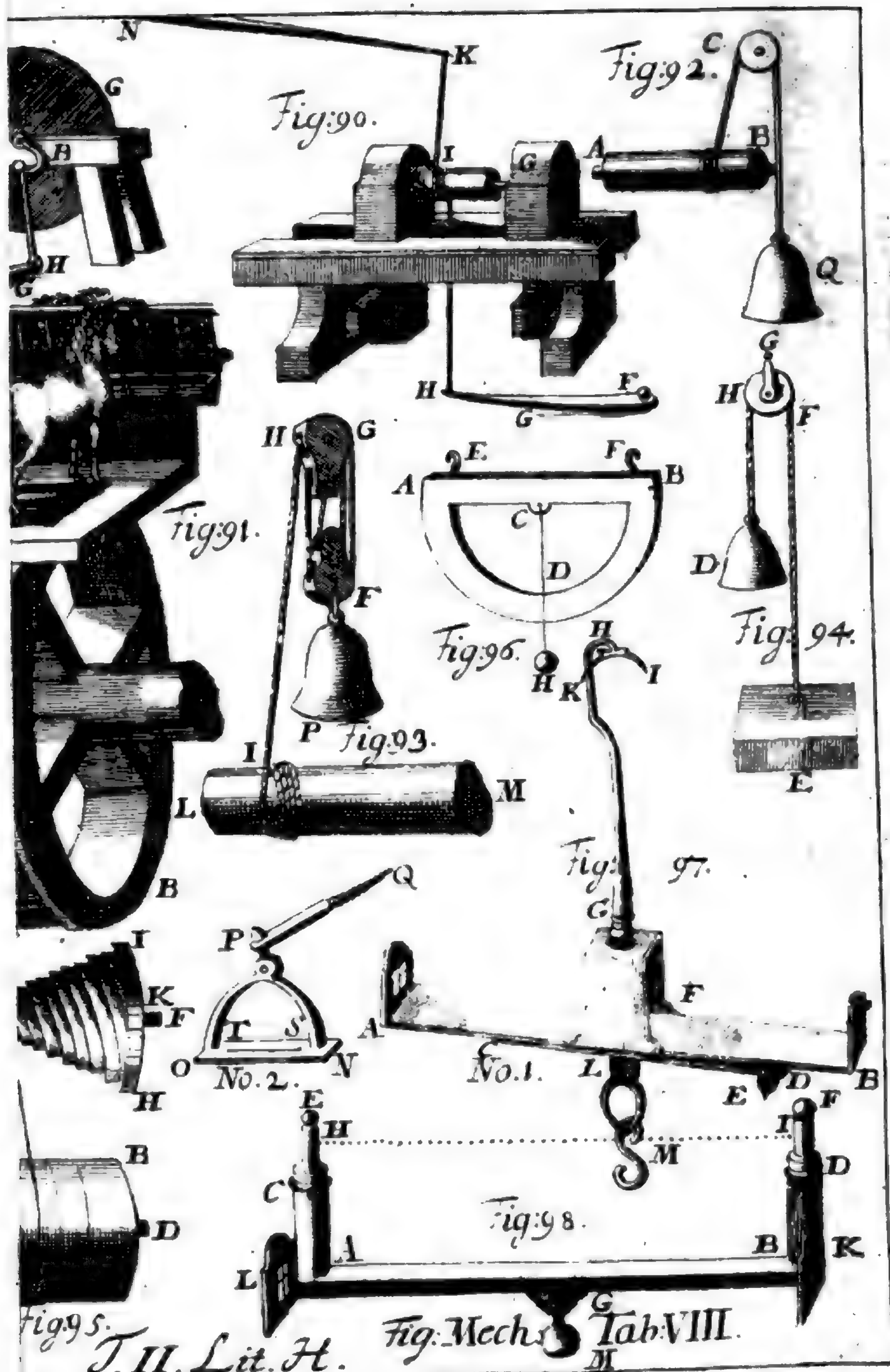


Fig:90.
Fig:92.
Fig:91.
Fig:96.
Fig: 94.
Fig:93.
Fig: 97.
No.2.
No.1.
Fig:98.
Fig:95.
T. II. Lit. H.
Fig: Mech: Tab: VIII.

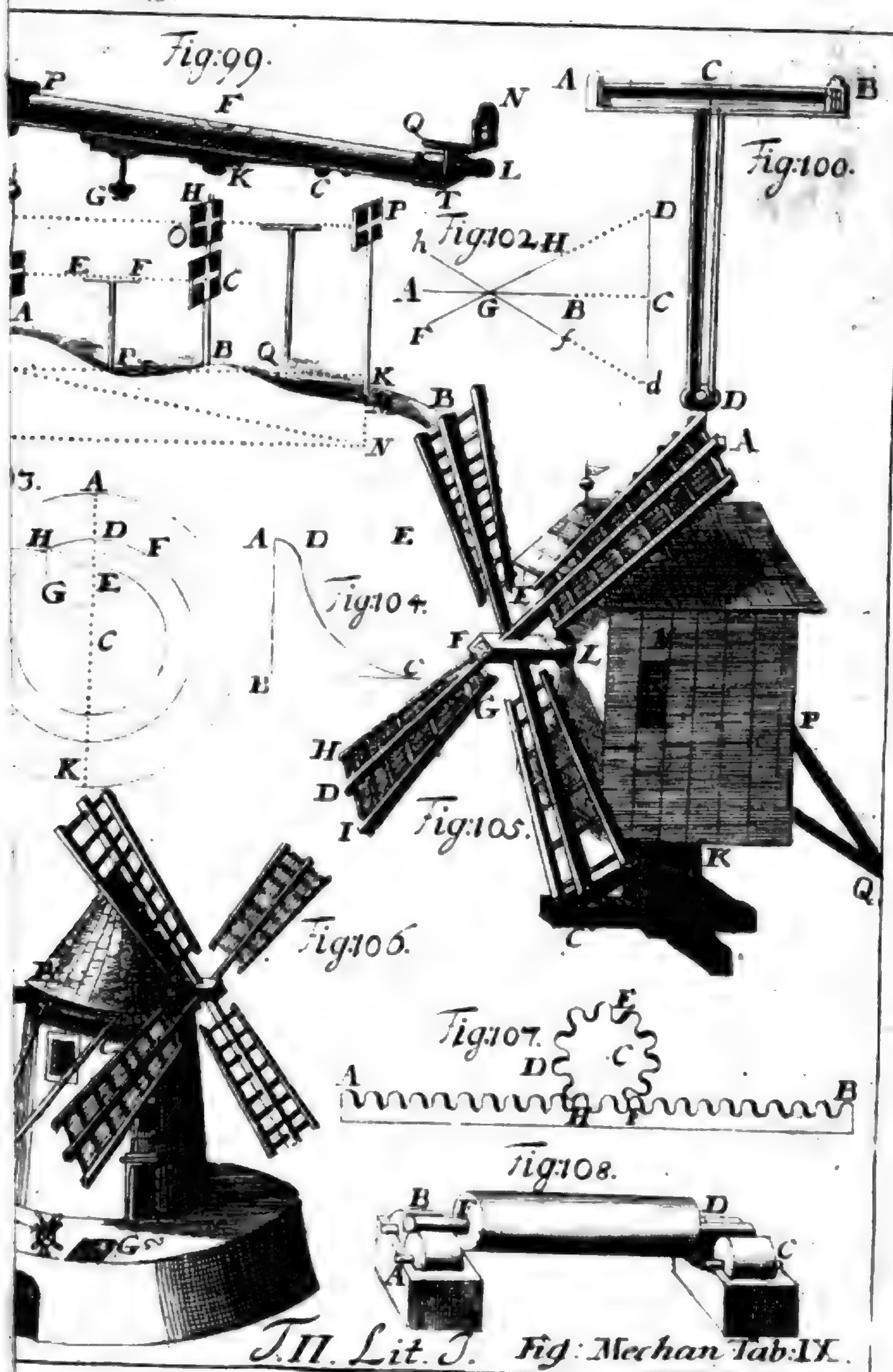


Fig:99.
Fig:100.
Fig:102.
Fig:104.
Fig:105.
Fig:106.
Fig:107.
Fig:108.
T.II. Lit. I. Fig: Mechan Tab:IX.

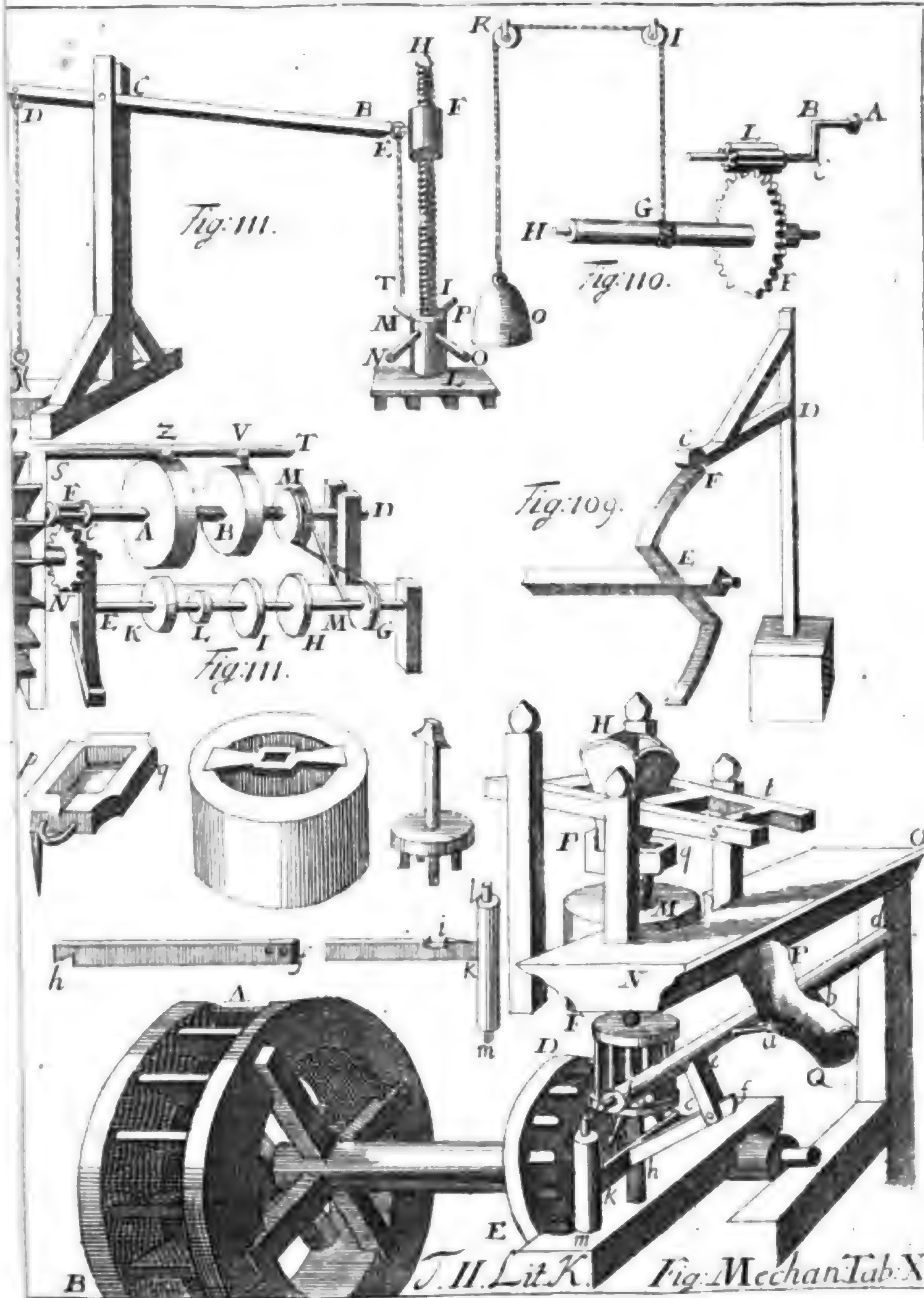


Fig: 111.
Fig: 110.
Fig: 109.
Fig: 111.
T. II. Lit. K.
Fig: Mechan Tab: X

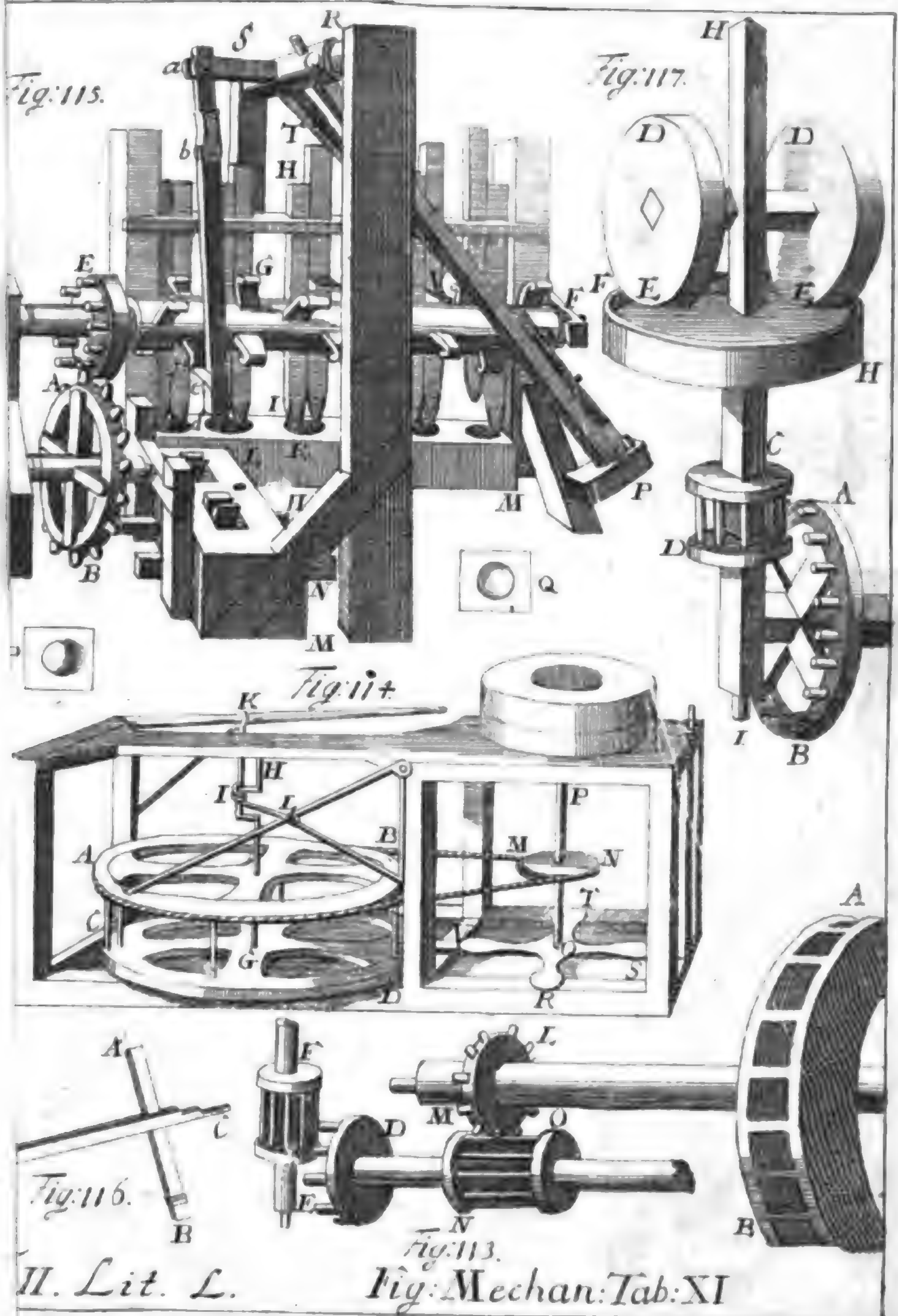


Fig:115.
Fig:117.
Fig:114
Fig:116.
Fig:113.
II. Lit. L.
Fig: Mechan: Tab: XI

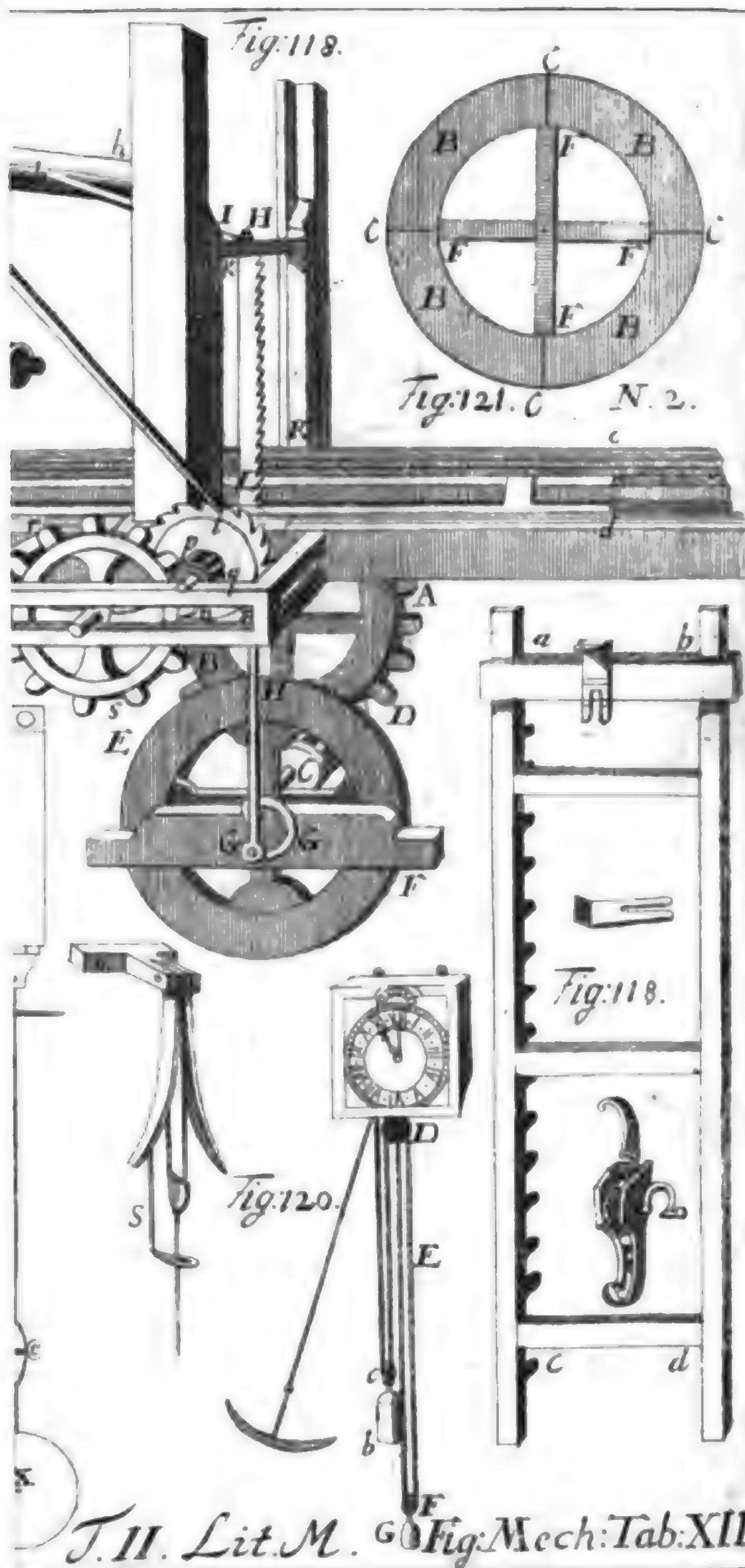
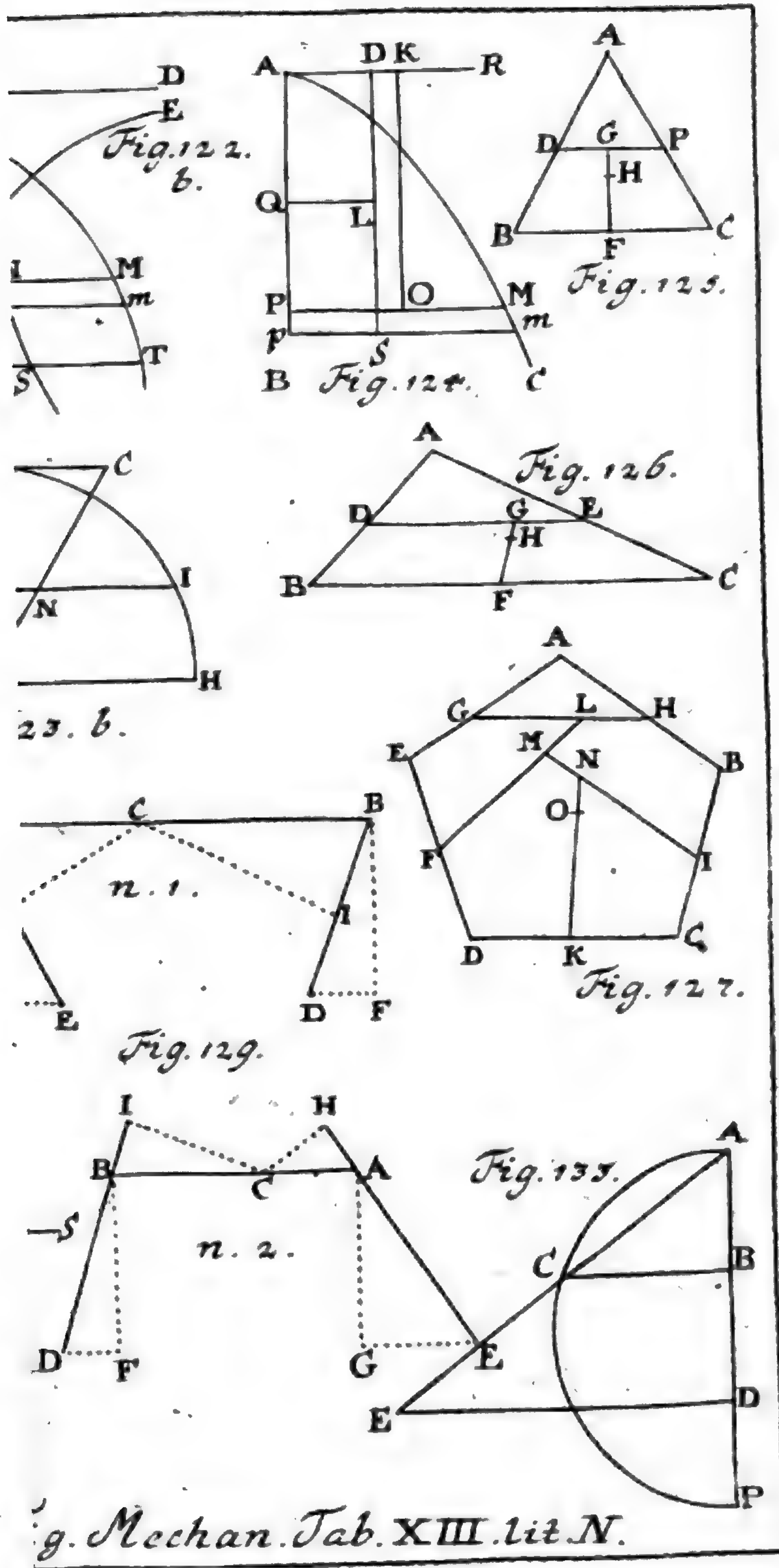
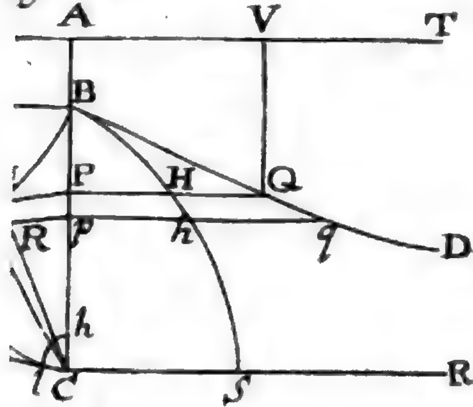
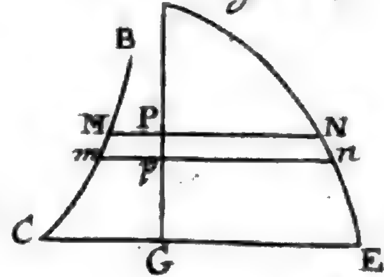


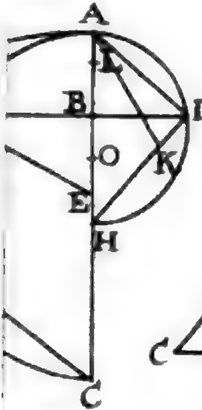
Fig:118.
Fig:121.
N. 2.
Fig:118.
Fig:120.
T. II. Lit. M.
Fig: Mech: Tab: XII

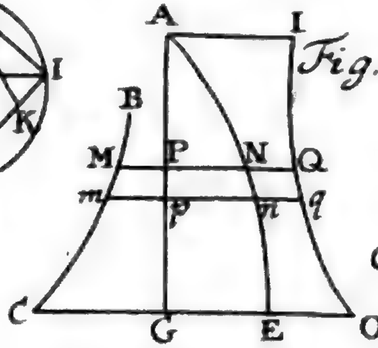


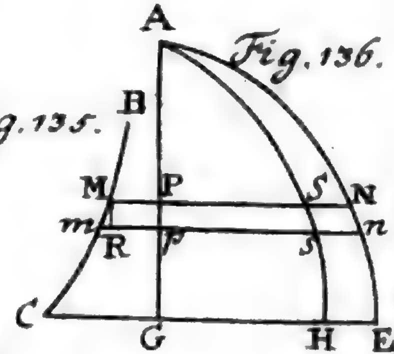
g. Mechan. Tab. XIII. lit. N.

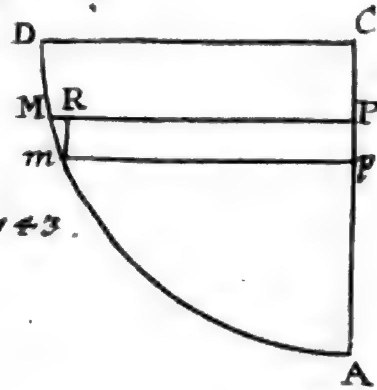


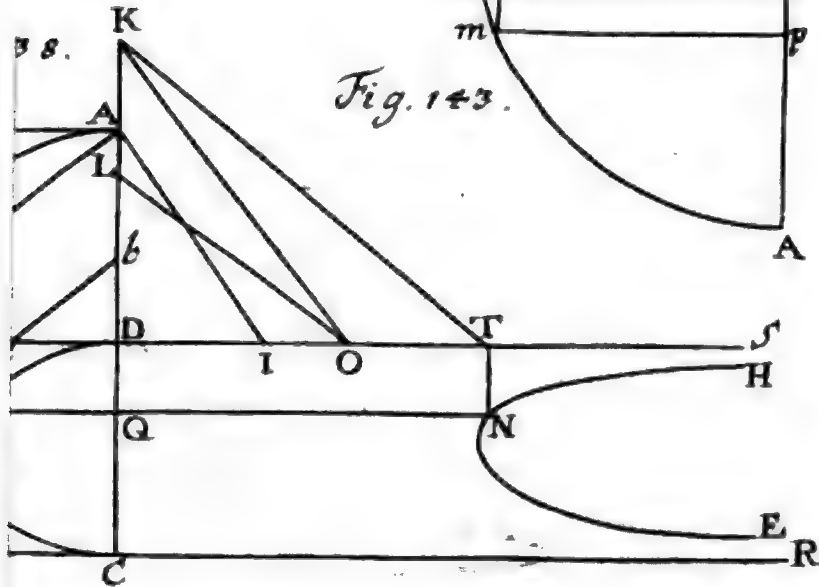




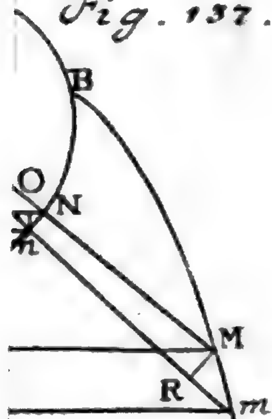


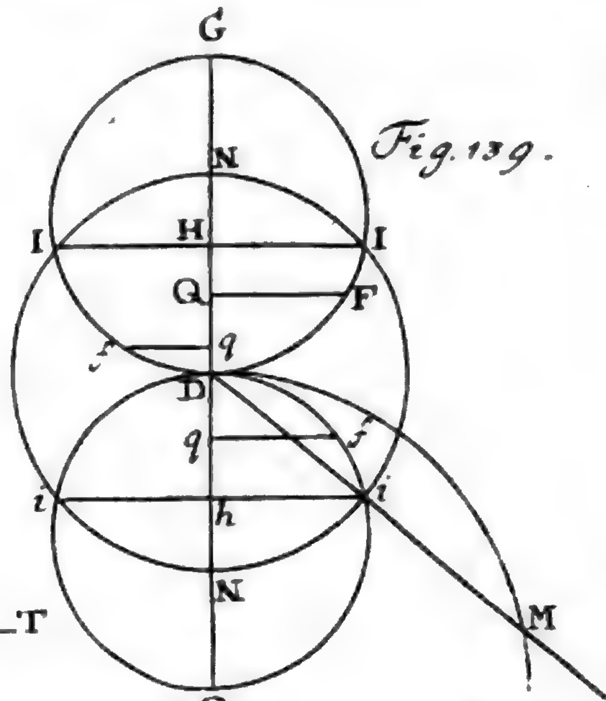


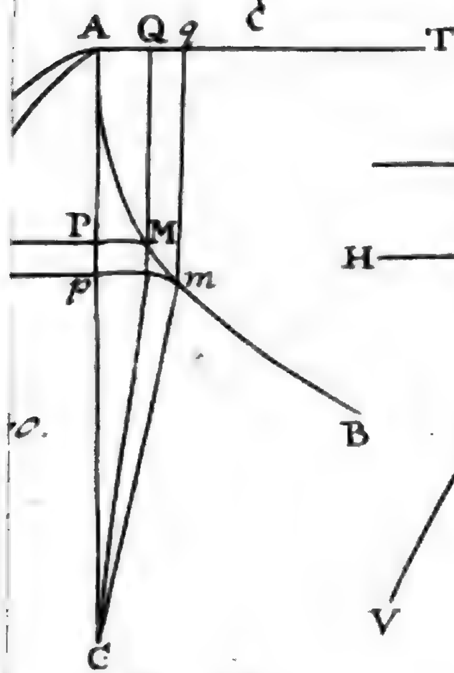


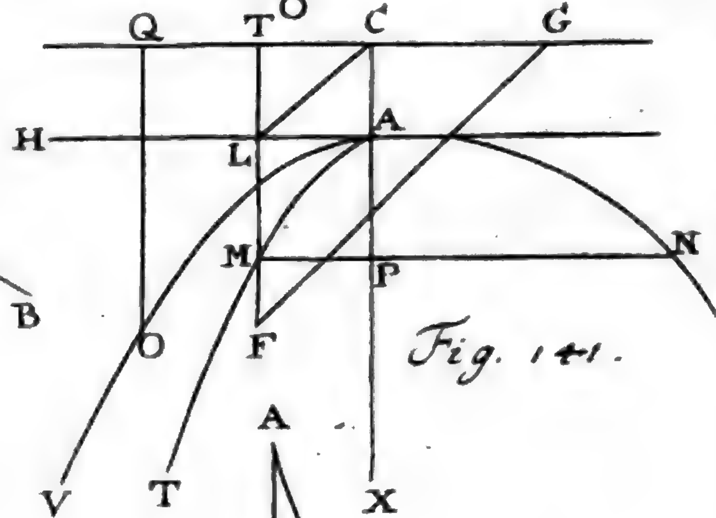


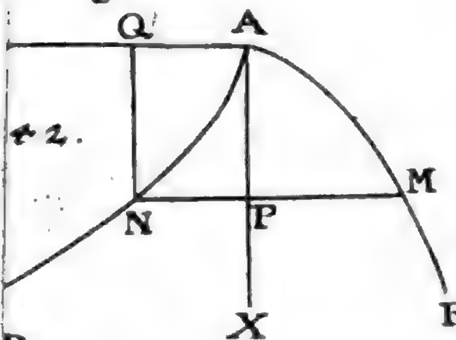
n. Tab. XIV. a. lit. O.











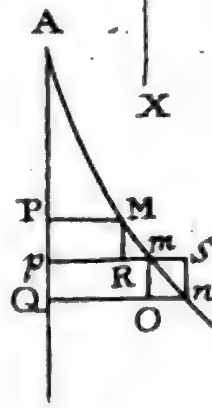


Fig. Mechan. Tab. XIV. b.

Fig. 146.

Fig. 148.

149.

Fig. 150.

n. 1.

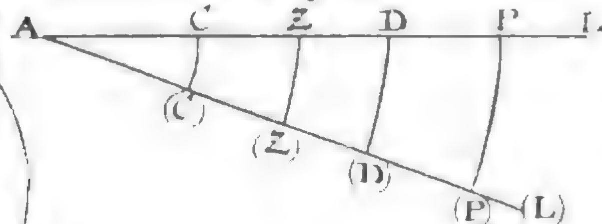
n. 2.

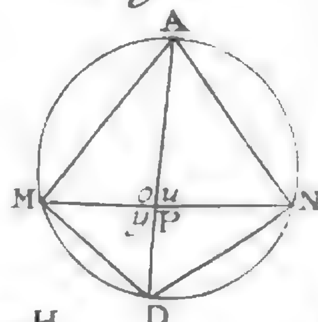
Fig. 151.

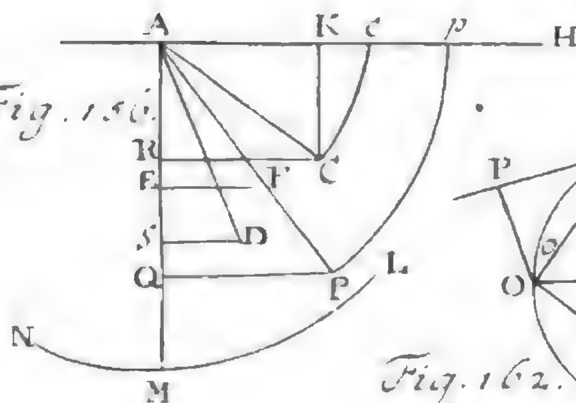
n. 3

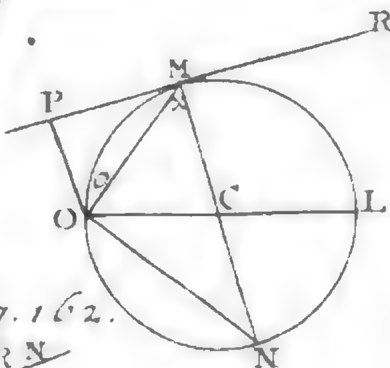
Fig. 153.

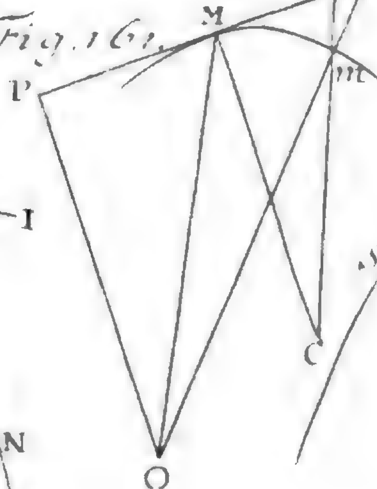
Fig. Mechan. Tab. XV.

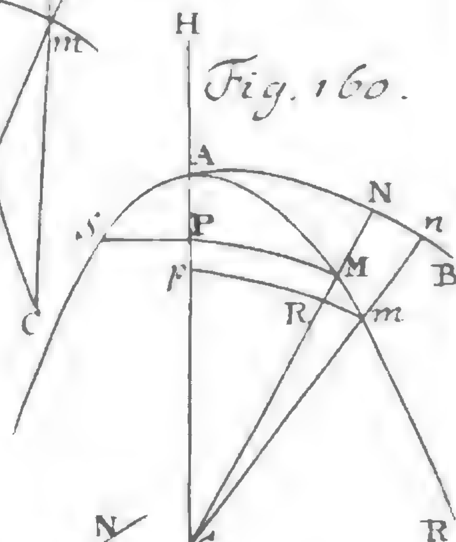


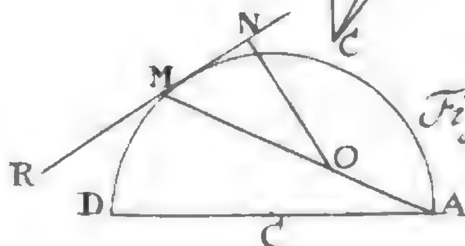




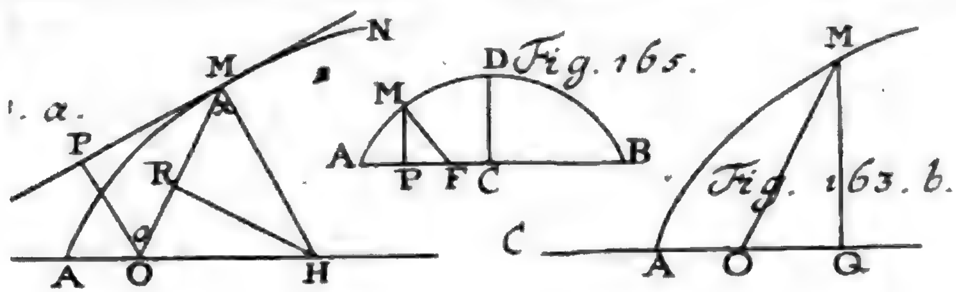


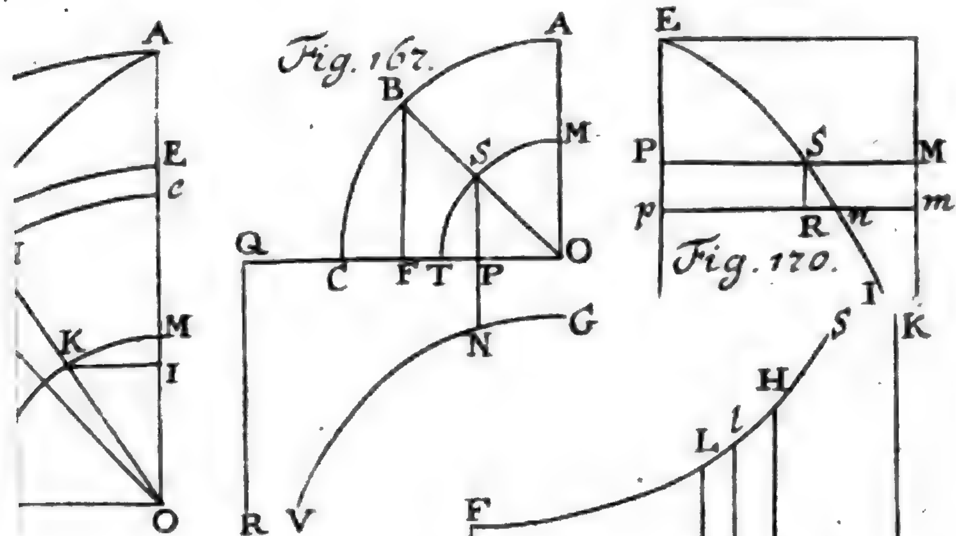


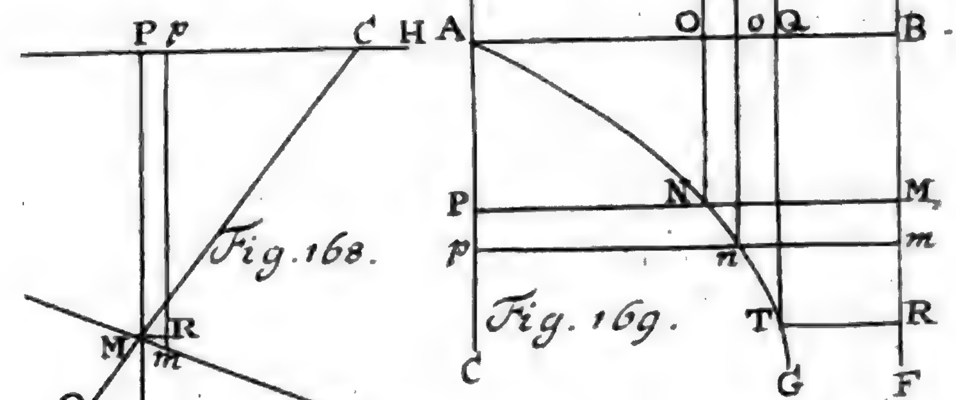




an. Tab. XVI. lit. R.


a.
N
M
P
R
O
A
O
H
D Fig. 165.
M
A
P F C
B
M
Fig. 163. b.
C
A O Q


A
E
c
M
K
I
O
Fig. 167.
A
B
M
S
Q
C F T P
O
N
G
R V
E
P
S
M
p
R
m
Fig. 170.
I
K


P p
C H
Fig. 168.
M
R
m
O
N
A
F
S
H
L
l
O
o
Q
B
P
N
M
p
n
m
Fig. 169.
T
R
C
G
F

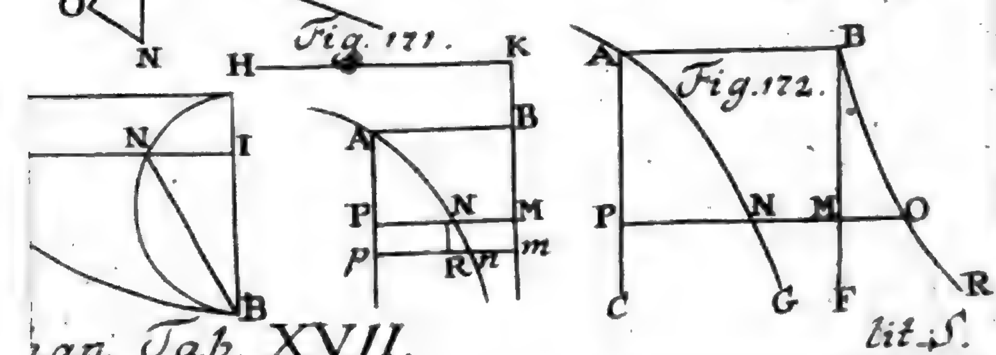
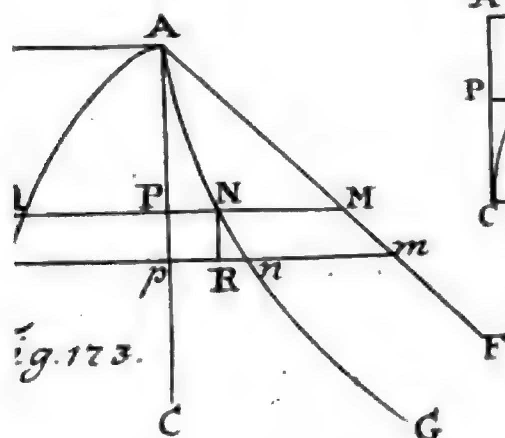


Fig. 171.
H
K
N
I
B
B
A
P
N
M
p
R
n
m
A
B
Fig. 172.
P
N
M
O
C
G
F
R
an. Tab. XVII.
lit. S.



ig. 173.

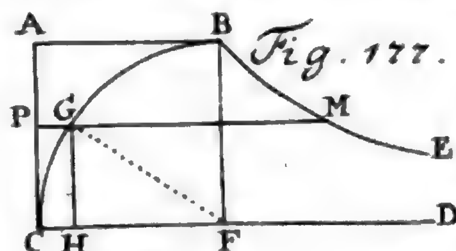


Fig. 177.

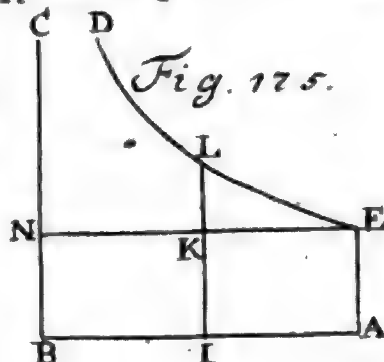
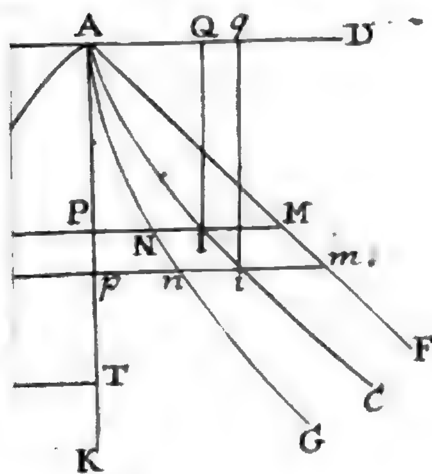
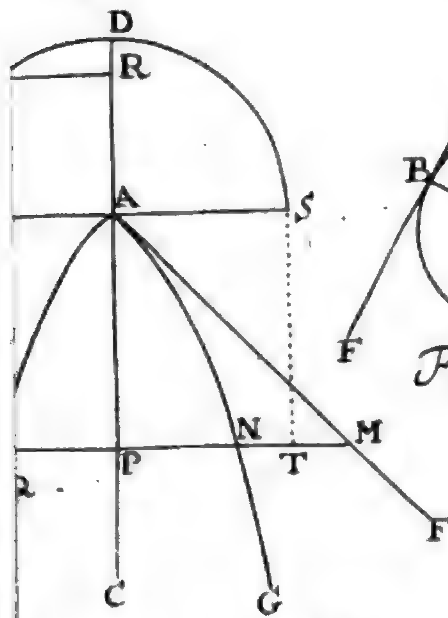


Fig. 175.





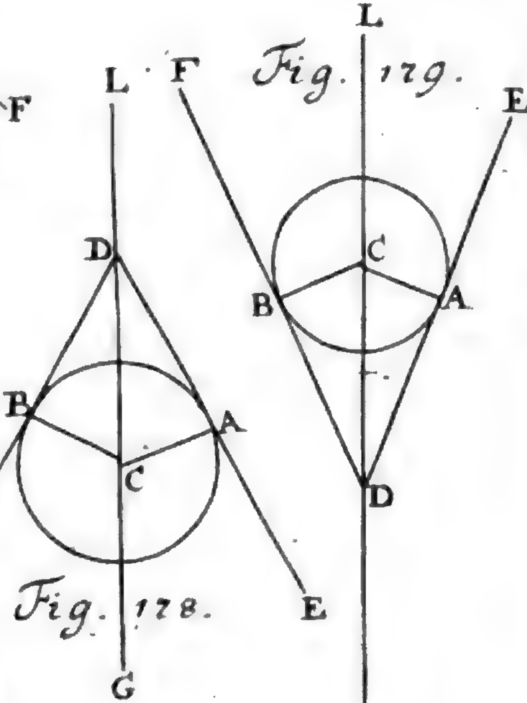


Fig. 178.

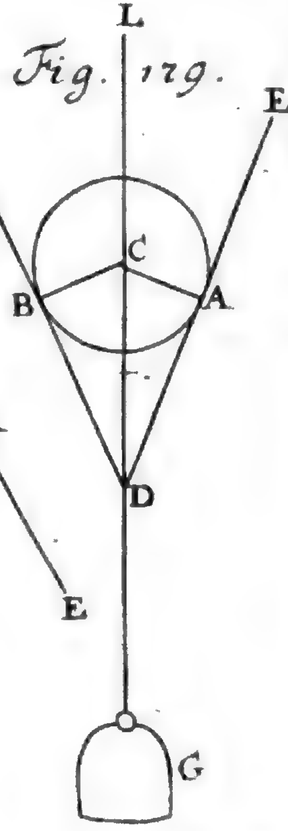


Fig. 179.

an. Tab. XVIII.

lit. T

ELEMENTA
HYDROSTATICÆ.

PRÆFATIO.

Non dubito fore multos, quibus leges hydroſtaticæ paradoxæ videbuntur. Cum enim gravitatem ſibi imaginentur tanquam vim in materia perſiſtentem, quæ mutari nequeat, corpore immutato; fluida vero, quamdiu intra eosdem terminos concluſa quieſcunt, omnis actionis in corpora alia prorſus expertia judicent; rationem ſane non capiunt cur partem gravitatis corpori demerſo veluti adimant, vel etiam totum ingenti ſæpius impetu ſurſum propellant. Enimvero quemadmodum leges hydroſtaticæ admodum evidenter demonſtrantur; ita non minus experientia ſingulæ confirmantur. Hinc diſcant velim, qui in rebus naturalibus cognoſcendis ſenſui ac imaginationi nimium tribuunt, res naturales alias plane eſſe in intellectu, quam in ſenſu: cujus veritatis plenior convictio ab Optica ſperanda. Quodſi hunc ſolum ſui uſum hydroſtatica præberet, digna profecto foret,

foret, quā meditarentur interiora Naturæ contemplaturi: verum enim vero ipſa quoque clavem continet, qua multa abdita reſerantur. Non exiguus eſt phænomenorum numerus, quorum ratio in Hydroſtatica continetur, & quæ nec ſine ea intelligi, nedum comprehendi posſunt. Hydroſtaticæ uſum in examinanda bonitate metallorum, mineralium, aliorumque corporum ſolidorum, inprimis autem fluidorum, in *Medicina hydroſtatica* oſtendit celeberrimus *Boylius*. Varios eosque præclaros in vita humana uſus in ipſa pertractatione pasſim indicavi. Sine ea nec Aerometria intelligi, nec Hydraulica exacte tradi poteſt. Sat ergo rationis apparet, cur Hydroſtaticæ elementa inter elementa Matheſeos præcipium quendam locum ſibi vendicent, & cur digna ſint, quæ ulterius excolantur & ad varios in vita humana uſus applicentur. Agite itaque, quotquot natura melioris ingenii ac animi dotibus ditavit, quam ut de pane lucrando ſolum cogitent, evolvite hæc Hydroſtaticæ elementa, legite, relegite, meditamini, ut genuinam Phyſicæ pertractandæ ideam animo comprehendatis.

ELEMENTA HYDROSTATICÆ.

CAPUT I.

DE CORPORUM SPECIFICA GRAVITATE ET LEVITATE.

DEFINITIO 1.

1.

Hydrostatica est scientia gravitationis in fluido.

SCHOLION.

2. *Docetur nempe in Hydrostatica non modo ratio gravitatis fluidorum, sed & inprimis actio eorum in solida demersa.*

DEFINITIO 2.

3. *Corpus fluidum* est, cujus massulæ quantælibet, sunt inconnexæ, mutua cohæsione a causa quacunque impedita.

DEFINITIO 3.

4. *Corpus solidum* est, cujus massulæ quantælibet sunt connexæ.

DEFINITIO 4.

5. *Corpus specifice levius* est, quod sub eodem volumine minus pondus continet, quam alterum.

DEFINITIO 5.

6. *Corpus specifice gravius* est, quod sub eodem volumine majus pondus continet, quam alterum.

SCHOLION.

7. *Sint duo globi æquales, quorum scilicet diameter unius pedis, alter plumbeus, alter ligneus. Quia plumbeus gravior ligneo; dicetur specifice gravior, ligneus autem specifice levior.*

DEFINITIO 6.

8. *Corpus densius* est quod plus massæ sub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

9. Cum massa sit gravitati proportionalis (§. 112. *Mechan.*); corpus specifice gravius densius est specifice leviori, & corpus densius specifice gravius est rariori (§. 5. 6).

DEFINITIO 7.

10. *Corpus rarius* est, quod minus massæ sub eodem volumine continet, quam alterum.

COROLLARIUM.

11. Quare cum massa sit gravitati

proportionalis (§. 112. *Mechan.*); corpus rarius est specifice levius densiori & specifice levius rarius specifice graviori (§. 5. 6).

AXIOMA 1.

12. *Corpora ejusdem densitatis sub eodem volumine æqualem massam continent.*

COROLLARIUM.

13. Quare si volumina eorundem æqualia fuerint, ejusdem quoque ponderis erunt seu gravitatem eandem habebunt (§. 112. *Mechan.*).

AXIOMA 2.

14. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, densitates sunt ut massæ.*

SCHOLION.

15. *Nempe vi defin.* (§. 8) *corpus dicendum est duplo densius, si duplam massæ sub eodem volumine continet; triplo densius, si triplum, & ita porro.*

COROLLARIUM.

16. Sunt igitur densitates corporum æqualium ut pondera seu ut gravitates (§. 112. *Mechan.*).

THEOREMA 1.

17. *Si duo corpora eandem densitatem habuerint, massæ sunt ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sub eodem enim volumine æqualem massam continent (§. 12), adeoque in volumine duplo continetur massa dupla, in triplo tripla, in quadruplo quadrupla & ita porro. Sunt igitur massæ ut volumina. Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

18. Quoniam etiam gravitates sunt ut massæ (§. 112. *Mechan.*); corporum ejusdem densitatis gravitates sunt in ratione voluminum (§. 167. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

19. Ergo corpora ejusdem densitatis sunt etiam ejusdem gravitatis specificæ & contra (§. 6).

COROLLARIUM 3.

20. Quare corpora diversæ densitatis sunt diversæ gravitatis specificæ & contra.

THEOREMA 2.

21. *Massæ duorum corporum sunt in ratione composita densitatum atque voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint trium corporum massæ a, b, c, volumina primi & secundi d, tertii e, densitas primi f, secundi & tertii g: sint nempe primum & secundum ejusdem voluminis, secundum & tertium ejusdem densitatis. Quoniam

$a:b$

$a : b = f : g$ (§. 14)
$b : c = d : e$ (§. 17.)

erit $ab : bc = fd : ge$ (§. 213. *Arithm.*) consequenter $a : c = fd : ge$ (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

22. Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112. *Mechan.*); eædem etiam sunt in ratione composita densitatum & voluminum (§. 167. *Arithm.*).

THEOREMA 3.

23. *Si duorum corporum massæ vel gravitates fuerint æquales; densitates sunt reciproce ut volumina.*

DEMONSTRATIO.

Sint enim omnia ut in theorematis præcedentis demonstratione, erit $a : c = fd : ge$ (§. 21). Jam $a = c$ *per hypoth.* adeoque $fd = ge$. Est igitur $f : g = e : d$ (§. 299. *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quoniam gravitates sunt ut massæ (§. 112. *Mechan.*). Si massæ æquales sunt, etiam gravitates æquales sunt. Sed si massæ æquales sunt, densitates sunt reciproce ut volumina *per demonstrata.* Ergo etiam, si gravitates æquales sunt, densitates reciproce sunt ut volumina. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

24. *Duorum corporum quorumcunque densitates sunt in ratione composita ex directa massarum & voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione theorematis secundi. erit

$a : c = fd : ge$ (§. 21).

Ergo $age = cfd$ (§. 297. *Arithm.*)

consequenter $f : g = ae : cd$ (§. 299. *Arithm.* *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

25. Quoniam gravitates corporum sunt ut massæ eorundem (§. 112. *Mechan.*); densitates corporum sunt in ratione composita ex directa gravitatum & reciproca voluminum (§. 15. *Arithm.*)

AXIOMA 3.

26. *Si duorum corporum volumina fuerint æqualia, gravitates specificæ sunt ut gravitates absolutæ.*

SCHOLION.

27. *Corpus enim duplo gravius specifice dicitur altero, si duplam gravitatem sub eodem volumine continet; triplo dicitur gravius, si triplam &c.* (§. 6).

COROLLARIUM.

28. Quoniam corporum gravitates

 abso-

absolutæ sunt ut massæ (§. 112. *Mech.*); corporum æqualium gravitates specificæ sunt ut massæ (167. *Arithm.*).

THEOREMA 5.

29. *Corporum ejusdem ponderis gravitates specificæ sunt in ratione voluminum reciproca.*

DEMONSTRATIO.

Sit gravitas communis $= g$, volumen corporis A $= a$, volumen alterius B $= b$. Quoniam B supponitur esse homogeneum; gravitates voluminibus proportionales sunt (§. 130. *Mechan.*) adeoque gravitas ipsius B sub volumine a, reperitur $ag:b$ (§. 301. *Arith.*). Sunt igitur gravitates specificæ corporum A & B ut g ad $ag:b$ (§. 26), hoc est, ut bg ad ag (§. 181. *Arithm.*) consequenter ut b ad a (§. 178. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

30. Quodsi ergo volumina fuerint æqualia, etiam gravitates specificæ æquales erunt, hoc est, corpora ejusdem ponderis & voluminis eandem gravitatem specificam habent.

THEOREMA 6.

31. *Gravitates absolutæ duorum corporum sunt in ratione composita voluminum & gravitatum specificarum (hoc est, gravitatum sub eodem volumine).*

DEMONSTRATIO.

Sint corporum ejusdem voluminis c gravitates absolutæ a & b, specificæ f & g; corporum ejusdem ponderis a volumina c & d, gravitates specificæ f & e. Erit

$$a:b = f:g \text{ (§. 26)}$$
$$f:e = d:c \text{ (§. 29)}.$$

Ergo $af:be = fd:gc$ (§. 213. *Arith.*)
Unde $a:b = d:\frac{gc}{e}$ (§. 185. *Arithm.*)
& $a:b = ed:gc$ (§. 178. *Arithm.*)
Q. e. d.

THEOREMA 7.

32. *Gravitates specificæ duorum corporum sunt in ratione composita ex directa gravitatum absolutarum & reciproca voluminum.*

DEMONSTRATIO.

Sint omnia ut in demonstratione theorematis præcedentis; erit

$$a:b = ed:gc \text{ (§. 31)}.$$

Ergo $\frac{a}{d}:\frac{b}{c} = e:g$ (§. 185. *Arithm.*)
consequenter $ac:bd = e:g$ (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROL-

COROLLARIUM.

33. Quoniam densitates sunt in ratione composita ex directa gravitatum absolutarum & reciproca voluminum (§. 25); erunt etiam gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 167. *Arithm.*).

CAPUT II.
DE
ÆQUILIBRIO ET PRESSIONE FLUIDORUM.

THEOREMA 8.

34. *Si in tubis communicantibus fluidi homogenei eadem altitudo fuerit, fluidum in tubo uno æquiponderat fluido in altero.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 1. I. Si tuborum AB & DC diametri æquales fuerint; columnæ fluidi BE & FD eandem basin & altitudinem habent, adeoque æquales sunt (§. 535. *Geom.*). Quare cum etiam gravitates æquales sint (§. 131. *Mechan.*) fluidum in BE eadem vi premit fluidum in BD, qua idem urgetur a fluido in DF. Fluida ergo in utroque tubo quiescunt & neutrum alterum movet (§. 75. *Mechan.*). *Quod erat unum.*

Fig. 2. II. Quodsi basis tubi GI fuerit quadrupla basis alterius HK & aqua descenderet ex L usque ad O, e. gr. per intervallum unius digiti; in tubo altero NK ascenderet ex M in N per altitudinem 4 digitorum (580. *Geom.*). Quare celeritas, qua moveretur fluidum in tubo HK est ad celeritatem, qua idem moveretur in GI, ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 33. *Mechan.*). Sed quia eadem fluidi in utroque tubo altitudo ipsumque fluidum homogeneum *per hypoth.* massa fluidi in tubo GI est ad massam fluidi in altero HK ut basis tubi GI ad basin alterius HK (§. 573. *Geom.*). Est ergo vis fluidi in tubo LI ad vim fluidi in tubo HK ut factum ex basi tubi GI in basin alterius HK ad factum ex basi tubi HK in basin alterius GI (§. 278. *Mech.*). Quare cum hæc facta æqualia sint (§. 207. *Arithm.*) vires etiam æquales sunt, adeoque neutrum fluidorum alterum movet (§.

 75.

75. *Mechan.*). *Quod erat secundum.*

Fig. 3. III. Si tubus unus SR fuerit ad alterum QR inclinatus, utriusque vero diameter eadem, & QR ad horizontem perpendicularis; gravitas absoluta fluidi in tubo inclinato SR est ad gravitatem respectivam ejusdem, qua nititur juxta directionem plani TR, ut longitudo plani TR ad altitudinem ejus TZ (§. 261. *Mechan.*). Non alia igitur vi urget fluidum in tubo QR, quam quantitas contenta in tubo perpendiculari TZ eandem basin & altitudinem habente cum inclinato TR, consequenter fluido in tubo QR æquiponderat, *per cas.* 1. *Quod erat tertium.*

Fig. 4. IV. Eodem modo ostenditur fluida æquiponderare in tubis inclinatis AB & CD inæqualium diametrorum, si ad eandem altitudinem constituantur. *Quod erat quartum.*

COROLLARIUM.

35. In tubis communicantibus fluidum homogeneum præponderat, cujus major est altitudo.

THEOREMA 9.

36. *In tubis communicantibus quibuscunque fluida diversæ gravitatis specificæ æquiponderant, si altitudines habuerint rationem gravitatum specificarum reciprocam.*

DEMONSTRATIO.

E. gr. Sint tuborum AB & DC diametri æquales & in tubo AB aqua, in tubo DC argentum vivum. Et quia gravitas specifica aquæ est ad gravitatem specificam argenti vivi ut 1 ad 14; sit reciproce altitudo aquæ in tubo AB 14 digitorum, altitudo vero Mercurii in tubo DC digiti unius. Fig. 1.

Quoniam bases cylindrorum aquei & mercurialis æquales sunt *per hypoth.* altitudinum rationem habent (§. 573. *Geom.*), consequenter cum tam aqua, quam mercurius sit fluidum homogeneum, licet inter se heterogenea, gravitates absolutæ eorundem erunt in ratione composita ex directa tam gravitatum specificarum 1 : 4, quam altitudinum EB & DH 4 : 1 (§. 31), hoc est æquales sunt (§. 159. *Arithm.*). Pro mercuriali itaque cylindro substituere licet aqueum, cujus altitudo est altitudinis ipsius quadrupla (§. 15. *Arithm.*). Sed hic alteri aqueo in BA æquiponderat (§. 34). Ergo etiam mercurialis eidem æquiponderat.

Idem non absimili modo ostenditur,

ditur, si tuborum diametri fuerint inæquales & tubi quomodocunque inclinati.

COROLLARIUM I.

37. Inveniri adeo potest fluidorum duorum quorumcunque gravitas specifica, si in tuborum communicantium unum AB infundatur fluidum unum, in alterum vero CD alterum & altitudines EB & FD, ad quas subsistunt æquilibrata, ex eadem mensura accurate æstimentur. Est enim gravitas fluidi in AB ad gravitatem in DC ut DH ad BG (§. 36).

SCHOLION.

38. *Quodsi fluida facile commisceantur, tubum horizontalem BD Mercurio replere debemus, commixtionem impediturì. Etsi autem fluida non facile commisceri soleant, specifice tamen gravius primo loco infundendum, ne concepto impetu ruat in alterum & fluida turbentur.*

COROLLARIUM 2.

39. Quoniam densitates fluidorum sunt ut gravitates specificæ (§. 33); eædem erunt reciproce ut altitudines fluidorum DH & BG in tubis communicantibus æquilibratorum.

COROLLARIUM 3.

40. Eadem ergo methodo, quam *in Cor.* 1. (§. 37) exposuimus, ratio densitatum fluidorum determinatur.

THEOREMA 10.

41. *In vasis perpendicularibus* ABCD & EGFH *æquales bases* BD & GH *habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione altitudinum* AB & EG. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Quoniam vasa sunt perpendicularia, hoc est, bases eorundem in plano horizontali collocatæ, *per hypoth.* fluida adversus fundos nituntur secundum lineas perpendiculares (215. *Mechan.*), adeoque tota gravitate sua, cum nihil resistat. Premuntur adeo fundi in ratione gravitatum. Sed gravitates sunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina sunt ut altitudines (§. 573. *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione altitudinum. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

42. Quodsi ergo etiam altitudines æquales sunt, fundi æqualiter premuntur.

COROLLARIUM 2.

43. In vase igitur perpendiculari æquales partes fundi a fluido homogeneo ad libellam consistente æquali vi premuntur. Altitudines enim fluidi æquales sunt super parte qualibet fundi (§. 36).

COROLLARIUM 3.

44. In uno eodemque vase fluidum ad diversas altitudines successive consti-

-tutum fundum premit in ratione altitudinum, ad quas consistit.

COROLLARIUM 4.

45. Decrescente adeo altitudine, decrescit pressio, suntque hujus decrementa in rationej decrementorum altitudinis.

THEOREMA 11.

Fig. 6. 46. *In vasis perpendicularibus* ABDC & EGHF, *bases* BD & GH *utcunque inæquales habentibus, fundi premuntur a fluido homogeneo in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Ex demonstratione theorematis præcedentis (§. 41) patet, fundos premi in ratione gravitatum. Gravitates vero fluidorum sunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina sunt in ratione composita basium & altitudinum (§. 572. *Geom.*). Ergo fundi premuntur in ratione composita basium & altitudinum (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

Fig. 7. 47. *Si vas inclinatum* ABCD *eandem altitudinem & basin habuerit cum perpendiculari* BEFG, *fundus utriusque æqualiter premitur.*

DEMONSTRATIO.

In vase inclinato ABCD fundus CD premitur secundum directionem BD. Est autem vis gravitatis secundum BD ad gravitatem absolutam ut BE ad BD (§. 261. *Mechan.*). Ergo fundus CD eodem modo premitur, ac si a fluido ad altitudinem BE consistente perpendiculariter premeretur. Fundus igitur vasis perpendicularis BEFG & inclinati ABDC æqualiter premuntur (§. 42). *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

48. *Si bases vasis* ABDC *inæquales fuerint, fundus eodem modo premitur, ac si inferior superiori æquales existeret.* Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

I. Sit basis inferior CD minor superiore AB. Quoniam fluidum fundum CD, quem in plano horizontali supponimus, secundum lineas perpendiculares EC premit (§. 215. *Mechan.*), nonnisi fluidum intra cylindrum ECDF comprehensum adversus eum nititur, reliqua massa contra latera vasis nitente. Eodem ergo modo premitur, ac si basis superior inferiori æqualis esset. *Quod erat unum.*

II. Sit vasis inferior basis CD Fig. 9.
mul-

multo major superiore FG. Nempe ut demonstratio facillor evadat, cylindro ABDC infixus intelligatur tubus FE. Quodsi ponamus fundum CD attolli in L, ut fluidum moveatur per intervallum CL: in tubo FE per altitudinem EM ascendet, quæ est ad CL ut basis CD ad basin GF (§. 580. *Geom.*). Est vero celeritas fluidi in tubo FE ad celeritatem in vase AD ut EM ad CL (§. 33. *Mechan*), consequenter ut basis CD ad basin FG (§. 167. *Arith.*) Vis ergo, qua aqua in tubo deorsum nititur, prodit si basis cylindri CD ducatur in altitudinem FK (§. 280 *Mech.*) Summando scilicet vires elementares æquales ad altitudinem FK applicatas (§. 95. *Analys. in fin.*). consequenter fundus CD eadem vi premitur, qua a cylindro HCDI premeretur (§. 541. *Geom.*). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

50. Vasorum igitur fundi æquales eadem vi premuntur a fluido ad eandem altitudinem consistente, quæcunque sit figura vasis.

SCHOLION 1.

51. *Hinc ratio apparet, cur tanta vi fundus superior dolii* AD *attollatur ab aqua in tubo* CD *plurium pedum contenta. Ipsemet experimentum aliquoties iteravi in vase ligneo* AB *intus pice probe obducto & tubo* CD *ex lamina ferrea stanno obducta parato altitudinis 14 fere pedum, nec 800 libræ basi superiori imposita impedire potuerunt, quo minus attolleretur.* Fig. 10.

SCHOLION 2.

52. *Ab hoc principio derivavi siphonem meum* anatomicum, *ab aliquot jam annis cum amicis communicatum. Fieri scilicet curavi ex lamina ferrea stanno obducta vas cylindricum* DGEF *& eidem afferruminari jussi tubum* FIH. *Quodsi jam vesica, aut ventriculus, aut pellis animantium brutorum, aut alia quæcunque partes membranaceæ corporis animalis inversa basi superiori superinducantur, eas non modo ingenti vi in hemisphæricam figuram expandit, sed & poros subintrans omnes membranas & vasa ita dividit, ut, levi incisura facta, solis digitis multo accuratius separentur, quam cultro anatomico. Jucundum sane est spectaculum, dum non modo substantia membranacea mire intumescit, sed & vasorum per eam dispersorum ramificationes & insertiones minimas distincte spectare tunicasque, quæ vulgo pro una habentur, in plures discerpere licet. Probe autem notandum est, quod si interior vesicæ aut reliquarum partium corporis animalis super vase* DG *expansarum superficies aquam lambat, aqua per substantiam earum penetrare nequeat. Cæterum si vesicæ ingens pondus imponas, ab aqua in tubo* HI *vix duarum librarum attollitur.* Fig. 11.

SCHOLION 3.

53. *Veritatem hujus doctrinæ de pressione fluidorum in ratione basis ac altitudinis exploraturus vas metallicum* Fig. 9.

ACDB *ita construi curet, ut fundus* CD *sit mobilis, annulo coriaceo madefacto apprimendus, dum experimentum capitur, & basi superiori* AB *successive tubi æquealti sed diversarum diametrorum applicari possint. Quodsi enim funiculi per tubum* FE *trajecti alterius extremum annulo* K *basi mobili afferruminati, alterum vero brachio alicujus libra alliges & in lance alteri appensa pondus colloces idque adjectis minoribus tamdiu augeas, donec fundus* CD *attollatur, non modo hinc disces, eodem semper pondere opus esse ad fundum attollendum, quæcunque sit tubi* FE *amplitudo, modo aqua constanter ad eandem altitudinem consistat, sed & pondus æquale deprehendes gravitati cylindri aquei eandem cum vase basin* CD, *sed altitudinem* FK *habentis.*

SCHOLION 4.

54. *Cum iis, quæ de æquilibrio fluidorum demonstrata sunt, non consentire videtur, quod in tubis capillaribus, seu fistulis gracilioribus utrinque patulis unaque sua extremitate sub aquam demersis, aqua ultra libellam assurgat, eo quidem magis, quo minor tubuli diameter. Enimvero facile colligitur, phænomenon hoc alteri cuidam causæ adscribendum esse, licet sine principiis aerometricis definiri nequeat.*

CAPUT III.

DE

GRAVITATIONE CORPORUM SPECIFICE GRAVIORUM IN FLUIDIS LEVIORIBUS.

THEOREMA 14.

55. *Corpus specifice gravius in fluido leviori eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. cubum pollicarem plumbeum F sub aqua demergi. Expelletur adeo ex eo, quem occupat, loco cubus pollicaris aquæ. Sed pondus hujus aquæ a resistentia ambientis sustentabatur. Ergo a resistentia æquæ ambientis tanta quoque ponderis cubi plumbei pars sustentari debet, quantum est pondus aquæ expulsæ. Hac igitur parte gravitas

tas corporis demersi deprehendetur imminuta. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

56. Cum fluidum specifice gravius sub eodem volumine majus pondus possideat, quam levius (§. 6); idem corpus in fluido specifice graviori majorem ponderis sui partem amittit, quam in leviori, adeoque in leviori magis ponderat quam in graviori.

SCHOLION.

57. *Ita globus plumbeus minus ponderat in aqua, quam in spiritu vini.*

COROLLARIUM 2.

58. Gravium igitur homogeneorum æqualium in aëre æquiponderantium æquilibrium tollitur, si unum fluido graviori, alterum leviori immergatur.

COROLLARIUM 3.

59. Cum gravitates specificæ sint ut absolutæ sub eodem volumine (§. 26); & gravitas fluidi solido immerso mole æqualis sit ad gravitatem solidi ut pars ponderis in fluido amissa ad pondus ipsius integrum (§. 55); erit gravitas fluidi specifica ad gravitatem solidi demersi ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 167. *Arithm*).

COROLLARIUM 4.

60. Duo solida mole æqualia idem pondus in eodem fluido amittunt (§. 55). Sed specifice gravioris pondus majus est, quam specifice levioris (§. 6). Ergo majorem sui ponderis partem amittit specifice levius, quam gravius (§. 205. *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

61. Quia corporum pondere æqualium volumina sunt reciproce ut gravitates specificæ (§. 29); specifice levius ejusdem cum graviori ponderis in eodem fluido majus pondus amittit, quam gravius (§. 55). Quare si in uno fluido æquiponderant, in alio non æquiponderabunt, sed specifice gravius præponderabit eo magis, quo fluidum densius.

PROBLEMA 1.

62. *Invenire pondus fluidi cujuscunque, e. gr. vini in dolio contenti.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur volumen fluidi per regulas stereometricas.
2. Cubus plumbeus pollicaris ex crine equino suspensus fluido immergatur & ope bilancis exactæ notetur pondus amissum: quod erit pondus fluidi sub volumine unius digiti cubici (§. 55).
3. Quare cum in fluido homogeneo pondus sit volumini proportionale (§. 130. *Mechan.*); pondus fluidi quæsitum per regulam trium (§. 302. *Arithm.*) invenietur.

E. gr. Sit capacitas dolii 88 pedum cubicorum, pes cubicus vini 68 librarum: erit gravitas vini in integro dolio 88. 68 : 1 = 5984 librarum.

COROLLARIUM.

63. Eodem ergo modo determinari potest pondus unius pedis cubici fluidi cujuscunque & iu usus futuros annotari.

SCHOLION.

65. *Pondus pedis cubici aquæ investigarunt multi; sed cum in diversis fluviis ac fontibus non eadem sit gravitas specifica aquæ, immo nec omni tempore eadem detur in eodem fluvio: mirum non est, observationes diversorum Autorum inter se admodum discrepare.* Morlandus (a) *experimentis sæpius iteratis didicit aquæ pedem cubicum juxta mensuram Parisinam esse 70 librarum cum duabus unciis.*

THEOREMA 15.

65. *Gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in utroque amissa.*

DEMONSRATIO.

Gravitates specificæ sunt ut absolutæ sub eodem volumine (§.26). Sed pondera ab eodem solido in diversis fluidis amissa sunt gravitates absolutæ fluidorum sub eodem volumine (§. 55). Ergo gravitates specificæ fluidorum sunt ut pondera ab eodem solido in iis amissa. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

66. *Invenire gravitatem specificam fluidorum quorumcunque.*

RESOLUTIO.

1. Ex uno brachio libræ suspendatur globus plumbeus & ad alterum appendatur pondus D, quod cum ipso in aëre æquilibrium servet.
2. Globus succesfive immittatur diversis fluidis, quorum specifica gravitas determinanda, noteturque pondus, quod in singulis fluidis demerso æquiponderat.
3. Singula hæc pondera subducantur a pondere D: ita relinquentur partes in quolibet fluido amissæ & una ratio gravitatis specificæ fluidorum constabit (§.65).

COROLLARIUM.

67. Cum densitates sint ut gravitates specificæ (§. 13); eodem modo invenitur ratio densitatis fluidorum.

SCHOLION 1.

68. *Maximi usus est hoc problema, per id enim gradus puritatis ac bonitatis fluidorum investigantur: quod scire non solum in scientia naturali excolenda, sed & in vita civili ac praxi Medica proficuum existit.*

SCHOLION 2.

69. *Quodsi diverso tempore gravitatem specificam fluidorum investiges; hieme majorem, quam æstate deprehendes.* Joan. Casp. Eisenschmidius (b) *experimenta hanc in rem complura exhibet, ex quibus potiora in hanc tabulam referre libet.*

(a) Elevation des Eaux p. 7.
(b) in Disquisitione Nova de ponderibus & mensuris p. 174 & 175.

Tabula gravitatis Liquorum in pondere Parisino.						
Pollex cubicus Paris.	Æstate			Hieme		
	Unc.	Groff.	Gran.	Unc.	Groff.	Gran.
Mercurii	7	1	66	7	2	14
Olei vitrioli	-	7	59	-	7	71
Spiritus vitrioli	-	5	33	-	5	38
Spiritus nitri	-	6	24	-	6	44
Spiritus salis	-	5	49	-	5	55
Aquæ fortis	-	6	23	-	6	35
Aceti	-	5	15	-	5	21
Aceti destillati	-	5	11	-	5	15
Vini Burgundici	-	4	67	-	4	75
Spiritus vini	-	4	32	-	4	42
Cerevisiæ albæ	-	5	1	-	5	9
Cerevisiæ fuscæ	-	5	2	-	5	7
Lactis bubuli	-	5	20	-	5	25
Lactis caprini	-	5	24	-	5	28
Urinæ	-	5	14	-	5	19
Spiritus urinæ	-	5	45	-	5	53
Olei Tartari	-	7	27	-	7	43
Olei olivarum	-	4	53	hieme congelatur.		
Olei terebinthinæ	-	4	39	-	4	46
Aquæ marinæ	-	6	12	-	6	18
Aquæ fluvialis	-	5	10	-	5	13
Aquæ putealis	-	5	11	-	5	14
Aquæ destillatæ	-	5	8	-	5	11

SCHOLION 3.

70. *Ut accuratissime omnia peragantur, gravitas fili extra fluidum constituti subtrahenda est ponderi solidi in aëre, vis vero, qua requiritur, ad filum sub fluido demergendum, si specifice levius, addenda est ponderi amisso. Quodsi vero filum, ex quo pendet solidum, fluido gravius fuerit, integrum pondus fili in aëre subtrahendum est a pondere solidi in aere, & pondus, quod filum amittit, a pondere in fluido amisso. Enimvero quoniam filum cum solido immerso idem totum constituit, hac cautione opus non est, si in omnibus fluidis, quorum gravitates specificas inter se conferre volueris, eandem fili portionem una cum solido immergas. Quia crinis equinus*

eandem fere cum aqua gravitatem specificam habet; experimenta hydrostatica in aqua instituturi ex eodem solida suspendunt.

PROBLEMA 3.

71. *Invenire, utrum partes fluidi inferiores comprimantur a superioribus, nec ne.*

RESOLUTIO.

Exploretur *per probl.* 2. (§. 66), quamnam ponderis sui partem amittat idem solidum in diversis ejusdem fluidi profunditatibus, ita ut ratio habeatur cautionis modo commendatæ (§. 70). Quodsi enim pondus a solido solo in diversis profunditatibus amissum idem fuerit, eadem erit gravitas fluidi specifica in partibus inferioribus, quæ in superioribus (§. 55); consequenter eadem densitas (§. 33). Quodsi vero in profunditate majore pondus majus amittitur, quam in minore; in priore casu gravitas specifica (§. 6), consequenter & densitas (§. 33), major erit quam in altero. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

72. *Tentavit hoc in aqua* Franciscus Tertius de Lanis (c). *Accepto autem vase duorum pedum altitudine cum globum vitreum eidem immitteret, qui pondus aquæ 18 granis excedebat, eundem quoque cum æquipondio 18 granorum perfectissimum facere æquilibrium expertus est. Cum eandem ex crine equino pendulum ad infimam aquæ profunditatem descendere permitteret, ponderi ejus dimidium insuper granum decedere observavit: quod tamen decrementum quia in crinem equinum aquæ nunc totum immersum conjici debet, quippe extra aquam grani semissi æquiponderantem, aquæ partes inferiores a superioribus nullam pati compressionem agnovit. Non inutile foret idem experimentum in profunditatibus majoribus instituere.*

PROBLEMA 4.

73. *Determinare rationem, quam habet gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi quod fluido specifice gravius existit.*

RESOLUTIO.

Ponderetur massa quantalibet solidi in fluido & notetur accurate pondus in eodem amissum, non neglecta cautione (§. 70) commendata: erit enim gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi in ipso demersi, ut pars ponderis a solido amissa ad pondus ejus integrum (§. 59). *Q. e. d.*

SCHOLION.

74. *Si fluidum specifice gravius solido, proposito satisfiet per ea, quæ in capite subsequente traduntur.*

THE-

(c) in Magisterio Naturæ & Artis Tom. 3. lib. 25. c. 1. exper. 7. f. 492.

THEOREMA 16.

75. *Corporum pondere æqualium gravitates specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido amissæ.*

DEMONSTRATIO.

Gravitates specificæ corporum pondere æqualium sunt reciproce ut volumina (§. 29.). Quare cum partes ponderis in eodem fluido amissæ voluminum rationem habeant (§. 18); gravitates corporum specificæ sunt reciproce ut partes ponderis in eodem fluido ab iis amissæ. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

76. Invenitur adeo ratio, quam habent gravitates specificæ solidorum, si massæ in aëre æquiponderantes in eodem fluido ponderentur & pondera a singulis amissa notentur.

SCHOLION.

77. *Gravitatem specificam plurimorum corporum solidorum investigarunt multi. Inprimis prolixæ sunt tabulæ, quæ in hanc rem exhibeatur in Transactionibus Anglicanis* (d). *Variorum quoque corporum, præsertim metallorum, gravitatem specificam, jam ante dedit* Marinus Gheraldus (e) *&* *ex eo* Guilielmus Oughtredus (f): *dederunt postea alii. Nobis suffecerit annotasse metallorum & aliorum quorundam corporum gravitatem specificam a* Petito *multa solertia investigatam, prout eam exhibuit* Mersennus (g) *& ex ipso postea alii. Nempe si fuerit gravitas*

Auri librarum 100

erit sub eodem volumine gravitas

Mercurii	lib. $71\frac{1}{2}$	Stanni puri	$38\frac{1}{4}$
Plumbi	$60\frac{1}{2}$	Magnetis	26
Argenti	$54\frac{1}{2}$	Marmoris	21
Cupri	$47\frac{1}{3}$	Lapidis	14
Æris cyprii	45	Sulphuris	$12\frac{1}{2}$
Ferri	42	Ceræ	5
Stanni communis	39	Aquæ	$5\frac{1}{3}$

PROBLEMA 5.

78. *Data gravitate fluidi, invenire gravitatem solidi mole ipsi æqualis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur ratio gravitatis specificæ fluidi ac solidi (§. 73).
2. Hac data per regulam trium invenietur gravitas solidi sub volumine æquali.

E. gr. Quæritur gravitas plumbi sub eodem volumine cum aqua 200 librarum. Quia gravitas specifica aquæ ad gravitatem

(d) n. 169. p. 926. & seqq. it. n. 199. p. 994. conf. Epitome Transact. Angl. Cl. Lowthorpii vol. 1. cap. 6. p. 613. & seqq.
(e) in Archimede promoto.
(f) in Opusculis Mathematicis p. 61.
(g) in Phænomenis Hydraulicis cor. prop. 47. Cogitatorum Physico-Mathem. p. 192.

rem plumbi ut ut $5\frac{1}{3}$ ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 32 ad 363 (§. 178. *Arithm.*); reperitur gravitas plumbi 363. 200 : 32 = $2268\frac{3}{4}$ librarum.

COROLLARIUM.

79. Eodem modo invenitur data gravitate solidi unius gravitas alterius, si ratio gravitatis specificæ investigetur (§. 76). E. gr. quæritur gravitas stanni cum plumbo 30 librarum sub eodem volumine. Quia gravitas stanni ad gravitatem plumbi ut 39 ad $60\frac{1}{2}$ (§. 77), hoc est, ut 78 ad 121 (§. 178. *Arithm.*); reperietur gravitas stanni quæsita $19\frac{41}{121}$ librarum.

PROBLEMA 6.

80. *Dato corporis solidi volumine, invenire volumen solidi alterius pondere æqualis.*

RESOLUTIO.

Cum volumina corporum pondere æqualium sint reciproce ut gravitates specificæ (§. 29); problema præsens eodem modo resolvitur, quo præcedens.

E. gr. Quæritur volumen ferri decem pedibus cubicis marmoris æquiponderantis. Quia marmor ad ferrum ut 21 ad 42, hoc est, ut 1 ad 2; volumen marmoris erit 20 pedum cubicorum.

PROBLEMA 7.

81. *Dato pondere corporis ex duobus miscibilibus compositi una cum pondere, quod in fluido aliquo amittit, invenire pondera miscibilium sigillatim.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur (§. 66), quantum ponderis in dato fluido massa quædam determinata utriusque miscibilis amittat.
2. Hinc per regulam trium porro eruatur, quantum ponderis in eodem amittere debeat utriusque massa, si pondere æqualis fuerit mixto.
3. Decrementum minus subtrahatur e majori, ut constet excessus, quo pondus a specifice leviori amissum superat pondus a graviori amissum.
4. Porro pondus a specifice graviori amissum subtrahatur a decremento ponderis corporis mixti, ut conster excessus, quo pondus a mixto amissum superat pondus a graviori amissum.
5. Quodsi ad excessum primum, excessum alterum & pondus mixti quæratur numerus quartus proportionalis; erit is pondus miscibilis specifice levioris: quod
6. a pondere mixti subductum relinquit pondus massæ specifice gravioris.

E. gr. Massa 120 librarum ex stanno & plum-

plumbo commixtis composita in aqua 14 libras amittit: quæruntur pondera stanni & plumbi sigillatim. Quoniam experimentando reperitur, stannum 37 librarum in aqua amittere pondus 5 librarum, plumbum vero librarum 23 amittere 2; calculum ita inibis:

$$37 - 5 - 120$$
$$\frac{5}{\frac{600}{37}\text{ lib.}}$$

$$23 - 2 - 120$$
$$\frac{2}{\frac{240}{23}\text{ lib.}}$$

$$\frac{600}{37} - \frac{240}{23} = \frac{13800 - 8880}{851} = \frac{4920}{851}$$

$$14 - \frac{240}{23} = \frac{11914 - 8880}{851} = \frac{3034}{851}$$

$$4920 - 3034 - 120$$

41 1 (120
~~18~~
~~3~~0.~~34~~ (74 lib. Pondus specif. lev.
~~4~~ ~~11~~ (120 Pondus mixti
~~4~~

46 Pondus specifice gravioris.

DEMONSTRATIO.

Sit pondus mixti integrum $= p$, quod in fluido amittit $= a$, pondus amissum a specifice graviori ejusdem cum mixto ponderis $= b$, amissum a specifice leviori ejusdem itidem cum mixto ponderis $= c$, pondus specifice levioris quod mixtum ingreditur $= x$, erit pondus specifice gravioris quod mixtum ingreditur $= p - x$, pondus a miscibili x in fluido amissum $= cx : p$, amissum a miscibili $p - x = (bp - bx) : p$. Ergo

$$(bp - bx + cx) : p = a$$

$$cx - bx = (a - b)\,p$$

$$x = (a - b)\,p : (c - b). \text{ Q.e.d.}$$

SCHOLION.

82. *Eodem modo solvi potest problema ab* Hierone *Rege Syracusarum olim* Archimedi *propositum, quantum scilicet argenti corona aurea admiscuerit dolosus artifex* (h).

PROBLEMA 8.

83. *Determinare bonitatem massarum massasque adulteratas distinguere a genuinis.*

RESOLUTIO.

Præsupponendum hic est, bonitatem massæ æstimari ex ratione ipsius ad volumen, e. gr. frumentum eo melius, quo gravitas specifica major. Quare non alia re opus est, quam ut investigetur decremeutum ponderis in aqua.

Quodsi eodem mediante gravitatis specificæ massarum ratio ad flui-

(h) Vid. Vitruvius lib. 9. c. 3. f. 273.

fluidum aliquod determinetur (§. 73); masſæ adulteratæ facile dignoſcuntur, ſi facta ponderatione in eodem fluido, diverſa ab hac gravitatis ſpecificæ ratio reperitur (§. *cit.*).

SCHOLION 1.

84. *Cum aqua non ſemper ejusdem ſit gravitatis ſpecifica, diverſitas prius per ponderationem ejusdem ſolidi in eadem detegenda.*

SCHOLION 2.

85. *Notandum praterea, fieri nonnunquam poſſe, ut hydroſtaticum examen ſolum adulterationem factam non prodat.* E. gr. *Cum ſtannum argento ſit ſpecifice levius, plumbum ſpecifice gravius, duo hac metalla (quod inferius expresſius docetur) ita miſceri posſunt, ut eandem cum argento gravitatem ſpecificam nanciſcantur: qua maſſa poſtmodum cum argento permixta examen hydroſtaticum non verebitur. Unde apparet, quantitatem trium vel plurium miſcibilium in uno mixto non eodem modo determinari, quo quantitas duorum invenitur* (§. 81).

SCHOLION 3.

86. *Notandum denique, per varia experimenta addiſcendam eſſe diverſitatem, qua in gravitate ſpecifica corporum ejusdem ſpeciei ad idem fluidum occurrere poteſt, antequam de adulteratione facta judicium feratur.*

PROBLEMA 9.

87. *Fluidum ſpecifice gravius ponderare in ſpecifice leviori.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Mercurius in aqua ponderandus.

1. Asſumatur vas vitreum v. gr. gravitatis 91, quod aqua plenum intra aquam ponderetur, noteturque pondus amisſum 36: quod erit pondus aquæ ejusdem cum vitri maſſa voluminis.
2. Idem vas argento vivo repletum in aëre ponderetur, noteturque pondus 186.
3. Ponderetur etiam in aqua, ut habeatur pondus amiſſum 43: quod erit æquale ponderi aquæ ejusdem cum vitro & Mercurio ſimul ſumto voluminis.
4. Quare ſi pondus aquæ ejusdem cum vitro voluminis 36 inde ſubtrahatur; relinquetur pondus aquæ ejusdem cum argento vivo voluminis, hoc eſt, pondus ab argento vivo in aqua amisſum 7.

THEOREMA 17.

88. *Corpus ſpecifice gravius in fluido ſpecifice leviori ea vi deſcendit, quæ eſt excesſui ponderis ejusdem ſupra pondus fluidi ſub eodem volumine æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Corpus in fluido nonniſi ea vi de-

descendit, quæ ipsi relinquitur, demta parte in resistentiam fluidi vincendam impensa. Quamobrem cum hæc æqualis sit ponderi fluidi sub eodem volumine (§. 55); nonnisi excessu ponderis sui supra pondus fluidi sub eodem volumine descendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

89. Quoniam vis ad sustentandum corpus in fluido requisita æqualis est vi, qua nititur deorsum in eodem; Vis, quæ corpus specifice gravius in fluido sustentat, æqualis est excessui grevitatis absolutæ supra gravitatem fluidi sub eodem volumine. E. gr. Cuprum librarum $47\frac{1}{3}$ in aqua amittit de pondere suo $5\frac{1}{3}$ libras: vis ergo 42 librarum id sustentare valet.

COROLLARIUM 2.

90. Quare cum excessus ponderis solidi supra pondus fluidi specifice gravioris minor sit, quam supra pondus specifice levioris sub eodem volumine; in specifice graviore vi minore descendit, quam in leviore, consequenter etiam in hoc celerius, in illo tardius descendit.

COROLLARIUM 3.

91. Quamobrem in specifice graviori fluido minor vis requiritur ad corpus aliquod sustentandum, ne fundum petat, quam in specifice leviori (§. 89).

PROBLEMA 10.

92. *Data solidi submersi gravitate absoluta datoque volumine, determinare vim, qua in fluido attolli potest.*

RESOLUTIO.

1. Exploretur pondus unius pedis cubici aquæ (§. 63): unde,
2. Ob datum solidi submersi volumen, per regulam trium inveniri potest pondus aquæ idem cum ipso volumen habentis.
3. Hæc ergo si subducatur a gravitate corporis submersi data, relinquetur vis, quæ ipsum in aqua sustentare valet (§. 89), adeoque tantillo aucta attollet.

Sit pondus corporis submersi 3000 librarum, volumen 40 pedum cubicorum. Cum pes cubicus aquæ sit 70 librarum (§. 64); erit pondus aquæ idem cum submerso volumen habentis 2800: quod ex 3000 subductum relinquit vim sustentantem 200 librarum.

SCHOLION.

95. *Hinc patet ratio, cur corpora quædam, quæ scilicet ad gravitatem specificam fluidi propius accedunt (§. 90) in fluido isto exigua vi sustententur, quæ plurimorum vires conjunctas in aere superant.*

CAPUT IV.
DE
GRAVITATIONE CORPORUM SPECIFICE LEVIORUM IN FLUIDO GRAVIORI.

THEOREMA 18.

94. *Corpus specifice levius in fluido graviore mergitur, donec pondus fluidi sub volumine partis immersæ æquetur ponderi totius corporis.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim columnæ quantælibet, in quas fluidum concipitur divisum, æquiponderent, (§.34); si corpus solidum eidem imponitur, perinde est ac si columnæ uni tantum ponderis accesfisset, quantum est fluidi sub eodem volumine, consequenter columna ista præponderat (§.35). Cedunt ergo columnæ collaterales (§.75. *Mechan.*) corpusque solidum immergitur. Quam primum vero corpus ea sui parte immersum, ut fluidum ejectum ex spatio, quod occupat, pondere æquale sit gravitati totius corporis; columna ista non amplius præponderat. Corpus itaque ita immersum ab aqua sustentatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

95. Quia gravitates specificæ corporum ejusdem ponderis sunt reciproce ut volumina (§.29), volumina vero fluidorum pondere æqualium sunt partes immersæ ejusdem solidi (§.59); gravitates specificæ fluidorum reciproce sunt ut partes immersæ ejusdem corporis.

COROLLARIUM 2.

96. Solidum ergo profundius mergitur in fluido leviori, quam in graviori.

COROLLARIUM 3.

97. Quo majorem rationem solidi gravitas specifica ad fluidi specifice levioris gravitatem habuerit; eo profundius corpus mergitur. (§. 203. *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

98. Si solidum fuerit ejusdem gravitatis specificæ cum fluido, corpus totum submergitur & datum intra fluidum locum servat.

CO-

COROLLARIUM 5.

99. Si corpus ſpecifice levius in fluido graviori totum ſubmergitur, a columnis collateralibus ea vi ad aſcenſum urgetur, quæ æqualis eſt exceſſui fluidi, volumine ſolido æqualis, ſupra pondus ſolidi (§. 75. *Mechan.*).

COROLLARIUM 6.

100. Corpus adeo ſpecifice levius fundo vaſis incumbens non attollitur, niſi fluidum gravius affuſum ultra partem aſſurgat, quæ volumine æqualis eſt fluido ejusdem cum ſolido toto ponderis.

THEOREMA 19.

101. *Gravitas ſpecifica ſolidi eſt ad gravitatem ſpecificam fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum.*

DEMONSTRATIO.

Volumen enim fluidi ſolido toti pondere æqualis æquatur volumini partis immerſæ (§. 94). Cum adeo gravitates ſpecificæ æquiponderantium ſint reciproce ut volumina (§. 29); erit gravitas ſpecifica ſolidi ad gravitatem fluidi, in quo mergitur, ut volumen partis immerſæ ad volumen integrum. *Q. e. d.*

THEOREMA 20.

102. *Solidorum æquiponderantium partes in fluido graviori immerſæ ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Etenim pars immerſa ſolidi A æqualis eſt volumini fluidi, quod ejusdem cum toto corpore A ponderis, & pars immerſa ſolidi B æqualis eſt volumini fluidi, quod ejusdem cum toto corpore B ponderis (§. 94). Eſt vero gravitas ſolidi A æqualis gravitati ſolidi B *per hypoth.* & fluidum idem *per hypoth.* conſequenter gravitas fluidi expulſi eadem. Ergo pars immerſa ipſius A eſt æqualis parti immerſæ ipſius B. *Q. e. d.*

THEOREMA 21.

103. *Solidorum æqualium gravitates ſpecificæ ſunt ut partes eorundem in eodem fluido demerſæ.*

DEMONSTRATIO.

Solidorum A & B partes in eodem fluido demerſæ ſunt ut gravitates fluidi expulſi (§. 130. *Mechan.*), adeoque ut gravitates abſolutæ corporum A & B (§. 94). Sunt vero volumina A & B eadem *per hypoth.* Ergo gravitates ſpecificæ ſunt ut abſolutæ (§. 26), conſequenter gravitates ſpecificæ ſolidorum æqualium A & B ſunt

ut partes immersæ (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

104. *Data gravitate pedis cubici fluidi e. gr. aquæ, una cum volumine partis immersæ solidi, invenire pondus totius corporis.*

RESOLUTIO.

Quia pondus corporis solidi æquale est ponderi fluidi, quod idem cum parte immersa volumen habet (§. 94); ad pedem cubicum, volumen partis immersæ & gravitatem pedis cubici unius fluidi quærendus est numerus quartus proportionalis, qui erit pondus totius corporis.

E. gr. Pes cubicus aquæ est 70 librarum, (§. 84). Si itaque fuerit volumen partis immersæ 40 pedum cubicorum; reperietur pondus totius corporis 2800 librarum.

PROBLEMA 12.

105. *Data gravitate e. gr. unius pedis cubici aquæ & gravitate solidi, invenire volumen partis immergendæ.*

RESOLUTIO.

Cum sit ut gravitas unus pedis cubici aquæ ad pondus integrum corporis ita pes cubicus unus ad volumen partis immergendæ (§. 94); tribus terminis in analogia datis, *per hypoth.* quartus per regulam trium invenitur.

E. gr. Sit gravitas corporis 3000 librarum: quia pes cubicus aquæ est librarum 70 (§. 64), reperietur volumen partis immergendæ pedum cubicorum $42\frac{6}{7}$.

PROBLEMA 13.

106. *Datis gravitate & volumine solidi specifice levioris una cum gravitate fluidi specifice gravioris, invenire vim, qua illud sub hoc demersum detinetur.*

RESOLUTIO.

Quoniam vis ista æqualis est excessui ponderis fluidi sub eodem volumine, quod habet solidum submersum, supra pondus hujus (§. 99),

1. ex datis volumine solidi & gravitate unius pedis cubici aquæ quæratur per regulam trium gravitas fluidi sub æquali volumine.
2. Inde subtrahatur pondus solidi, ita nimirum vis quæsita relinquetur.

E. gr. Quæritur, qua vi opus sit ad corpus 100 librarum, cujus volumen 8 pedum, sub aquis detinendum. Quoniam pes cubicus aquæ est 70 librarum (§. 64);

(§. 64); pondus aquæ sub volumine 8 pedum est 560. Unde si subducatur pondus solidi 100, relinquitur vis ad detinendum solidum sub aqua 460 librarum.

COROLLARIUM.

107. Quoniam corpus specifice levius eadem vi ascendit in fluido graviori, qua ad ascensum ejus impediendum opus est (§. 75. *Mechan.*); per præsens problema invenitur quoque vis, qua solidum specifice levius in fluido graviori ascendit.

PROBLEMA 14.

108. *Instrumentum construere, quo explorare licet, quantum salis in aqua data contineatur.*

RESOLUTIO.

Fig. 13. 1. Ex tenui lamina cuprea construatur globus AB cum tubo BC ejus cavitatis, ne in aqua pura totus mergatur.

2. Granula plumbea globo AB indantur, donec instrumentum in D usque immergatur.

3. Pondus totius aquæ, in qua mergitur, dividatur per 99: quotus indicabit, quantum salis sit in ea dissolvendum, ut partem ponderis centesimam absolvat.

4. Postquam igitur tantum salis in aqua fuerit dissolutum, instrumentum denuo in ea mergatur noteturque punctum E, quod hæret in superficie aquæ salsæ. Ita nimirum constabit terminus immersionis in aqua, quæ sub volumine 100 librarum salis libram unam comprehendit.

5. Quodsi eodem modo inveniantur puncta alia F, G &c. quæ indicent terminos immersionis in aqua, sub volumine 100 librarum duas, tres, quatuor &c. libras salis continente; instrumento hoc explorare poteris, quantum salis in aqua data contineatur.

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim instrumentum in aqua salsa mergatur, statim apparebit, quot libræ salis in aqua salsa centum librarum contineantur. Quamobrem si pondus aquæ salsæ exploretur, per regulam trium invenitur quantitas salis in ea dissoluti. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

109. *Ut problema præsens rectius intelligatur, exemplo sequente id illustrare libet. Sit gravitas aquæ puræ 2000 scrupulorum. Divide 2000 per 99, quotus* $20\frac{20}{99}$ *indicabit, quot scrupula salis in aqua dissolvenda, ut ponderis centesimam partem constituat. Divide alterius* 2000

Digitized by Google

2000 *per* 98, *quoti* $20\frac{40}{98}$ *duplum* $40\frac{80}{98}$ *indicat, quantum salis in aqua sit dissolvendum, ut sit* $\frac{2}{100}$ *totius ponderis. Divide similiter* 2000 *per* 97, *quoti* $20\frac{60}{97}$ *triplum* $61\frac{83}{97}$ *indicat, quantum salis in aqua dissolvi debeat, ut si* $\frac{3}{100}$ *totius ponderis* &c. *Enimvero cum non sine tædio ad singula divisionum puncta invenienda aqua pura uti liceat; numerum sequentem continuo subduc a proxime præcedente, residuum enim indicabit, quantum adhuc salis sit addendum ad inveniendum punctum proxime sequens.* E. gr. *ubi in aqua dissolveris salis* $30\frac{30}{99}$ *pro inveniendo puncto* E: *ut alterum* F *reperias, addenda sunt insuper scrupula* $20\frac{1}{8}$ *fere, quæ est differentia inter* $20\frac{30}{99}$ & $40\frac{80}{98}$.

SCHOLION 2.

Fig. 14. 110. *Similia instrumenta ex vitro construi solent, tubo* BC *in partes æquales diviso & hermetice in* C *sigillato, globo vero geminato, ad examinandam fluidorum gravitatem specificam* (§. 101).

PROBLEMA 15.

111. *Data gravitate vasis ex materia specifice graviori parandi & gravitate fluidi specifice levioris, determinare cavitatem, quam habere debet, ut fluido supernatet.*

RESOLUTIO.

Cum detur pondus fluidi sub volumine unius pedis cubici, *per hypoth.* volumen fluidi vasi pondere æqualis per regulam trium inveniri potest. Quodsi ergo cavitas paulo major fiat, vas sub eodem volumine minus ponderis continebit, quam fluidum adeoque eodem specifice levius erit (§. 5), consequenter ipsi supernatabit (§. 94).

E. gr. Sit parandus globus ferreus aquæ supernatans, cujus pondus 30 librarum. Quia pondus unius pedis cubici est 70 librarum, reperietur volumen æquæ 30 librarum 428'' 571''', adeoque cubus diametri sphæræ 818924 (§. 1552. *Geom.*): unde radix cubica extracta 9'' 3''' est diameter sphæræ aqueæ 30 librarum. Quodsi ergo diameter cavitatis fiat paulo major e. gr. unius pedis, eo minor ipsius pars mergetur, quo major fuerit diameter.

PROBLEMA 16.

112. *Invenire gravitatem fluidi idem cum corpore quodam specifice leviori volumen habentis, cujus pondus datur.*

RESOLUTIO.

1. Ponderetur corpus quodcunque solidum specifice gravius in fluido dato, ut habeatur pondus fluidi sub eodem volumine (§. 55).
2. Hoc corpus combinetur cum altero specifice leviori, quam fluidum, & massa utriusque simul in eodem fluido ponderetur, ut habeatur pondus fluidi idem cum utraque massa volumen habentis (§. *cit.*).

3. Quodsi

3. Quodsi itaque ab hoc pondere subducas pondus fluidi primo inventum, relinquetur pondus fluidi idem cum corpore specifice leviori volumen habentis.

E. gr. Sit in aqua ponderanda cera 15 librarum. Quoniam plumbum $60\frac{1}{2}$ librarum amittit in aqua $5\frac{1}{3}$; idem vero plumbum ceræ 15 librarum conjunctum amittit $21\frac{1}{3}$; reperietur pondus aquæ idem cum cera volumen habentis 16 librarum.

THEOREMA 22.

Fig. 5. 113. *Vis, quæ requiritur ad vas vacuum* DFEG *ad lineam* AC *in aquam immergendum, ad quam a qua plenum immergitur, æquatur vi tantundem aquæ in aëre sustentanti.*

DEMONSTRATIO.

Vis aquam in aëre sustentans gravitati ejus æqualis est. Sed vis vas vacuum DFGE ad lineam AC in aquam immergens æquatur gravitati aquæ vas replentis, quia eadem ad eandem lineam AC vas immergit, *per hypoth.* Ergo hæc vis æquatur alteri, quæ aquam in vase contentam in aëre sustentare valet.

THEOREMA 23.

114. *Vis, quæ impenditur in solidum specifice levius sub fluido graviori detinendum, itemque pondus a solido graviori in fluido leviori amissum, gravitati fluidi accrescit & cum ea ponderat.*

DEMONSTRATIO.

Vis enim, quæ impenditur in solidum specifice levius sub fluido graviori detinendum, premit fluidum subjectum, adeoque perinde est, ac si massa tantundem premens eidem imponeretur. Sed hæc massa utpote unum grave cum fluido constituens una cum eodem ponderaret. Ergo & vis eidem æquivalens cum fluido ponderare debet. *Quod erat unum.*

Pars ponderis a solido specifice graviori in fluido leviori amissum a fluido sustentatur, ceu patet ex demonstratione theorem. 14. (§. 55). Sed pondus, quod fluido incumbit, unum cum eodem totum constituit, adeoque perinde cum eo gravitate debet, ac si massa fluidi tantundem ponderans affunderetur. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

115. Hinc problema 13. (§. 106) etiam experimentando resolvere licet.

COROLLARIUM 2.

116. Liquet etiam, vim nullam perdi; sed tantum aliorsum impendi in corporum gravitatione.

Digitized by Google

SCHOLION.

117. *Præsens theorema, si volupe fuerit, non minus ac præcedentia omnia experimentis facile comprobantur. Respondent experimenta in istiusmodi materiis Examinibus arithmeticis, uti jam innuimus in Arithmeticæ Elementis* (§. 225).

THEOREMA 24.

118. *Si corpus specifice levius quodam fluido cum corpore, quod eodem specifice gravius est, quomodocunque conjungatur, ut unum absque altero moveri non possit, fueritque excessus fluidi istius supra pondus specifice levioris in eodem demersi æqualis excessui ponderis specifice gravioris supra pondus fluidi sub eodem volumine; corpora ista simul sumta eandem cum fluido gravitatem specificam habent.*

DEMONSRATIO.

Quoniam enim gravitas corporis specifice gravioris tantum excedit gravitatem fluidi sub eodem volumine, quantum gravitas fluidi excedit gravitatem corporis specifice levioris sub eodem volumine *per hypoth.* in volumine fluidi, quod voluminibus utriusque corporis simul sumtis æquale est, tantundem præcise gravitatis inest, quanta est gravitas utriusque corporis simul. Quamobrem cum corpora ista ita conjuncta, ut unum absque altero moveri non possit *per hypoth.* adeoque vi gravitatis suæ simul deorsum nitantur (§. 4. *Mechan.*), consequenter quoad gravitationem pro uno eodemque corpore haberi debeant; simul sumta eandem cum fluido isto gravitatem specificam habent (§. 5. 6). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

119. Quia solidum ejusdem gravitatis specificæ cum fluido, in eodem totum submergitur & datum intra fluidum locum servat (§. 96); corpora diversæ gravitatis specificæ inter se & cum fluido in hypothesi theorematis tota simul in fluido demerguntur datumque intra ipsum locum servant, consequenter nec ascendunt, nec descendunt.

THEOREMA 25.

120. *Vis corpus solidum in fluido specifice leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis ut excessus voluminis supra partem, qua in fluido isto mergitur, ad hanc partem.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi in volumine corporis tantundem gravitatis contineretur, quantum in æquali volumine fluidi inest; totum in eodem submergere-

gere-

geretur & datum in eodem locum servaret vi nulla extrinsecus accedente (§. 98). Quare cum sub volumine fluidi, quod parti immersæ solidi æquale est, tantum gravitatis insit, quantum per totam corpus diffunditur (§. 94); vis, quæ extrinsecus superaccedere debet, ut solidum in dato loco intra fluidum detineatur, æqualis est gravitati fluidi per volumen diffusæ, quod æquale est excessui corporis solidi integri supra partem, qua in fluido mergitur vi gravitatis propria. Enimvero in fluido tanquam gravi homogeneo gravitas est volumini proportionalis (§. 131. *Mechan.*). Ergo vis ad corpus solidum in fluido specifice leviori detinendum requisita est ad gravitatem totius solidi uti excessus voluminis supra partem in eodem vi gravitatis propriæ immersam ad hanc partem immersam. *Q. e. d.*

THEOREMA 26.

121. *Vis corpus solidum in fluido specifice leviori demersum detinens est ad gravitatem corporis ut differentia gravitatum specificarum solidi atque fluidi ad gravitatem specificam solidi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica fluidi ad gravitatem specificam solidi ut volumen totius solidi ad partem ejus, qua in fluido vi gravitatis propriæ demergitur (§. 101). Ergo differentia gravitatum specificarum fluidi & solidi est ad gravitatem specificam solidi ut excessus voluminis solidi supra partem immersam ad hanc ipsam partem (§. 193. *Arithm.*). Quoniam itaque vis in fluido corpus specifice levius suspensum detinens est ad gravitatem ejus ut excessus voluminis supra partem, qua vi gravitatis suæ in eodem demergitur (§. 120); erit etiam eadem vis ad gravitatem corporis ut differentia gravitatum specificarum solidi ac fluidi ad gravitatem specificam solidi (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 7.

122. *Dato pondere corporis fluido specifice gravioris una cum parte ejusdem in fluido amissa dataque ratione gravitatis specificæ fluidi ac corporis alicujus specifice levioris, invenire pondus ejusdem, quod requiritur ut specifice graviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loco detineat.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Subtrahatur pars ponderis, quam

quam corpus solidum specifice gravius in fluido leviori amittit, a pondere corporis dato, ut relinquatur vis, quæ solidum intra fluidum in dato loco detinere potest (§. 75. *Mechan.*).

2. Ex data gravitate specifica fluidi & corporis specifice levioris atque vi ad sustentandum specifice gravius intra fluidum modo reperta, seu, quod perinde est, ad detinendum specifice levius a graviori requisita investigetur gravitas totius corporis specifice levioris: quod vi theorematis præcedentis (§. 121) per regulam trium (§. 302. *Arithm.*) reperiri potest. *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM 1.

123. Quoniam solidum ejusdem gravitatis specificæ est cum fluido, quod datum intra fluidum locum servat (98), cum specifice gravius in eodem descendat (§ 88), specifice levius aliqua tantum sui parte mergatur (§. 94); per præsens problema patet, quomodo combinando duo corpora, quorum alterum fluido specifice levius, alterum specifice gravius, efficiatur corpus eandem cum fluido gravitatem specificam habens.

COROLLARIUM 2.

124. Si pondus corporis specifice levioris tantisper augeatur specifice gravius ad superficiem fluidi attollet.

SCHOLION.

125. *Theorema præsens cum ejus corollario etiam per theorema* 24 (§. 113) *demonstrari poterat.*

THEOREMA 27.

126. *Vis corpus solidum in fluido specifice leviori sustentans est ad pondus ejusdem ut differentia gravitatum specificarum illius ac fluidi ad gravitatem specificam solidi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim gravitas specifica solidi ad gravitatem fluidi ut pondus integrum solidi ad partem ejus in fluido amissam (§. 59). Quamobrem convertendo erit ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi, ita excessus solidi supra fluidum ad pondus solidi integrum (§. 193. *Arithm.*). Est vero excessus solidi supra fluidum æqualis vi ad solidum intra fluidum sustentandum requisitæ (§. 89). Ergo hæc vis est ad pondus integrum solidi sustentandi ut differentia gravitatum specificarum ad gravitatem solidi. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

127. *Datis gravitate & volumine solidi specifice levioris una cum gravitate unius pedis cubici fluidi specifice gravioris, nec non gra-*

Digitized by Google

gravitate ſpecifica ejusdem fluidi & corporis ſolidi eodem ſpecifice gravioris, invenire quantum hujus pondus eſſe debeat ut ſpecifice leviori quomodocunque conjunctum idem intra fluidum in dato quocunque loto detineat.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex datis gravitate & volumine ſolidi ſpecifice levioris una cum gravitate unius pedis cubici fluidi ſpecifice gravioris inveniatur vis ad ſolidum in fluido detinendum requiſita (§. 106): quæ erit exceſſus ſolidi ſpecifice gravioris ſupra pondus fluidi mole æqualis (§. 89). Unde

2. ex data ratione gravitatum ſpecificarum ſolidi ſpecifice gravioris & fluidi atque vi iſta ſeu exceſſu prædicto invenitur pondus ſolidi ſpecifice gravioris cum leviori conjungendum, ut idem in fluido ſuſtentet (§. 115). *Q. e. i. & d.*

COROLLARIUM.

128. Quodſi ſolidi ſpecifice gravioris pondus tantiſper augeatur, cum ſpecifice leviori una deſcendet, ſeu ſpecifice levius ad fundum ſecum abripiet.

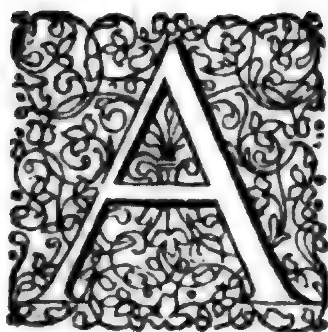
SCHOLION.

129. *Non abſimili modo plura alia problemata ſolvi poſſunt, quæ in philoſophia experimentali & vita communi ac arte uſum ſuum habere poſſint.*

FINIS HYDROSTATICÆ.

ELEMENTA
AEROMETRIÆ.

PRÆFATIO.



A multo jam tempore in more positum, ut Physicæ quædam capita in numerum disciplinarum Mathematicarum relata fuerint, postquam, facta ad experientias indubias Arithmeticæ, Geometriæ & Analyseos, hoc est, Matheseos puræ applicatione, formam mathematicam iis induere licuit. Non alia sane de causa Hydrostatica, Hydraulica, Optica cum Catoptrica atque Dioptrica, itemque Astronomia in numero isto comparent. Quamobrem cum multa de viribus atque affectionibus aëris more Geometrarum & ex principiis Matheseos puræ demonstrari, demonstrata ad varios usus dextre applicari possint; anno 1709. numerum disciplinarum Mathematicarum augere animum induxi, editis Aërometriæ Elementis, quæ anno sequente 1710 in Tomo secundo Elementorum Matheseos Germanicorum Hydrostaticæ subjunxi, tanquam ejus filiam atque alumnam. Enimvero tanto

majori jure locum ſemel adeptum tuetur, quod Hydraulica dudum in Matheſin recepta in multis opem ejus imploret. Quemadmodum enim Aërometriæ facem præfert Hydroſtatica; ita Aërometria Hydraulicam illuſtrat. Antequam igitur ad Aërometriam animum appellas, Hydroſtaticæ dogmatibus eundem imbuas opus eſt. Antequam ad Hydraulicam pedem promoveas, Aërometriam Tibi ſociam jungas e re tua omnino eſſe deprehendes. Jucundum vero eſt Aërometriæ ſtudium, idemque utiliſſimum, tum quod inde ratio plurimorum Naturæ phænomenorum deſumitur, tum quod variarum machinarum ac inſtrumentorum ſtructura in ea continetur. Ut brevitati conſulatur & ſequentia antecedentibus reſpondeant; non integra exhibeo Aërometriæ elementa, quæ ante quinque fere annos a me edita eſſe modo memini, ſed quæ digniora reliquis viſa ſunt, in compendio exhibere & nonnullis augere conſtitui. Cæterum Aërometriæ Elementa, æquis harum rerum arbitris conſentientibus, iis potiſſimum commendo, quibus curæ cordique fuerit, ad expetimenta applicare Matheſin. Hunc fructum cupidis polliceor, & ut eundem conſequantur ex animo apprecor.

ELE-

ELEMENTA AEROMETRIÆ.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS AEROMETRIÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Aerometria* est scientia metiendi aërem.

COROLLARIUM.

2. Cum metiri idem sit ac rationem quantitatum ad aliam homogeneam datam investigare (§. 23. *Geom.*); in Aërometria tradendæ sunt leges, juxta quas omnia de aëre conceptibilia & extensionis terminos vel intensitatis gradus habentia accurate determinari possunt.

DEFINITIO 2.

3. *Aër* est corpus fluidum Telluri circumfusum & spatia ab aliis corporibus in eadem relicta occupans, nisi impediatur.

SCHOLION.

4. *Definitionem aëris nonnisi nominalem tradere intendo. Sufficit igitur exhibuisse notam, aere præsente semper obviam, ex qua ejus præsentia certo colligi potest.*

DEFINITIO 3.

5. *Compressio* est coarctatio massæ in minus volumen per impulsum aut pressuram alterius corporis facta.

DEFINITIO 4.

6. *Condensatio* est coarctatio massæ in minus volumen vi frigoris facta.

DEFINITIO 5.

7. *Dilatio* est expansio massæ in majus volumen, quam facta compressione habuerat.

DEFINITIO 6.

8. *Rarefactio* est expansio massæ in majus volumen vi caloris facta.

DEFINITIO 7.

9. *Elater aëris* est vis, qua vi comprimente sublata dilatatur.

AXIOMA 1.

10. *Quo corpus est gravius, eo magis premit alia sibi subjecta.*

SCHOLION.

11. *Patet ex definitione gravitatis* (§. 4. Mechan.). *Corpus scilicet vi gravitatis nititur deorsum adeoque premit alterum descensui resistens. Quo majore itaque vi deorsum nititur, eo magis quoque premit alterum sibi subjectum.*

AXIOMA 2.

12. *Quamdiu dilatatio per elaterem facta eadem est, elater quoque immutatus sit necesse est: quodsi vero elater majorem dilatationem produxerit, crevisse; sin minorem, decrevisse censendus est.*

EXPERIENTIA 1.

13. *Promove celeriter manum per spatia, quæ vacua esse videntur, faciem versus; impetum quendam in eam fieri animadvertes, utut manus ipsam non contingat.*

COROLLARIUM.

14. Necesse est adeo, ut interstitia inter corpora terrestria, quæ vacua esse videntur, materia quadam repleantur, cujus partes sint admodum subtiles, cum non videantur, & inconnexæ, cum motum corporum non impediant. Spatia igitur in Tellure ab aliis corporibus derelicta fluidum aliquod subtilissimum occupat (§. 3. *Hydrostat.*) hoc est, aër datur (§. 3).

EXPERIENTIA 2.

15. *Globo cupreo aut orichalceo satis capaci afferruminetur epistomium cum cochlea fœmina, ita ut syrinx mediante cochlea mari ad arbitrium ei adaptari rursusque removeri possit. Quodsi ope syringis plus aëris in globum intrudas, eumque clauso epistomio bilanci imponas, pondus ejus auctum deprehendes: ubi vero epistomium rursus aperies, aërem erumpere animadvertes & globus metallicus recuperabit pondus, quod ante intrusionem aëris habuerat.*

SCHOLION.

16. *Experimentum hoc excogitavit* Galilæus Galilæi, *lagena vitrea usus* (a); *sed cum vasa vitrea ab aëre compresso facile nec sine periculo adstantium frangantur, ego metallico uti soleo, in gratiam curiosorum idem repetens.*

COROLLARIUM 1.

17. Quoniam in globum metallicum plus aëris intrudi potest, quam ordinarie capit; evidens est, aërem in minus volumen coarctari posse, quam ordinarie occupat. Comprimi ergo potest (§. 5).

COROLLARIUM 2.

18. Cum epistomio aperto aër rursus egrediatur, ipsoque egresso pondus pristinum recuperet globus, quod ante compressionem aëris in ipso factam habuerat; certo hinc intelligitur, tantum præcise aëris rursus egressum, quantum intrusum fuerat. Aër itaque compres-

(a) Mechan, Dialog. 1. p. m. 71.

Digitized by Google

presſus ad priſtinam expanſionem redit, ſi vis comprimens aut expanſioni reſiſtens removeatur, adeoque elatere gaudet (§. 9.).

COROLLARIUM 3.

19. Certum itaque compſesſionis indicium eſt, quod aër intra vas quoddam magis compresſus ſit, quam externus, ſi orificio ejus aperto, cæteris paribus, aêris quædam portio egredi obſervetur.

COROLLARIUM 4.

20. Denique quia pondus vaſis augetur, ſi aêr intra ipſum comprimitur; masſa aêrea niſum exerceat opus eſt deorſum juxta lineas rectas ad horinzontem perpendiculares (§. 215. *Mechan.*) Gravis ergo exiſtit (§. 4. *Mechan.*).

COROLLARIUM 5.

21. Premit ergo corpora ſubjecta ſecundum lineas rectas ad horizontem perpendiculares (§. 215. *Mechan.*).

EXPERIENTIA 3.

22. *Quodſi veſicam aëre mediocriter repletam firmiterque conſtrictam ad ignem admoveas; ea non ſolum diſtenditur, ſed & ingenti prorſus fragore tandem disrumpitur. Quodſi vero eam ab igne removeas, antequam disrumpatur, ſtatim flaccida evadit.*

COROLLARIUM 1.

23. Cum intra veſicam nil niſi pauculum aëris contentum fuerit; expanſio veſicæ expanſionem aêris incluſi arguit. Aer itaque rarefit (§. 8).

COROLLARIUM 2.

24. Quia calore exſpirato veſica diſtenta rurſus flaccida fit; frigore in volumen minus rurſus coarctatur adeoque condenſatur (§. 6).

EXPERIENTIA 4.

25. *Si aer in vaſe comprimatur, ejus quandam portionem aperto orificio ex ipſo iterum exſpirare notabis in quacunque orificii directione.*

COROLLARIUM.

26. Elater igitur aeris nititur quaqua verſum ſecundum quamlibet directionem.

EXPERIENTIA 5.

27. *Si tubum oblongum* HB, *cujus altitudo 32. pedibus Rhenanis major, in* C *epiſtomio inſtructum & verticaliter erectum aqua repleas, orificium inferius* A *in aquam immergas & aperto orificio* B *epiſtomium aperias, aqua tota cum impetu effluit: ſi vero obturato orificio* B *epiſtomium* C *recludas, aqua usque ad* D *deſcendit, ac in altitudine 31 pedum Rhenanorum ultra libellam aquæ in vaſe* GH *contentæ pendula hæret.* Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM.

28. Quoniam aqua intra tubum AB pendula aquam in vaſculo ſibi ſub-

jectam premit nec tamen descendit; necesse est, ut, si aqua in vasculo contenta in istiusmodi columnas divisa concipiatur, qualis est, quæ tubo AB subjacet, singulæ æquali vi premantur. Sed circa tubum superficiei aquæ incumbit aer (§. 3) eamque premit (§. 21). Columna igitur aerea a superficie aquæ in vasculo contentæ usque ad extremitatem atmosphæræ extensa eandem habet gravitatem cum cylindro aqueo super eadem basi, sed altitudinis 31 pedum Rhenanorum (§. 36. *Hydrost.*).

SCHOLION.

29. *Hoc æquilibrium aeris cum aqua primus observavit hortulanus quidam Florentinus, aquam in antlia tractoria ultra 18 cubitos attolli non posse miratus, atque cum* Galilæo *phænomenon insperatum communicavit ipse causam ejus ignorans.* (b). *Iterarunt hoc experimentum complures, quos inter* Mariottus (c) *altitudinem aqua in tubo pendula reperit 32 pedum Parisiensium.* Evangelista Torricellus, *discipulus* Galilæi, *aqua substituit Mercurium, cujus altitudo utpote quatuordecies gravioris aqua reperitur 28 circiter digitorum Rhenanorum* (§. 36. Hydrost.).

CAPUT II.

DE

ELATERE ET GRAVITATE AERIS.

THEOREMA 1.

30. *Elater aëris inferioris æquatur ponderi totius suprrioris ipsi incumbentis.*

DEMONSTRATIO.

Aër enim superior premit inferiorem (§. 21). Elater vero æquatur ponderi prementi (§ 553. *Mechan.*). Ergo elater aëris inferioris æquatur ponderi totius superioris ipsi incumbentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

31. Quoniam pondus aeris superioris inferiori incumbentis æquatur ponderi columnæ aqueæ, cujus eadem cum volumine aeris basis, sed altitudo 31 pedum (§. 28), vel etiam columnæ Mercuriali, cujus altitudo 28 digitorum (§. 29); elater aeris inferioris eidem columnæ aqueæ & mercuriali æquatur.

SCHO-

(b) Mechan. Dial. 1. p. m. 15. 16.

(c) Trait. du mouvement des Eaux part. 2. disc. 1. p. 9.

SCHOLION.

32. *Pondus hujus columnæ aqueæ vel mercurialis dicemus in posterum brevitatis gratia* pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM 2.

33. Elater aeris inclusi, si cætera cum ambiente externo paria sint, æquatur similiter ponderi totius superioris incumbentis.

COROLLARIUM 3.

34. Inclusus adeo aer eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum.

COROLLARIUM 4.

35. Ergo etiam hic Mercurium, ad altitudinem 18 digitorum, aquam vero ad altitudinem 31 pedum in tubo vacuo suspendit (§. 28. 29).

THEOREMA 2.

36. *Si vas aliquod ab aëre vacuum prope Tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruet eamque replebit.*

DEMONSTRATIO.

Est enim aër in statu compressionis (§. 28), cumque elatere gaudeat (§. 18), ad majorem continuo expansionem nititur (§. 9) & quidem quaquaversum (§. 26). Quare cum intra vas vacuum nisui huic nihil resistat, expansio per cavitatem vasis actu sequetur (§. 75. *Mechan.*). Et quia si aliquod spatium vacuum intra cavitatem vasis ab aëre irruente non occupatum supponamus, illud instar vasis vacui intra aërem aperti considerari potest, aër in vas irruens etiam hoc spatium replere debet. Si itaque vas aliquod ab aëre vacuum prope tellurem aperiatur, aër ambiens externus extemplo in cavitatem ejus ruit eamque replet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

37. Si ergo syrinx orificio alicujus vasis firmiter infigatur & embolus postea extrahatur, aer in vase contentus per siphonis cavitatem expandetur.

DEFINITIO 8.

38. *Antlia pneumatica* est machina, qua mediante aër ex vasis educi potest.

SCHOLION.

39. *Primus antliæ pneumaticæ inventor est* Otto de Guericke, *Consul Magdeburgicus, qui experimenta sua jam sub finem comitiorum imperialium anno* 1654. *Ratisbonæ celebratorum in præsentia Imperatoris, Electorum ac Principium quorundam iteravit* (d). *Utut vero inter exteros non desint, qui laudem inventionis* Roberto Boylio, *experimentatori celeberrimo, tribuunt, quos inter ex Anglis* Robertus Hookius, *recensente* Cl. Wallero (e) *& ex Gallis*, Johan-

(d) Vid. Præfatio ad Experimenta [nova] Magdeburgica.

(e) in Vita Hookii operibus ejus posthumis præmissa f. 3.

hannes Baptista du Hamel. *variis scriptis celebris* (f); *ipse tamen* Boylius *pro eo, qui decet virum doctum, candore* (g) *agnoscit, quod* Otto de Guericke *ipsum praevenerit, quodque ipse ab iis, quæ* Casparus Schottus *in Mechanica Hydraulico-pneumatica A. 1657. edita de vasis vitreis a* Guerickio *ab aere evacuatis publicaverat, ad sua experimenta & antliæ pneumaticæ constructionem incitatus fuerit. Structuram immutavit ipse* Guerickius (h): *aliud artificium embolum extrahendi applicuit* Boylius, *quo nunc ordinarie utuntur. Recentius structuram antliæ pneumaticæ immutavit* Haucksbejus, *Mechanicus Anglus, cujus formam describit* Cel. Gravesandius (h), *ipseque inventor delineat* (i).

PROBLEMA I.

40. *Antliam pneumaticam construere.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus AB ex orichalco, intus cavus & satis capax, cujus interior superficies optime polita, ut embolus DE arctissime ipsam undiquaque contingat, ne ulli moleculæ aereæ inter eam & embolum locus relinquatur.

2. Embolus constare debet ex orbibus coriaceis firmiter sibi mutuo appressis mediante cochlea orbi orichalceo E afferruminata. Corium optimum est bubulum, ex quo succingula militum parari solent. Probe autem notandum est, corium imbibere debere oleum olivarum tertiæ parti pinguedinis suillæ excoctæ permixtum, ne successu temporis indurescat.

4. Embolo affigatur lamella ferrea dentata DC, ut ope rotulæ dentatæ manubrio NO versato commode extrahi ac intrudi possit.

4. In B afferruminetur basi cylindri tubulus BFKL cum epistomio GHI ex cylindro cavo HF & operculo cylindrico solido I composito.

5. Denique tubulus KL in L instruatur cochlea, ut vasa, quorum orificia cochleis fœminis seu matricibus instructa, ad eundem firmari possint. Eodem modo adaptandus est, quoties usus postulat, catinus orichal-

(f) in Philos. Vet. & Nov. Tom. 4, Phys. gener., Tract. 2. dissert. 3. c. 10. p. m. 234.
(g) in præf. ad Nova Experim. Phys. Mech. de vi aeris elastica p. m. 3.
(h) l. c. f.
(h) in Elementis Physicæ Mathematicis Tom. 1. lib. 2. c. 6. p. 309. edit. sec.
(i) Physica-Mechanical Experiments p. 1, & seqq.

chalceos PQ, cui vitra companiformia commode imponere liceat.

Dico ex vasis ad hanc machinam firmatis aerem educi posse.

DEMONSTRATIO.

Cum enim embolus CE extrahitur epistomio versus antliam AB & tubulum KL aperto, aer in vase contentus per tubuli LKGB & cylindri AB cavitatem expanditur (§.36). Quodsi jam epistomium claudatur versus tubulum KL, sit tamen apertum versus antliam AB, & remoto operculo I embolus DE rursus intrudatur, aer per epistomium FH extruditur, consequenter aeris aliqua portio ex vase educta. Quo pluries itaque hæc operatio repetitur, eo plus aeris ex vase educitur. Ope adeo machinæ constructæ aer ex vasis educi potest. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

41. *In usu antliæ notandum, embolum oleo olivarum illini & fundo catini orbem coriaceum bubulum (quali ad constructionem emboli utendum) probe madefactum & in medio perforatum applicandum esse, ut embolus facile extrahatur & antliam undiquaque arctissime contingat, vas vero evacuandum firmiter catino apprimatur.*

SCHOLION 2.

42. *In evacuandis vasis rationem habendam esse tantum vis elasticæ, ad quam solam in demonstratione respeximus, experimenta probant. Aerem enim, iteratis emboli agitationibus, continuo rariorem fieri, docet expansio vesicæ sub campana suspensæ, firmiter constricto collo & nonnisi pauculo aeris intus relicto. Enimvero dilatationem tantum fieri per elaterem, nec quicquam conferre gravitatem, in Actis Lipsiensibus* (k) *ante triennium circiter experimento docui: quod hic repetere juvat. Fieri curavi tubum ex lamina orichalcea cochleæ afferruminatum, ut ad antliam firmari posset, atque fornicem vasis evacuandi fere attingentem. Quantum per hunc tubum aeris facta qualibet emboli agitatione ex vase educeretur, maxima cum circumspectione notavi: embolo enim intruso, donec aer in antlia contentus eandem cum externo densitatem haberet, numeravi dentes virgæ dentatæ extra antliam conspiciendos. Mox tubo isto remoto, evacuationem ejusdem vasis denuo tentavi: quam eadem prorsus ratione ut antea contingere didici. Usus autem sum vasis & majoribus, & minoribus eodem semper successu, estque diameter luminis in antlia mea 4 digitorum 6 linearum, longitudo cylindri 2 pedum Rhenanorum. Quoniam vero doctissimis Diarii Trevoltiensis collectoribus,* (l) *quorum erga me humanitatem*

(k) A. 1711. mens. Jan. p. 14.

(l) Memoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts. Aout. 1711. art. 120. p. 1404.

Digitized by Google

tem ut gratus prædicem fas est, hoc experimentum non sufficere visum est ad vim gravitatis ab evacuatione vasorum excludendam; ideo (§. 47) mox ex natura elateris id demonstrabimus, ut in Aerometria A. 1709. edita. Caterum hac ratio est, cur antlia situs ad horizontem inclinatus esse possit, nec opus sit, ut, quod post Guerickium *etiam* Boylius *&* *nuper* Hauksbejus *fecit, ut ad horizontem perpendicularis fiat.*

SCHOLION 3.

43. *Aliud antlia genus ex duplici cylindro construxit experimentator industrius* Franciscus Haukbée, *cujus descriptionem exhibent Actorem Eruditorum collectores* (m). *Eam pro more suo in multis immutavit* Leupoldus *variis inventionibus mechanicis celebris* (n). *Sed cum in comprimendo aere usus ejus sit nullus, qui tamen in experimentis frequens esse solet, nec vasa tam exacte evacuari posse videantur, quam antlia ordinaria utendo: ideo antiquum antlia genus huic recentiori praferendum esse judico, nisi accedat medula.*

THEOREMA 3.

44. *Aër Telluri circumfunditur, nec uno in loco altior esse potest quam in altero.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim aër Telluri circumfunditur, aut non. Ponamus posterius. Dabitur ergo super aliqua Telluris parte spatium ab aëre vacuum. Jam cum aër vacuo huic contiguus existat, per spatium illud expandetur (§. 36). Impossibile igitur, ne intra aërem sit spatium aliquod ab aere vacuum. Tale vero cum necessarium foret ob rotunditatem Telluris, nisi aër eam undiquaque ambiret; necesse est aërem Telluri circumfundi. *Quod erat unum.*

Quodsi ponamus aërem uno in loco esse altiorem, quam in altero; aër vacuo contiguus statim expandetur (§. 36), adeoque non quiescet nisi undiquaque eandem habuerit altitudinem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

45. Quare si cætera sint paria, duobus corporibus eandem basin habentibus in æqualibus a centro Terræ distantiis æqualia atmosphæræ pondera incumbunt, adeoque ab aere incumbente æqualiter premuntur (§. 42. *Hydrost.*)

COROLLARIUM 2.

46. In æqualibus itaque a centro terræ distantiis, si cætera fuerint paria, aër eandem densitatem habet, adeoque sub æqualibus voluminibus massas æquales continet (§. 8. *Hydrost.*), consequenter æqualia volumina ejusdem gravitatis existunt.

THEO-

(m) Supplem. Tom. V. Sect. 9. p. 403. [illegible]

(n) Acta Erudit. A. 1713. p. 95.

Digitized by Google

THEOREMA 4.

47. *In eodem vase vel etiam in vasis communicantibus aer ubique eandem densitatem habet, si cætera paria fuerint.*

DEMONSTRATIO.

Aut enim eandem habet densitatem, aut non. Ponamus aërem in vase uno esse rariorem, in altero densiorem. Illius ergo densitas per pressuram minoris ponderis producetur, hujus per pressuram majoris. Ast elater aëris æquatur ponderi prementi (§. 553. *Mechan.*). Ergo in aëre rariore minor vis elastica, quam in densiore. Quare cum aër uterque vi elateris quaquaversum sese expandere nitatur (§. 26); majore vi aer densior nititur versus rariorem, quam rarior versus densiorem. Ergo rarior cedet densiori (§. 75. *Mechan.*), comprimetur ergo ab elatere densioris (§. 5) & densior proprio elatere dilatabitur (§. 7), nec reddetur aëri in utroque vase quies, nisi nisus aeris utrinque fuerit idem (§. 75. *Mechan.*), hoc est, nisi eandem densitatem habuerit, *per demonstrata*. Si igitur aer in utroque vase eandem densitatem non habuerit, cæteraque paria fuerint, ad eandem statim reducetur. In vasis igitur communicantibus, adeoque multo magis in eodem, ceteris paribus, aër ubique eandem densitatem habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

48. Quare si embolo ex antlia extracto aer ex vase ad ipsam firmato in cavitatem ejus ruit (§. 36); qui cavitatem antliæ replet cum eo, qui in vase evacuando residuus, densitatem eandem habet.

COROLLARIUM 2.

49. Est ergo massa aeris intra cavitatem antliæ contenti ad massam aeris in vase evacuando residui ut capacitas antliæ ad capacitatem vasis (§. 17. *Hydrost.*).

THEOREMA 5.

50. *In vase, quod per antliam evacuatur, semper est aer primitivus ad aerem residuum, ut aggregatum ex capacitate vasis & antliæ ad eam dignitatem elevatum, cujus exponens æquatur numero agitationum emboli, ad capacitatem vasis solius ad eandem dignitatem evectam.*

DEMONSTRATIO.

Dicatur aer a prima agitatione emboli residuus *aer residuus primus*; qui a secunda emboli agitatione restat, *aer residuus secundus* & ita porro.

Quoniam aer in vase contentus

eſt ad aerem in antlia contentum ut capacitas vaſis ad capacitatem antliæ (§. 49); erit etiam aggregatum ex aere in vaſe & ex aere in antlia contento, hoc eſt aer primitivus, ad aerem in ſolo vaſe contentum, hoc eſt reſiduum primum, ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius (§. 190. *Arithm.*). Similiter demonſtratur, eſſe quantitatem aeris reſidui primi ad quantitatem reſidui ſecundi ut aggregatum ex capacitate vaſis & antliæ ad capacitatem vaſis ſolius; & in eadem ratione eſſe quantitatem aeris reſidui tertii &c. Ergo factum ex aere primitivo in reſiduum primum, ſecundum, tertium, quartum &c. ad factum ex aere reſiduo primo in ſecundum, tertium, quartum, quintum &c. ut factum ex capacitate vaſis & antliæ junctim toties in ſe ducta emergens, quot numerus agitationum emboli unitates continet, ad factum ex capacitate vaſis ſolius multoties itidem in ſe ducta enaſcens (§. 213. **Arithm.**) **hoc eſt, ut dignitas aggregati ex capacitate vaſis & antliæ junctim, cujus exponens eſt numerus agitationum emboli, ad capacitatem vaſis ſolius ad eandem dignitatem evectam (§. 250. *Arithm.*), conſequenter aer primitivus ad reſiduum ultimum earundem dignitatum rationem habet (§. 260. *Arithm.*). *Q. e. d.***

PROBLEMA 2.

51. *Dato numero agitationum emboli in antlia factarum una cum capacitate vaſis & capacitate antliæ, invenire rationem aeris primitivi ad reſiduum.*

RESOLUTIO.

1. Ex Canone logarithmorum excerpatur logarithmus aggregati ex capacitate vaſis & capacitate antliæ una cum logarithmo capacitatis vaſis ſolius.
2. Logarithmus poſterior e priori auferatur &
3. Differentia in numerum agitationum emboli ducatur; erit factum logarithmus, cui in tabulis reſpondet numerus indicans, quoties aer primitivus contineat reſiduum quæſitum.

E gr. Sit capacitas antliæ 580″, capacitas vaſis 460″; erit aggregatum ex utraque 1040″. Sit numerus agitationum emboli 6; erit logarithmus rationis, quam habet aer primitivus ad reſiduum 6 (3.0170333 − 2.6627578) = 2,1656530, cui in tabulis reſpondet numerus $146\frac{4}{10}$. Eſt igitur aer primitivus ad reſiduum ut $136\frac{4}{10}$ ad 1, hoc eſt, ut 1464 ad 10 ſeu ut 732 ad 5.

DE-

Digitized by Google

DEMONSRATIO.

Sit capacitas vasis = v, capacitas antliæ & vasis simul = a, numerus agitationum emboli = n, aer residuus = 1. Quoniam aer primitivus ad residuum ut a^n ad v^n (§. 50), erit etiam primitivus ad residuum ut $\frac{a^n}{v^n}$ ad 1 (§. 181. *Arithm.*), consequenter si residuus 1, logarithmus primitivi est $n(la - lv)$ (§. 341. 343. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

52. *Data capacitate vasis evacuandi & capacitate antliæ, invenire numerum agitationum emboli ad aerem in data ratione dilatandum requisitum.*

RESOLUTIO.

1. Excerpantur ex Canone logarithmorum logarithmi aeris primitivi, aeris residui, capacitatis vasis & aggregati ex capacitate vasis & capacitate antliæ.
2. Logarithmus aeris residui subducatur ex logarithmo aeris primitivi, similiter logarithmus capacitatis vasis auferatur ex logarithmo aggregati ex capacitate vasis & capacitate antliæ.
3. Differentia prior dividatur per alteram. Dico, quotum esse numerum agitationum emboli quæsitum.

E. g. Sit capacitas antliæ 580'', capacitas vasis 460'', aer primitivus ad residuum ut 1464 ad 10: reperietur numerus agitationum emboli (3.0656530 − 10000000):(3.0170333 − 2.6627578) = 2165530:3542755 = 6.

DEMONSTRATIO.

Sit aer primitivus p, residuus r, reliqua sint ut in demonstratione problematis præcedentis: erit

$$p : r = a^n : v^n \quad (\S. 50)$$

$$lp - lr = nla - nlv \quad (\S. 341. 343 \textit{ Arithm.})$$

$$(lp - lr):(la - lv) = n. \textit{ Q.e.d.}$$

PROBLEMA 4.

53. *Data ratione aeris primitivi ad residuum una cum capacitate vasis & numero agitationum emboli, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit aer primitivus ad residuum $= p:r$, capacitas vasis $= v$, capacitas antliæ $= x$, numerus agitationum emboli $= n$; erit

$$p:r = (v + x)^n : v^n \quad (\S. 50)$$

$$lp - lr = nl(v+x) - nlv \quad (341. 343 \textit{ Arith.})$$

$$lv + (lp - lr):n = l(v + x)$$

Inveniri adeo potest logarithmus ag-

aggregati ex capacitate vasis & antliæ, consequenter ipsum hoc aggregatum. Quare si hinc auferatur capacitas vasis, relinquetur capacitas antliæ.

E. gr. Sit $p : r = 1464 : 10$, $v = 460''$, $n = 6$; erit $l(v + x) = 2.6627578 + (3.0656530 - 1.0000000) : 6 = 2.6627578 + 3542755 = 30.70333$. Ergo vi Canonis $v + x = 1040''$, consequenter $x = 580''$.

THEOREMA 6.

54. *Numeri agitationum emboli, quibus ope duarum antliarum in eodem vase vel æqualibus vasis aër ad eandem rationem cum aëre primitivo reducitur sunt in ratione reciproca differentiarum Logarithmi vasis a Logarithmo aggregatorum ex capacitate vasis & capacitate antliarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit ratio aëris primitivi ad residuum $= p : r$, capacitas vasis $= v$, antliæ majoris capacitas $= A$, minoris vero $= a$. Quoniam ratio aeris primitivi ad residuum in evacuatione per utramque antliam facta eadem *per hypoth.* si numeri agitationum emboli fuerint m & n; erit $(v + A)^m : v^m = p : r$ & $(v + a)^n : v^n = p : r$ (§. 50), consequenter $(v + A)^m : v^m = (v + a)^n : v^n$ (§. 167. *Arithm.*). Habemus itaque $ml(v + A) - mlv = nl(v + a) - nlv$ (§. 341. 343. *Arithm.*), consequenter $m : n = (lv + a) - lv : l(v + A) - lv$. hoc est, numeri agitationum emboli, quibus aer in eodem vase ope diversarum antliarum ad eandem rationem cum primitivo reducitur, sunt in ratione reciproca differentiarum logarithmorum vasis & aggregati ex vase & antlia. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

55. Dato igitur numero agitationum emboli, quibus in vase quodam dato ope antliæ datæ aer residuus reducitur ad rationem datam cum primitivo vel ex eodem prorsus educitur, inveniri potest numerus agitationum emboli, quibus ope alterius antliæ datæ in eodem vase aer residuus ad eandem rationem cum primitivo reducitur, vel ex eodem prorsus educitur.

PROBLEMA 5.

56. *Invenire pondus unius pedis cubici aërei.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Vasis vitrei aut metallici BC satis capacis, figura sphærica, collo oblongo AB & epistomio D præditi pondus ad bilancem exactam exploretur, dum aere ejusdem cum ambiente externo densitatis repletur. Quo facto

2. edu-

2. educatur aer (§. 40) &
3. Globi evacuati pondus denuo ad bilancem examinetur, quod
4. a pondere priore subductum relinquit pondus aeris educti.
5. Investigetur capacitas vasis (§. 556. *Geom.*) & ratio aeris residui ad primitivum (§. 51): quibus datis, volumen aeris residui per regulam trium innotescet, a capacitate vasis subducendum, ut relinquatur volumen aeris educti. Quodsi antlia accurate fuerit constructa & tamdiu exerceatur, quamdiu aer evacuatur; volumen aeris residui tantillum reperietur, ut tuto negligi ipsaque capacitas vasis pro volumine aeris educti assumi possit.
6. Datis adeo pondere atque volumine aeris educti per regulam trium reperietur pondus unius pedis cubici aeris (§. 130. *Mechan.*).

SCHOLION.

57. *Methodo hac primum usus* Otto de Guericke (o) *& post eum* Burcherus de Volder, *qui sequentia annotavit* (p). *Pondus vasis spherici vitrei aere admisso erat 7 libr. 1 Unc. 2 dr. 48 gr. aere educto, 7 libr. 1 Unc. 1 dr. 31 gr. aqua admissa 16 libr. 12 Unc. 7 dr. 14 gr. Erat igitur pondus aeris 1 dr. 12 gr. seu 77 gr. pondus aquæ 9 libr. 11 Unc. 5 dr. 43 gr. seu 74743 gr. consequenter ratio gravitatis specificæ inter aquam & aerem* $74743 : 77 = 970\frac{63}{77} : 1$. *Jam cum* Volderus *pedem cubicum aquæ deprehendisset 64 librarum, inferendo ut 970 ad 1 ita 64 libræ seu 1024 unc. ad numerum quartum proportionalem, per regulam trium pondus unius pedis cubici aerei* $506\frac{70}{97}$ *seu 507 gr. fere, hoc est 1 Unc. 0 dr. 27 gr. reperit. Testatur autem, se usum esse bilance, quæ, etiamsi vel 25 aut 30 libræ utrique imponerentur lanci, grano uno alterove addito demtove, in hanc illamve partem manifeste propenderet.*

PROBLEMA 6.

58. *Dato corporis cujuscunque volumine una cum pondere ejusdem in aere, invenire pondus ejusdem in vacuo.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Inveniatur pondus unius pedis cubici aeris (§. 54).
2. Per regulam trium ex eodem & volumine corporis dati investigetur pondus aeris mole huic æqualis (§. 130. *Mech.*).
3. Pondus hoc aeris subtrahatur a pondere corporis dato; quod relinquitur erit pondus ejusdem in vacuo (§. 55. *Hydrost.*) *Q. e. i. & d.*

E. gr.

(o) Experiment. de Vacuo lib. 3. c. 21. f. 161.
(p) in Quæstionibus Academicis de aeris gravitate thes. 52. p. 35. & seqq.

Digitized by Google

E. gr. Pondus unius pedis cubici aerei est 507 gr. (§ 55), pondus trium pedum cubicorum aquæ 210 librarum (§ 64. *Hydrost.*) seu 209 libr. 15 unc. 7 drach. 60 gran. Pondus trium pedum cubicorum aeris reperitur 1521 gr. seu 3. unc. 1 dr. 21 gr. Pondus adie trium pedum cubicorum aquæ in vacuo 209 lib. 12 unc. 6 dr. 39 gr.

PROBLEMA 7.

59. *Data basi columnæ atmosphæricæ invenire pondus ejus.*

RESOLUTIO.

1. Basis data multiplicetur per altitudinem columnæ aqueæ ipsi æquiponderantis (§. 28), ut habeatur volumen hujus columnæ (§. 539. 541).
2. Quæratur ad volumina unius pedis cubici & columnæ illius atque pondus unius pedis cubici aquæ numerus quartus proportionalis, qui erit pondus columnæ aqueæ atmosphæricæ æquiponderantis (§. 130. *Mech.*), hoc est, pondus ipsius columnæ atmosphæricæ quæsitum.

E. gr. Sit diameter circuli 100''', erit area 7850''' (§. 429. *Geom.*). Quia altitudo columnæ aqueæ 3100''' (§. 27); erit volumen ejus 24335'', consequenter, cum 1000'' sint 70 fere librarum (§. 64. *Hydrost.*) pondus ejusdem $1703\frac{45}{100}$ seu $1703\frac{9}{20}$ librarum. Circulus itaque, cujus diameter unius pedis, ab aere eadem vi premitur, ac si pondus 1703 librarum incumberet.

COROLLARIUM.

60. Quodsi diameter sphæræ fuerit unius pedis, basis columnæ atmosphæricæ incumbentis est circulus, cujus diameter unius pedis. Quare cum hemisphærium interius ab elatere aeris urgeatur, qui ponderi ejusdem columnæ æquatur (§. 31); hemisphæria comprimuntur vi 3407 librarum.

THEOREMA 7.

61. *Diversa plana premuntur ab aëre in ratione magnitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Pressio enim eadem, quæ foret, si aqua ad altitudinem 31 pedum Rhenanorum in plana subjecta gravitaret (§. 28), consequenter pressiones diversorum planorum ab aere factæ sunt in ratione planorum istorum (§. 573. *Geom.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

62. Quare si plana, quæ ab aere premuntur, fuerint circuli; in ratione duplicata diametrorum premuntur (§. 409. *Geom.*)

COROLLARIUM 2.

63. Quoniam aer premit secundum lineas rectas ad horizontale planum perpendiculares (§. 215. *Mechan.*), superficies quomodocunque convexa, vel concava, aut ex convexo, concavo & plano quo-

quomodocunque composita eadem premitur vi, qua premitur planum horizontale eidem subjectum, consequenter pressiones superficierum quarumcunque sunt ut plana horizontalia iisdem subjecta.

SCHOLION.

64. ***In hypothesi propositionis tacite supponitur situm planorum esse horizontalem: ex demonstratione autem apparet theorema cum suis corollariis ad omnem pressionem a fluido gravi factum extendi posse.***

CAPUT III.

DE

COMPRESSIONE AERIS.

PROBLEMA 8.

ab. 65. ***Aerem intra vas comprimere.***

ig.

RESOLUTIO.

1. Epistomio IHG respectu vasis clauso, respectu antliae vero aperto, embolus ex antlia pneumatica extrahatur: quo facto aer externus in cavitatem antliae ruet (§. 36).
2. Converso epistomio, ita ut communicatio inter vas & cylindrum detur, superius vero in I obturato, embolus iterum detrudatur: aer ex antlia in vas expelletur, quod cum jam aere alio sit plenum, novum intrusum recipere nequit, nisi facta utriusque compressione (§. 5.). Excipiet vero hospitio suo advenientem hunc hospitem, cum comprimi possit (§. 17).
3. Repetita igitur hac operatione, aer continuo magis magisque comprimitur. *Q. e. f.*

THEOREMA 8.

66. ***Aer primitivus est ad aerem in vase ope antliae pneumaticae dato agitationum emboli numero compressum ut capacitas vasis ad aggregatum ex capacitate vasis & facto capacitatis antliae in numerum agitationum emboli.***

DEMONSTRATIO.

Sit capacitas antliae $= a$, capacitas vasis $= v$, numerus agitationum emboli $= n$. Erit aer primitivus in antlia ad aerem in vase ut a ad v (§. 17. *Hydrost.*). Incrementum igitur massae in vase, dato nu-

numero agitationum emboli n est ut na, consequenter aer compressus ut $na + v$. Unde compressus ad primitivum ut $na + v$ ad v. Q. e. d.

COROLLARIUM.

67. Data igitur capacitate antliæ 580 & capacitate vasis 260, seu ratione illius ad hanc ut 2 ad 1, una cum numero agitationum emboli 3; reperitur ratio aeris compressi ad primitivum ut $6 + 1$ ad 1 seu ut 7 ad 1.

PROBLEMA 9.

68. *Data ratione aeris primitivi ad compressum una cum ratione capacitatis antliæ ad capacitatem vasis, invenire numerum agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum.*

RESOLUTIO.

Sit ratio aeris primitivi ad compressum $= p : c$, ratio antliæ ad vas $= a : v$, numerus agitationum emboli $= x$, erit (§. 66).

$$p : c = v : ax + v$$

$$cv = pax + pv$$

$$(cv - pv) : pa = x$$

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis dividatur per factum ev aere primitivo in capacitatem antliæ; quotus est numerus agitationum emboli ad istam compressionem efficiendam requisitarum. Sit e. gr. $p = 1, c = 7, v = 1, a = 2$; erit $x = 6 : 2 = 3$.

COROLLARIUM.

69. Quodsi fiat $p = v$, erit $x = (c-p) v : av = (c-p) : a$, hoc est, numerus agitationum emboli invenitur, si differentia aeris primitivi a compresso per capacitatem antliæ dividatur. Ita in nostro exemplo $x = (7 - 1) : 2 = 3$.

PROBLEMA 10.

70. *Data capacitate vasis, in quo aer comprimendus, una cum ratione, quam aer primitivus ad compressum habere debet, & numero agitationum emboli, quibus ista compressio effici jubetur, invenire capacitatem antliæ.*

RESOLUTIO.

Sit capacitas vasis $= v$, aer primitivus $= p$, compressus $= c$, numerus agitationum emboli $= n$, capacitas antliæ $= x$, erit (§. 66).

$$p : c = v : nx + v$$

$$cv = pnx + pv$$

$$(cv - pv) : pn = x$$

Quodsi fiat $p = v$; erit $x = (c - p) : n$.

Regula. Factum ex differentia aeris primitivi a compresso in capacitatem vasis dividatur per factum ex aere primitivo in numerum agitationum emboli compressionem efficientium, quotus erit ca-

capacitas antliæ quæsita. Quodsi aer primitivus fuerit ut capacitas vasis, ejus a compresso differentia tantum dividenda est per numerum agitationum emboli.

Sit e. gr. $v = 290$, $p : c = 1 : 7$, $n = 3$; erit $x = 6 . 290 : 3 = 2 . 290 = 580$.

COROLLARIUM.

71. Est ergo $pn : c - p = v : x$, hoc est, capacitas vasis ad capacitatem antliæ est in ratione composita aeris primitivi ad ejus a compresso differentiam & numeri agitationum emboli, quibus ista compressio efficitur, ad unitatem (§. 159. *Arithm.*).

PROBLEMA II.

72. *Invenire, utrum aer comprimatur in ratione ponderum, nec ne.*

RESOLUTIO.

Tab. . Fig. . 1. Assumatur tubus recurvus ABC, cujus brachium minus EC sit 12 circiter digitorum, majus AB 8 circiter pedum minori parallelum.

2. Brachium minus EC hermetice sigilletur in C, majus in A sit apertum: utrumque in particulas æquales dividatur.

3. Pars tubi BE Mercurio repleatur, ita ut CE sit aere primitivo plenus.

4. Hinc ulterius per orificium A successive plus Mercurii infundatur, notenturque altitudines, ad quas in utroque brachio Mercurius successive infusus pertingit.

Dico, si successive fuerint spatia in brachio minore super Mercurio reciproce ut differentiæ altitudinum, ad quas in brachio majore Mercurius successive subsistit, 28 digitis auctarum, & altitudinum, ad quas in minore Mercurius ascendit, aerem comprimit in ratione ponderum. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ab initio aer in brachio minore CE a pondere atmosphærico comprimitur (§. 21), quod æquatur cylindro Mercuriali 28 digitos alto (§. 29). Quare cum cylindri æqualium basium sint ut altitudines (§. 573. *Geom.*); tum volumina aeris reducti sunt ut altitudines spatiorum a Mercurio vacuorum in brachio minore EC, tum volumina Mercurii in brachio majore sunt ut altitudines, ad quas Mercurius ascendit. In aerem vero minori brachio inclusum præter pondus atmosphæricum volumina Mercurii gravitant, quorum altitudo est differentia inter altitudines, ad quas in brachio minore, & altitudines, ad quas in majore successive pertingit (§. 34 *Hydrost.*).

drost.). Quare pondera aerem inclusum comprimentia sunt ut differentiæ altitudinum, ad quas successive in brachio minore Mercurius ascendit, ab altitudinibus, ad quas in majore successive pertingit, 28 digitis auctæ (§. 18. *Hydrost.*). Quodsi adeo volumina aeris successive compressi in eadem ratione reciproca deprehendantur, aer omnino in ratione ponderum comprimitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

73. *Mariottus* (q) notavit, Mercurium in brachio majore AB 8 pedum ad altitudinem 18 digitorum ascendentem in minore 12 digitorum ad 4 digitorum altitudinem substitisse. Aeris itaque volumen cum a solo pondere atmosphærico premeretur, erat 12 digitorum; ast cum aer premeretur a pondere atmosphærico & a cylindro mercuriali 14 digitorum, hoc est, a pondere mercuriali 42 digitorum, erat volumen compressi 8 digitorum. Est vero 8 ad 12 ut 28 ad 42, nempe ut 2 ad 3. Similiter deprehendit, si in brachio minore Mercurius ad altitudinem 6 digitorum assurgat, altitudinem in majore esse 34. Volumen ergo aeris compressi est 6 digitorum, hoc est, subduplum ejus, quod habebat aer a solo pondere atmosphærico pressus. Ast pondus premens est 28 + 28, hoc est, duplum ponderis atmosphærici. Porro advertit, si altitudo Mercurii in brachio minore sit 9 digitorum, altitudinem in majore esse 93. Est itaque volumen aeris compressi 3 digitorum, hoc est, subquadruplum ejus, quod habebat a solo pondere atmosphærico compressus. Sed pondus premens tum est 84 + 28, hoc est, quadruplum ponderis atmosphærici. Evidens ergo per experimentum *Mariotti*, volumina aeris compressi esse reciproce ut pondera comprimentia.

SCHOLION 1.

74. *Idem experimentum succedit, si diameter brachii minoris* CE *multo major fuerit diametro minoris* AB (§. 34. Hydrost.): *curandum tamen, ut amplitudo illius sit uniformis, cum in demonstratione supponamus, partes quantaslibet tubi* CE *esse cylindros æqualium basium.*

SCHOLION 2.

75. *Probe autem notandum est, præter pondera comprimentia in voluminibus aeris, quæ inter se comparantur, cetera omnia paria esse debere, cavendumque, ne eandem compressionis legem ad diversa aeris volumina applicemus, in quibus præter pondera comprimentia aliorum quoque aerem alterantium datur disparitas: quoniam hoc in casu fieri potest, ut elateris in duobus voluminibus æqualibus atque ejusdem densitatis vires sint inæquales, adeoque & pondera compressionem aeris in utroque efficientia sint inæqualia* (553. Mechan.), *consequenter & duo volumina aeris æqualia* ...

(q) Essay de la Nature de l' Air p. 17. & seqq. s. Operum in Batavia recusorum Tom. I. p. 153.

ab iisdem ponderibus inaequaliter comprimantur. E. gr. Ponamus duo volumina aerea, in quibus ab initio cætera omnia paria; evidens est, quod paria pondera sustentare debeant. Ponamus porro alterum volumen actioni caloris exponi: rarefiet igitur (§. 23) *adeoque pondus premens propellet. Ut itaque aer ad pristinum volumen reducatur, majus imponendum erit pondus, quam quod dilatato incumbit. Ecce tibi duo volumina aeris inter se æqualia, cumque ab initio eandem densitatem habuerint*, per hypoth. *ejusdem densitatis, quæ tamen inæqualia pondera comprimentia sustinent.*

SCHOLION 3.

76. *Vana vero est objectio, quod admissa has compressionis lege sequatur, aerem eo usque comprimi posse, ut spatium occupet infinite parvum ejus respectu, quod ante compressionem obtinuerat, pondere scilicet in infinitum aucto. Nam ubi ad summum compressionis gradum pertingit, ponderi quantocunque prementi resistit, consequenter vi resistendi infinitæ æquipollet. Nec ideo vis elastica aeris in statu summæ compressionis viribus infinite variis æquatur* (§. 553. Mechan.); *sed minima earum, a quibus maxima compressio proficisci valet. Est enim vis minor pars majoris* (§. 20. Arithm.). *Quamobrem si vis elastica aeris in statu summæ compressionis & vi minori, & majori æqualis esset; pars toti æqualis foret: id quod absurdum* (§. 84. Arithm.). *Cum adeo vis elastica in statu summæ compressionis infinita non sit, explicandum est, quomodo vi resistendi infinitæ æquipolleat. Scilicet si majus pondus aeri incumbere supponamus, quam ad summam compressionem efficiendam sufficit; excessus ponderis non amplius ad comprimendum aerem, sed ad compressum loco pellendum impenditur. Ut igitur non expellatur corpora aerem compressum ambientia vi resistendi prædita esse debent, quæ toti ponderi incumbenti æquatur. Utut enim pondus incumbens non omnem vim, qua premit, ad aerem compressum expellendum adhibeat; corpora tamen motum impedientia & vi elastica aeris impressi & vi eidem impressa urgentur, quæ simul sumta vim ponderis prementis adæquant.*

SCHOLION 4.

77. *Idem experimentum cum successu repetierunt* Robertus Boyle (r) & Amonton (s); *hicque in voluminibus aeris majoribus.*

THEOREMA 9.

78. *Elater aeris compressi est ad elaterem dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi.*

DEMONSTRATIO.

Elater aeris magis compressi est ad elaterem minus compressi ut pondus isti incumbens ad pondus huic impositum (§. 553. *Mechan.*).

 Enim-

(r) in defensione doctrinæ de elatere & gravitate aeris contra Linum part. 2. c. 5. p. m. 42. & seqq.

(s) Memoires de l'Academie Royale des Sciences A. 1705. p. m. 155. & seqq.

Digitized by Google

Enimvero in ratione horum ponderum est quoque reciproce volumen aeris minus compressi ad volumen aeris magis compressi (§. 71). Ergo & elater magis compressi est ad elaterem minus compressi seu dilatati uti reciproce volumen dilatati ad volumen compressi (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

79. Elater igitur aeris magis compressi fortior est, quam elater minus compressi.

THEOREMA 10.

80. *Elater aeris magis compressi est ad elaterem minus compressi, cæteris paribus, ut massa aeris magis compressi ad massam aeris minus compressi sub eodem volumine contenti.*

DEMONSTRATIO.

Si aer comprimitur in spatium subduplum, subtriplum, subquadruplum &c. erit aeris primitivi duplus, triplus, quadruplus &c. in spatio simplici. Ast in spatium subduplum a duplo; in subtriplum a triplo; in subquadruplum a quadruplo &c. pondere comprimitur (§. 71). Ergo in æqualibus voluminibus massæ aeris diversimode compressi in ratione ponderum comprimentium existunt, consequenter cum in eadem ratione sit elater aeris magis & minus compressi (§. 553. *Mech.*); elater aeris magis compressi ad elaterem minus compressi est ut massa illius ad massam hujus sub æquali volumine (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

81. *Data ratione voluminis, quod replet aer a solo pondere atmosphærico pressus, ad spatium, in quod redigitur ulterius compressus, determinare vim elasticam compressi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aeris a solo pondere atmosphærico pressi æquetur ponderi columnæ mercurialis eandem cum volumine aeris basin, sed altitudinem 28 digitorum habentis (§. 29); si ad volumen compressi, volumen nondum compressi & pondus istius columnæ mercurialis quæratur numerus quartus proportionalis, designabit is quantitatem vis elasticæ in aere compresso (§. 78).

COROLLARIUM.

82. Quodsi pondus columnæ mercurialis istius a quantitate vis elasticæ inventa subducatur; relinquitur vis elateris, qua resistentiam ponderis atmosphærici superat.

PRO-

PROBLEMA 13.

83. *Dato effectu, quem producit aer a solo pondere atmosphærico pressus, aut in certo compressionis gradu, invenire effectum, quem producturus est in alio quocunque compressionis gradu.*

RESOLUTIO.

Cum effectus sint viribus productricibus proportionales (§. 530 *Mechan.*), vires vero productrices in nostro casu sint reciproce ut volumina in diversis compressionis gradibus (§. 78); si effectus, quem elater aeris in certo compressionis gradu producit, detur, effectus in alio quocunque producendus invenietur inferendo: ut volumen aëris magis compressi ad volumen minus compressi ita effectus ab hoc producendus ad effectum illius.

SCHOLION.

84. *Idem problema quoque solvitur per analogiam theor. 12. (§. 80).*

PROBLEMA 14.

85. *Dato effectu, quem producit aer a solo pondere atmosphærico pressus, determinare alium compressionis gradum, in quo idem producat intra atmosphæram effectum quemcunque majorem datum.*

RESOLUTIO.

Sit effectus minor $= a$, major $= b$, volumen aëris minus compressi $= c$, volumen magis compressi $= x$. Cum alter effectus intra atmosphæram resistentem sit producendus & integer tamen desideretur, quærenda erit compressio, quæ in vacuo effectum produceret æqualem aggregato ex effectu desiderato & effectu, quem aer a solo pondere atmosphærico pressus in vacuo produceret. Erit adeo effectus ab aere compresso producendus $= a + b$, consequenter $a + b : a = c : x$, hoc est, ut aggregatum ex effectu aeris a solo pondere atmosphærico pressi & effectu ab aere in quæsito compressionis gradu intra atmosphæram producendo ad effectum aeris a solo pondere atmosphærico pressi, ita volumen aeris a solo pondere atmosphærico pressi ad volumen aeris in quæsito compressionis gradu (§. 78): quod adeo per regulam trium invenitur.

SCHOLION.

86. *Eodem modo problema resolvitur ope theorematis 12. (§. 80).*

CA-

CAPUT IV.

DE ÆQUILIBRIO AERIS CUM ALIIS FLUIDIS SPECIFICE GRAVIORIBUS.

DEFINITIO 9.

Tab. I. Fig. 5. 87. Per *Tubum Torricellianum* intelligo tubum vitreum AB Mercurio repletum, cujus osculum superius A hermetice sigillatum, inferius B stagnanti in vasculo CD Mercurio immersum.

SCHOLION.

88. *Vocatur istiusmodi tubus* Torricellianus *ab inventore* Torricello (§.29).

DEFINITIO 10.

89. *Barometrum* est instrumentum, quo gravitatem aeris metiri licet. *Baroscopium* vero est instrumentum, quod variationes gravitatis aeris confuse indicat.

SCHOLION.

90. *Vulgo pro synonymis habent has voces: sed mihi e re esse videtur eas distinguere, cum aliud utique sit saltem cognoscere, aerem hoc tempore esse graviorem, quam altero; aliud vero scire, quoties gravitas atmosphæræ hac die superet gravitatem illius anteriorem: posterius vero constare debet, si gravitatem aeris metiaris* (§. 21. Geom.).

THEOREMA 11.

91. *In tubo Torricelliano major columna Mercurii suspenditur in locis profundioribus, quam in altioribus.*

DEMONSTRATIO.

Columna Mercurii suspensa æquatur columnæ aereæ, cujus eadem cum ista basis, sed altitudo a superficie Mercurii in vasculo stagnantis usque ad extremitasem atmosphæræ exporrigitur (§.36. *Hydrost.*). In locis vero altioribus columnæ aereæ altitudo minor, quam in profundioribus adeoque & ipsa columna in his gravior, quam in istis, consequenter minor columna Mercurii columnæ aereæ in locis altioribus æquiponderat, quam in profundioribus. *Q.e.d.*

SCHOLION.

92. *Veritatem hujus theorematis experientia confirmarunt plurimi. Primus de eo cogitavit* Pascalius, *qui phænome-*

nomena tubi Torricelliani maxima cum solertia scrutatus est in Tractatu de aquilibrio liquorum.

THEOREMA 12.

93. *Si in tubo Torricelliano aeris quædam quantitas super Mercurio, & in genere in vase quocunque, cujus orificium apertum fluido immersum super fluido relinquatur; Mercurius vel fluidum quodcunque alterum ad minorem altitudinem suspenditur, quam si vacuus fuerit, & pondus fluidi suspensi æquatur differentiæ elateris aëris inclusi a pondere atmosphærico.*

DEMONSTRATIO.

Cum ab initio aeris inclusi elater solus ponderi atmosphærico æquetur (§. 33); Mercurius vi gravitatis propriæ descendere incipit. Ast dum descendit, aer inclusus dilatatur (§. 36) adeoque elater ejus minori, quam ponderi atmosphærico æquilibratur (§. 79). Tantum igitur Mercurii aut fluidi cujuscunque alterius in tubo vel vase remanere debet, quantum differentiæ elateris aeris inclusi a pondere atmosphærico æquilibratur, consequenter Mercurius ad minorem altitudinem suspenditur, quam si tubus ab aere vacuus extitisset. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

94. Aer igitur in tubo Torricelliano inclusus rarior ambiente externo & ejus elater æquatur differentiæ ponderis Mercurii suspensi a pondere atmosphærico (§. 36 *Hydrost.*).

COROLLARIUM 2.

95. Hinc liquet, si vas exiguo orificio instructum, nec aqua aut alterius generis liquore prorsus plenum, digito ad orificium applicato, ita invertatur, ut orificium sit horizontale; cur remoto digito ab initio quædam liquoris gutta effluat, reliquus vero intus remaneat: item cur idem eveniat in vase quocunque alio quantumvis amplo, si orificio folium chartaceum imponas, dum illud invertis.

PROBLEMA 16.

96. *Data ratione altitudinis fluidi in tubo ab omni aëre prorsus vacuo ad altitudinem, qua gaudet, si tubi aliqua pars aëre repleatur, una cum volumine aëris dilatati, invenire volumen aëris primitivi.*

RESOLUTIO.

Cum elater aëris primitivi æquetur ponderi fluidi in tubo vacuo suspensi (§. 33), adeoque elater dilatati differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 94), pondera vero fluidi sint ut volumina (§. 130. *Mechan.*), volumina ut altitudines (§. 573. *Geom.*); erit ut altitudo fluidi in

tubo vacuo ad differentiam altitudinis in tubo non vacuo a priore, ita volumen aeris dilatati ad volumen primitivi (§. 78): quod adeo per regulam trium invenitur. *Q. e. d.*

E. gr. Sit altitudo fluidi in tubo vacuo 28, in tubo non vacuo 14, volumen aeris dilatati 25, erit volumen primitivi $(28-14)\,25 : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$. Quæ prorsus consona sunt experimento *Mariotti* (t).

PROBLEMA 17.

97. ***Data altitudine fluidi in tubo vacuo & ratione voluminis aeris primitivi ad volumen dilatati, invenire altitudinem ejusdem fluidi in tubo non vacuo.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $=a$, altitudo in non vacuo $=x$, volumen aëris primitivi $=b$, dilatati $=c$, erit (§. 96).

$$a : a-x = c : b$$
$$x : a = c-b : c \text{ (§. 193. Arith.)}.$$

Inveniri adeo debet numerus quartus proportionalis ad volumen aëris dilatati, differentiam voluminis primitivi a volumine dilatati & altitudinem in tubo vacuo.

Sit e. gr. $a=28$, $b=12\frac{1}{2}$, $c=25$; erit $x=(25-12\frac{1}{2})\,28 : 25 = 350 : 28 = 14$.

PROBLEMA 18.

98. ***Datis altitudine fluidi in tubo vacuo & volumine aeris primitivi, invenire volumen dilatati & altitudinem fluidi in tubo non vacuo datæ altitudinis.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $=m$, altitudo tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis $=a$, altitudo voluminis aëris primitivi $=b$, dilatati $=x$, erit altitudo fluidi in tubo non vacuo $=a-x$, consequenter

$$m : m-a+x = x : b \text{ (§. 96).}$$

$$bm = mx - ax + x^2$$

hoc est, si fiat $a-m=d$

$$bm = x^2 - dx$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 \quad \tfrac{1}{4}d^2$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 + bm = x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2$$

Ergo $\frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + bm)} = x$.

Regula. 1. Quadrato semidifferentiæ altitudinis fluidi in tubo vacuo ab altitudine tubi ultra libellam fluidi in vase stagnantis addatur factum ex eadem altitudine fluidi in altitudinem voluminis aeris primitivi. 2. Ex facto extrahatur radix quadrata, & 3. huic adda-

(t) Essay de la nature de l'air p. 23. & seqq.

addatur semidifferentia paulo ante memorata. Erit aggregatum altitndo voluminis aeris dilatati. E. gr. sit $a = 29$, $m = 28$, erit $d = 11$, $\frac{1}{2}d = 5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}dd = \frac{121}{4}$. Sit $b = 12\frac{1}{2}$, erit $bm = 350$, adeoque $\frac{1}{4}dd + bm = \frac{121}{4} + 350 = \frac{1521}{4}$, consequenter $\sqrt{(\frac{1}{4}dd + bm)} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$: unde $x = 5\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 25$.

PROBLEMA 19.

99. ***Data altitudine fluidi in tubo vacuo, altitudine tubi ultra libellam fluidi in vasculo stagnantis & altitudine fluidi in tubo non vacuo, invenire altitudinem voluminis aëris primitivi.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo fluidi in tubo vacuo $= m$, in tubo non vacuo $= n$, altitudo tubi $= a$, altitudo aëris primitivi $= x$, erit altitudo dilatati $= a - n$, consequenter (§. 96)

$$m : m - n = a - n : x$$

Invenietur adeo x, quærendo ad altitudinem fluidi in tubo vacuo, differentiam altitudinis in non vacuo a priore & differentiam altitudinis fluidi in tubo non vacuo ab integra altitudine tubi numerum quartum proportionalem.

Sit e. gr. $m = 28$, $n = 14$, $a = 39$, erit $x = (39 - 14)(28 - 14) : 28 = (25 . 14) : 28 = 350 : 28 = 12\frac{1}{2}$.

PROBLEMA 20.

100. ***Determinare quantitatem liquoris effluentis, si vas exigui orificii non plenum invertatur.***

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aëre sustentatur (§. 36. *Hydrost.*).
2. Quoniam porro datur altitudo fluidi in vase atque altitudo totius vasis *per hypoth.* reperietur volumen aëris dilatati (§. 98). Unde si
3. Subducatur volumen aëris primitivi, relinquetur quantitas liquoris expellendi, si vas invertatur (§. 95).

THEOREMA 13.

101. ***Si vasis ab aëre prorsus evacuati, cujus altitudo non excedit altitudinem columnæ liquoris atmosphæræ æquiponderantis, orificium intra aquam aut alterius generis fluidum demergatur, demersumque aperiatur, liquor ascendens totum replebit: ast si non prorsus evacuatum fuerit, minus spatium liquor ascendens occupabit, quam aëris primitivi educti quantitas repleverat.***

DEMONSTRATIO.

Cum enim liquor undiquaque circa orificium vasis demersum a pondere atmosphæræ prematur (§. 21), sub orificio autem vasis aper-

Digitized by Google

aperto nulla sit aëris pressura, quia ab aëre prorsus vacuum supponitur; tantum liquoris intra vas ascendere debet, quantum sufficit ad pressuram ei æqualem efficiendam, quæ a pondere atmosphærico efficitur (§.35. *Mechan.*). Sed vasis altitudo liquoris atmosphæræ æquiponderantis altitudinem non excedit, *per hypoth.* Ergo pressura æqualis presuræ ponderis atmosphærici a liquore intra vas contento effici nequit, nisi totum repleatur. Totum ergo replebitur. *Quod erat unum.*

Quodsi quædam aëris portio residua fuerit, ea super liquore ingrediente constituta rarior sit necesse est quam aer primitivus (§. 49). Majus ergo spatium occupat, quam cum primitivo adhuc jungeretur (§. 10. *Hydrost.*). Quoniam adeo nonnisi spatium reliquum a liquore occupatur, evidens est, liquorem ascendentem minus spatium vasis replere, quam aeris primitivi educti quantitas repleverat. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

102. Schottus *autor est* (u), *cum Herbipoli experimentum sæpius iteraretur, rem nunquam eo adduci potuisse, ut etiam minore vase adhibito omnem excluderent aerem. Equidem cum aqua in vas irrumpens spumescat, ipse id indicium irruentis aeris pronunciat, ignarus unde adveniat aut oriatur; alii rectius ab expansione aeris intra aquam latentis idem phænomenon deducunt, atque hinc aeris super liquore constituti originem derivant. Enimvero quemadmodum forte negari nequit, quod hac ratione aer in vase residuus aliquod capiat incrementum, ita rationi consentaneum videtur, non omnem aerem ope antliæ ex vasis educi, quia aer ad summum expansionis gradum perductus non amplius evacuatur, moleculis paucis dispersis etheri subtiliori & leviori innatantibus, quemadmodum massulæ metallicæ in fluidis specifice levioribus natare solent, ut taceam massulas aereas, quæ ab eminentiolis in superficie vitri non secus ac aliorum fluidorum guttulæ fulciuntur. Sæpius tamen diverso tempore diversis quoque vasis repetito experimento didici, perexiguum esse aeris, quod super liquore constitutum deprehenditur, vase summa cum diligentia evacuato.*

PROBLEMA 21.

103. *Data altitudine vasis evacuati & altitudine liquoris in ipsum ingressi, invenire volumen aeris primitivi educti.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur altitudo, ad quam liquor datus in vase vacuo ab aere sustentatur (§. 36. *Hydrost.*)

2. Quo-

(u) in Techn. curiosa lib. 1. c. 3. p. 14.

2. Quoniam porro datur altitudo vasis evacuati & altitudo liquoris ipsum ingressi, invenietur volumen aeris primitivi (§.99).

COROLLARIUM.

104. Quodsi quantitas aeris educti quæratur per probl. præs. eademque adhuc alia ratione inveniatur (§. 51), atque eadem utrobique reperiatur; certum id erit indicium, nihil aeris ex aqua irruente in summitatem vasis ascendisse.

SCHOLION.

105. *Dubito tamen, num hæ subtilitates in praxi satis discerni queant.*

PROBLEMA 22.

Tab. I. Fig. 6. 106. *Si vas quoddam* ABCD *aperto orificio* CD *sub aqua aut alio liquore perpendiculariter demergatur, quo profundius mergitur, eo magis aer in eodem comprimitur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aer aqua aliisque fluidis levior existat (§ 55), si vas AB CD perpendiculariter demergitur, ex eodem egredi nequit, quia in aqua descendere deberet, quod fieri nequit (§.99. *Hydrost.* Jam elater aeris inclusi aquam subjectam eadem vi premit, qua pondus atmosphæricum (§. 33), aqua vero in eadem libella circa orificium vasis præter pondus atmosphæricum etiam aqua super ea in vase stagnante premitur. Magis ergo premitur circa orificium vasis CD, quam sub eodem, consequenter cum aer intra vas adhuc compressibilis existat (§. 17) & in ratione ponderum compressionem patiatur (§. 73); aliqua liquoris quantitas intra vas ascendere debet, eoque major quo profundius mergitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

107. *Veritatem theorematis experientia confirmat. Inprimis huc pertinent phænomena campanæ urinatoriæ a* Sturmio (x) *enarrata & experimento illustrata.*

THEOREMA 14.

108. *Iisdem positis, quæ in propositione præcedente, elater aeris in vase* ABCD *compressi, una cum pondere liquoris in ipsum ingressi æquatur aggregato ex pondere atmosphæræ & pondere columnæ ejusdem fluidi, quæ eandem cum fluido ultra libellam orificii* CD *in vase* FG *stagnante altitudinem habet.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Aer in vase ABCD adhuc compressibilis existit (§. 17): tamdiu

(x) Colleg. Curios. part. 1. Tent. 1. & seqq.

Digitized by Google

taque vi prementi cedit, donec eadem in fluidum ſub orificio CD preſsura efficiatur, quam circumcirca efficit aggregatum ex pondere atmoſphærico & columna fluidi eandem cum vaſe baſin eandemque cum fluido ultra libellam orificii vaſis CD in vaſe FG ſtagnante altitudinem habente (§. 75. *Mechan.*). Sed preſsura in aquam ſub orificio CD fit ab elatere aeris in vaſe ABCD compreſsi & pondere fluidi intrantis (§. 34 & 10). Quare elater aeris in vaſe ABCD compreſsi una cum pondere fluidi intrantis æquatur &c. *Q. e. d.*

PROBLEMA 23.

Tab. I, Fig. 6. 109. ***Data gravitate fluidi ultra libellam orificii vaſis* CD *conſiſtentis una cum volumine ejus & volumine aeris primitivi cavitatem vaſis* ABCD *implentis, invenire volumen aeris compreſsi & fluidi in vas intrantis.***

RESOLUTIO.

Sit gravitas fludi $= g$, ejus volumen $= c$, pondus atmoſphæricum $= a$, volumen aeris primitivi $= b$, volumen fluidi in vas aſcendentis $= x$, erit volumen compreſsi $= b - x$. Jam cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmoſphærico (§. 33), reperietur elater aeris compreſsi $= ab:(b-x)$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum ſunt ut volumina (§. 130. *Mechan.*); reperietur gravitas fluidi in vas aſcendentis $= gx : c$. Habemus ergo

$$ab:(b-x) + gx:c = g + a \quad (\S. 108).$$

$$abc + bgx - gx^2 = bgc + abc - gcx - acx$$

$$x^2 - bx - cx - acx:g = -bc$$

hoc eſt; ſi fiat $b + c + ao:g = d$

$$x^2 - dx = -bc$$

$$\tfrac{1}{4}dd \quad \tfrac{1}{4}dd$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}da = \tfrac{1}{4}dd - bc$$

$$\tfrac{1}{2}d - x = V(\tfrac{1}{4}da - bc)$$

$$x = \tfrac{1}{2}d - V(\tfrac{1}{4}da - bc)$$

Regula. 1. Aggregato ex volumine aeris primitivi & volumine fluidi ſuper libellam orificii vaſis ſtagnantis addatur numerus quartus proportionalis ad gravitatem hujus fluidi, pondus atmoſphæricum & volumen ejusdem fluidi. 2. Ab hujus novæ ſemiſummæ quadrato ſubtrahatur factum ex volumine aeris primitivi in volumen fluidi ultra libellam orificii vaſis ſtagnantis. 3. Ex reſiduo extrahatur radix quadrata, quæ ſi 4. a ſemiſumma ſupra inventa ſubtrahatur, relinquetur volumen fluidi in vas aſcendentis.

COROLLARIUM 1.

110. Cum pondus liquoris vas intran-

trantis sit $gx : c$; idem substituto valore ipsius x, reperitur $= (\frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}dd - bc)})\, g : c$.

COROLLARIUM 2.

111. Et quia elater aeris in vase compressi est $ab : (b - x)$, idem substituto valore ipsius x, reperitur $= ab : (b - \frac{1}{2}d + \sqrt{(\frac{1}{4}dd - bc)})$.

PROBLEMA 24.

Tab. I. Fig. 6. 112. ***Data profunditate vasis seu altitudine aeris primitivi in ejus cavitate contenti, invenire profunditatem, ad quam intra fluidum datæ gravitatis orificium* CD *deprimendum, ut volumen aeris compressi habeat ad volumen aeris primitivi rationem datam.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo voluminis aeris primitivi $= b$, pondus atmosphæricum $= a$, gravitas fluidi $= g$, ejus altitudo super libella orificii $= x$, altitudo aeris compressi $= c$, erit altitudo liquoris vas intrantis $= b - c$. Cum elater aeris primitivi æquetur ponderi atmosphærico (§. 33); reperietur elater compressi $= ab : c$ (§. 78). Et quoniam gravitates corporum homogeneorum sunt ut volumina (§. 133 *Mechan.*), erit gravitas fluidi in vas ascendentis $= (bg - gc) : x$. Ergo

$$ab : c + (bg - gc) : x = a + g$$

$$abx + bgc - gc^2 = acx + gcx$$

$$bgc - gc^2 = acx + gcx - abx$$

$$(bgc - gc^2) : (ac + gc - ab) = x$$

Theorema. Ut differentia facti ex pondere atmosphærico in altitudinem aeris primitivi a facto ex aggregato ponderis atmosphærici & gravitatis fluidi in altitudinem aeris compressi ad gravitatem fluidi, ita differentia quadrati altitudinis aeris compressi a facto ex eadem in altitudinem primitivi ad profunditatem orificii CD vasis sub fuido demersi.

SCHOLION.

113. *Hactenus supposuimus, aerem, dum comprimitur, cum ambiente externo catera paria habere. Enimvero quando aqua frigidior aere ambiente, aer in vase condensatur (§. 24). Dispiciendum itaque, quamnam mutationem frigus inducat.*

PROBLEMA 25.

114. ***Datis capacitate vasis, hoc est, volumine aeris primitivi, volumine fluidi demersum ingressi & volumine fluidi supra orificii vasis libellum stagnantis, unu cum pondere atmosphærico, invenire rationem voluminis aeris compressi tantum ad volumen compressi & condensati simul.***

RE-

RESOLUTIO.

Ex datis inveniri poteſt volumen aeris compreſſi (§. 105) &, ſi volumen fluidi vas ingreſſi a volumine aeris primitivi ſubducitur, manifeſtum eſt, relinqui volumen aeris compreſſi & condenſati ſimul. Cum igitur in numeris habeatur tam volumen aeris compreſſi tantum, quam volumen aeris & compreſſi & condenſati, illius ad hoc ratio latere nequit, *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

115. Quodſi volumen aeris compreſſi & condenſati ſubtrahatur ex volumine aeris compreſſi tantum, relinquetur pars voluminis, quæ condenſationem metitur.

COROLLARIUM 2.

116. Quodſi contingat, hanc differentiam eſſe nullam; vel aer ambiens non erit calidior aqua, vel aer compreſſus ab iſto frigoris gradu nullam patiatur neceſſe eſt condenſationem.

COROLLARIUM 3.

117. Quodſi differentia aliqua prodeat, evidens eſt, aerem compreſſum adhuc condenſatum & ſpatium a compreſſo in condenſatione derelictum a fluido aſcendente repletum fuiſſe. Elater igitur aeris compreſſi facta condenſatione decrevit & hoc decrementum æquatur ponderi fluidi in ſpatio derelicto contenti (§. 93).

SCHOLION 1.

118. *Suppoſuimus in hactenus demonſtratis propoſitionibus vaſa eſſe cylindrica vel priſmatica: alias enim prolixiore ſubinde opus fuiſſet calculo.*

SCHOLION 2.

119. *Nec difficulter intelligitur, quæ in problemate præſente de aere condenſato demonſtrata ſunt, ad rarefactum quoque transferri poſſe, ſi vas in fluido calidiore, quam aer ambiens, demergatur.*

THEOREMA 15.

120. *Si pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius in tubo Torricelliano deſcendere; ſi illud augetur, hic aſcendere debet.*

DEMONSTRATIO.

Etenim columna Mercurialis intra tubum Torricellianum ſuſpenſa æquatur ponderi atmoſphærico (§. 29). Quare ſi pondus atmoſphæræ minuitur, Mercurius fortius deorſum nititur, quam pondus atmoſphæræ reſiſtit. Tanta igitur ejus portio ex tubo effluere debet, quanta differentiæ ponderis columnæ Mercurialis & ponderis atmoſphærici æquatur (§. 73. *Mechan.*). Quare ſi volumen Mercurii minuitur, in tubo utique deſcendere debet. *Quod erat unum.*

Similiter demonſtratur, ponde-

re

re atmosphærico aucto, Mercurium in tubo Torricelliano ascendere debere. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

121. Cum altitudo Mercurii in tubo Torricelliano quotidie variet, experientia teste; aëris quoque gravitas quotidie varietur opus est.

SCHOLION 1.

122. *Mathematici Parisienses maximam Mercurii altitudinem* $28'' 4'''$, *minimam* $26'' 4'''$ *observarunt, ut adeo omnis variatio intra* $2''$ *seu* $24'''$ *pedis Parisini comprehendatur. A.* 1711. *d.* 23. *Dec. apud nos flante Coro & cælo nubilo altitudo maxima fuit* $30''\frac{1}{8}$ *pedis Londinensis, d.* 21. *Octobr. h.* 7. *mat. minima vix excessit* 28 *digitos pedis Londinensis, flante Zephyro & tempestate pluviali, cum nocte præcedente procella sæviisset. Nec memini, me intra quinquennium, ex quo tales observationes annotavi, unquam majorem vel etiam minorem altitudinem Mercurii deprehendisse. Tota igitur variationis scala non excedit* $2\frac{1}{8}$ *digitos pedis Londinensis, qui cum deficiat a Parisino* $\frac{9}{144}$ (§. 26 Geom); *observationes nostræ cum Parisinis satis conspirant,*

SCHOLION 2.

123. *Equidem celeberrimus* Hallejus (y) *cum globum vitreum collo tenui instructum & Mercurio plenum aqua ad ignem ebullienti immitteret, volumen ejus* $\frac{1}{74}$ *sui crescere observavit, atque adeo hinc constat, Mercurium rarefieri iterumque condensari* (§. 6. 8). *Quoniam tamen incrementa & decrementa Mercurii calori atque frigori proportionalia non sunt, nec caloris mutationibus ullatenus obtemperant, immo maxima plerumque hieme observantur* (§. 112); *variationes ejus a calore ac frigore minime pendent.*

THEOREMA 16.

124. *Si tubus recurvus* ABC *in* A *hermetice sigillatus, in* C *vero apertus ut Torricellianus Mercurio repletur, erit variatio altitudinis Mercurii in crure longiore* AB *ob variatum pondus atmosphæræ subdupla variationis altitudinis Mercurii in tubo Torricelliano ex eadem causa contingentis.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Altitudo enim Mercurii in brachio majore atmosphæræ æquiponderantis semper computanda est a superficie Mercurii in crure minore BC stagnantis (§. 34. 36. *Hydrost.*). Ponamus jam Mercurium in crure minore CB consistere ad E, in majore AB ad D, sitque HD = 16''. Aucta atmosphæræ gravitate, Mercurius ascendat ex D in F (§. 120): tum ex E descen-

(y) Philos. Transact. n. 197. p. 650.

det in G, eritque ſuppoſitis tuborum CB & BA diametris æqualibus EG = DF. Ponamus eſſe EG = 1'', erit IF = 28''. Quare ſi in tubo Torricelliano Mercurius aſcendit per 2, in tubo recurvo nonniſi ex D in F, hoc eſt per 1'', aſcendit. Eſt ergo variatio altitudinis Mercurii ob mutatum pondus atmoſphæricum in iſtiusmodi tubo recurvo contingens ſubdupla variationis altitudinis Mercurii ex eadem cauſa in tubo Torricelliano contingentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

125. Quia vaſculum, cui tubus Torricellianus immittitur, cruri breviori reſpondet; evidens eſt, illud tam amplum eſſe debere, ut Mercurius ex tubo per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non ſenſibiliter augeat, e. gr. non niſi dimidia lineola. Ita enim Mercurius in tubo per unam lineam aſcenſurus propter hoc impedimentum nonniſi per lineam parte ſui quadrageſima octava mulctatam ($1''' - \frac{1}{48}$) aſcendet (§. 122): quæ differentiola vix notabilis.

COROLLARIUM 2.

126. Cum ſcala integra, per quam Mercurius in tubo Torricelliano vaſculo ſatis amplo aſcendere ac deſcendere ſoler, vix 24 lineas adæquet (§. 122); in tubo recurvo eadem erit non niſi 12 linearum ſeu digiti unius.

PROBLEMA 26.

127. *Data integra ſcala, per quam aſcendit & deſcendit Mercurius in tubo Torricelliano, una cum diametro tubi, invenire diametrum vaſculi, in quo ſi tubus contineatur, Mercurius ex eo delapſus non impediat, quo minus mutationes ſatis notabiles exiſtant.*

RESOLUTIO.

Totum negotium huc redit, ut impediatur, quo minus Mercurius ex tubo delapſus Mercurii in vaſculo ſtagnantis altitudinem augeat, cum tantum altitudini in tubo decedat, quantum accedit altitudini Mercurii in vaſculo, ex demonſtratione theorematis 16 (§. 124). Id autem obtinetur, ſi ea ſit vaſculi amplitudo, ut Mercurius per integram ſcalam delapſus altitudinem in vaſculo ſtagnantis non niſi dimidia lineola augeat (§. 125).

Sit itaque ſcala Mercurialis in tubo Terricelliano = a, diameter tubi = b, erit ſuppoſita ratione diametri ad peripheriam = $d : p$, cylindrus Mercurialis intra ſcalam continendus = $pb^2a : 4d$ (§. 541. *Geom.*). Sit porro diameter vaſculi = x, cum altitudo cylindri, in quem in id delapſus

Mer-

Mercurius abire debet, sit dimidiæ lineolæ $= m$; erit soliditas ejusdem $= mpx^2 : 4d$ (§. *cit.*), consequenter

$$mpx^2 : 4d = pb^2a : 4d$$

$$mx^2 = ab^2$$

$$x^2 : b^2 = a : m \text{ seu } x : b = \sqrt{a} : \sqrt{m}$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi in ratione subduplicata scalæ Mercurialis in tubo ad altitudinem ejus delapsi in vasculo, hoc est ut $\sqrt{8}$ ad 1 (§. 125), seu $2\sqrt{2}$ ad 1.

COROLLARIUM.

128. Si $b = m$; erit $x = \sqrt{ab}$, hoc est, diameter vasculi est media proportionalis inter altitudinem scalæ & diametrum tubi, si Mercurius ex integra scala delapsus in vasculo ascendere debet ad altitudinem diametro tubi æqualem.

PROBLEMA 27.

129. *Datis diametris tubi & vasculi, una cum altitudine intervalli, per quod Mercurius in tubo descendit, invenire altitudinem intervalli, per quod ascendit in vasculo & contra.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, diameter vasculi $= b$, altitudo descensus, $= c$, altitudinis Mercurii in vasculo incrementum $= x$, erit (§. 127)

$$a^2pc : 4d = b^2px : 4d$$

$$a^2c = b^2x$$

$$x : c = a^2 : b^2$$

Theorema. Incrementum altitudinis Mercurii in vasculo est ad intervallum descensus in tubo, uti reciproce quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi.

COROLLARIUM.

130. Ergo si Mercurius descendit per quodcunque intervallum c, erit verum descensus intervallum $= c + a^2c : b^2$.

PROBLEMA 28.

131. *Baroscopium construere.*

RESOLUTIO.

1. Tubus vitreus AB, cujus diameter unius circiter lineæ, hermetice sigillatus in A & 36 digitis Rhenanis non brevior, Mercurio ita repleatur, ut nihil aeris super eo relinquatur, nec ulli vesiculæ inter parietem vitri & Mercurium locus concedatur: id quod optime succedit ope infundibuli vitrei tubulo capillari instructi. Tab. II. Fig. 8.

2. Orificium tubi ita repleti, ut Mercurius ex eo redundet, digito fortissime appresso, ne intra eum & Mercurium aeris quidpiam remaneat, Mercurio

in vasculo ligneo, cujus diameter per probl. 26. (§. 127) determinanda, ita immergatur, ut fundum non attingat.

3. Intervallo a superficie Mercurii in vasculo stagnantis 26 digitorum Rhenanorum affigantur ab utroque tubi latere lamellæ CE & DF in duos digitos divisæ, qui rursus in 12 lineas aut particulas quotcunque æquales alias subdividendi.

4. Tubus denique, ne facile frangatur, canaliculo in tabula LM exciso indatur & superius alio tegatur, ut ex conspectu figuræ haud difficulter apparet.

Quoniam tubus hic idem est cum Torricelliano (§. 87); baroscopium utique erit hac ratione constructum (§. 89. 120).

SCHOLION 1.

132. *Non opus esse, ut vasculum ligneum, in quo Mercurius stagnat, sit apertum, & evidenti experimento* (z) *docui, & propria experientia didici. Meum enim baroscopium non modo vasculum habet undiquaque probe clausum; sed præterea thecæ alteri ligneæ includitur, vix quicquam aeris externi ad superficiem vasculi admittenti. Hoc tamen non obstante mutationes in altitudine Mercurii consueta ratione contingunt.*

SCHOLION.

133. *Non defuere, qui in eo operam suam collocarunt, ut mutationes sensibiliores efficerent.* Cartesius *primum, postea quoque* Hugenius, *commendarunt tubum* AB *vase cylindrico* CD *instructum & dimidium vasis una cum quadam tubi superioris parte aqua, reliquam vasis partem ac tubum inferiorem Mercurio repleri jusserunt. Advertit vero* Hugenius, *votis non respondere eventum. Etenim aer in aqua contentus vinculis suis sese liberabat & partem tubi superioris vacuam replebat: quo facto, cum aer inclusus rarefieret & condensaretur* (§. 23. 24), *depressiones & elevationes Mercurii a gravitatis atmosphæræ variationibus productæ non amplius discerni poterant. Cum adeo didicisset, consultius esse, ut Mercurius locum vacuo proximum occupet, aliam baroscopii compositi constructionem excogitavit, quam problemate sequente explicamus.*

Tab. I. Fig. 9.

PROBLEMA 29.

134. *Baroscopium compositum construere.*

RESOLUTIO.

1. Fiat tubus recurvus ADG in A hermetice sigillatus, in G vero apertus & duobus vasis cylindricis BC & EF instructus.

2. Vasa BC & EF sint inter se æqualia & intervallo $27\frac{1}{2}$ digitorum di-

(z) in Actis Eruditorum A. 1710. p. 80.

distent, quanta ſcilicet eſt Mercurii in media aëris gravitate altitudo in baroſcopio ſimplici.

3. Baroſcopio huic infundatur primum Mercurius, dum baroſcopium ſimplex mediam aëris gravitatem indicat, ita quidem ut a medietate cylindri FE ad medietatem alterius BC aſſurgat, reliquo ſpatio ad A usque vacuo non ſolum a Mercurio, ſed ipſo etiam aëre craſſiore.

4. Poſtea quoque infundatur aqua communis cum parte ſexta aquæ regiæ permixta, ne frigore in glaciem vertatur, donec in tubo GF ad altitudinem unius pedis conſtituatur. Ita boroſcopium compoſitum conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Mercurius enim ultra libellam Mercurii in vaſculo EF contenti per tubum AD aſſurgens ponderi atmoſphærico & liquoris æquilibratur (§.34. *Hydroſtat.*). Aucto igitur atmoſphæræ pondere augeri debet columna illa Mercurialis, conſequenter liquor deſcendet. Aſt imminuto atmoſphæræ pondere, columna Mercurialis quoque imminui debet, conſequenter liquor aſcendet. Liquoris adeo deſcenſus incrementum gravitatis aëris, aſcenſus vero decrementum indicat, conſequenter inſtrumenmentum ita conſtructum baroſcopium eſt (§.89). *Q.e.d.*

SCHOLION.

135. *Baroſcopium* Hugenianum *multo minores gravitatis aereæ mutationes indicare, quam tubus* Torricellianus, *attendentibus manifeſtum eſt. Quoniam tamen aqua facile in vaporem agitur, etiamſi ad impediendam evaporationem gutta olei ex amygdalis dulcibus expreſſi, inſtilletur, liquori innatatura; loco aquæ oleum Tartari per deliquium infundi poteſt.*

PROBLEMA 30.

136. *Baroſcopium conſtruere, cujus mutationes ſint multo ſenſibiliores quam in barometro ordinario.*

RESOLUTIO.

1. Tubo recurvo ACD, cujus crus CD ſit ad alterum AC perpendiculare, cohæreat vaſculum cylindricum B, cujus diameter tanto major eſſe debet, quanto ſenſibiliores mutationes baroſcopium indicare debet.

2. Crure AC in ſitum horizontalem inclinato, mediante infundibulo baroſocopium repleatur Mercurio, ita ut maxima pars tubi vacua ſit, nec metuendum, ne in minima atmoſphæræ gravitate Mercurius elabatur.

 3. Cru-

3. Cruri horizontali aptetur scala in suos digitos divisa & in lineas subdivisa. Dico hoc baroscopium mutationes gravitatis aëris multo accuratius indicare, quam ordinarium.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum pondus atmosphæræ augetur, Mercurius in vasculo tanto intervallo ascendit, quanto in ordinario baroscopio ascendere solet (§.120), consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis, in hoc multo ampliori intervallo recedit. Incrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicare valet quam baroscopium commune sive simplex. Similiter quando pondus atmosphæræ minuitur, Mercurius in vasculo tanto intervallo descendit, quanto in ordinario baroscopio descendere solet (§.120), consequenter cum diameter vasculi multo major sit diametro tubi horizontalis; in hoc multo ampliori intervallo versus orificium excurrit. Decrementa igitur ponderis atmosphærici multo minora indicat, quam baroscopium simplex. *Q.e.d.*

PROBLEMA 31.

137. *Data diametro tubi* CD *invenire diametrum vasculi* AB, *ita ut scala descensus Mercurii in tubo* DC *habeat ad scalam ascensus in vasculo* AB *rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit diameter tubi $= a$, ratio scalarum $b:c$, diameter vasculi $= x$. Cum tantum Mercurii in vasculum ascendat, quantum per aëris gravitatem in tubo DC deprimitur, positaque ratione diametri ad peripheriam $= d:p$, quantitas Mercurii in tubo recedentis sit $a^2pb:4d$ & quantitas vasculum ingressi $= x^2pc:4d$ (§.541. *Geom.*); erit

$$a^2pb:4d = x^2pc:4d$$

$$a^2b = x^2c$$
$$x^2:a^2 = b:c$$
$$x:a = \sqrt{b}:\sqrt{c}.$$

Theorema. Diameter vasculi est ad diametrum tubi in ratione subduplicata reciprocà scalarum.

COROLLARIUM.

138. Datis ergo diametro tubi CD & diametro vasculi AB una cum scala Mercurii in vasculo, invenitur scala in tubo, inferendo: ut quadratum diametri tubi ad quadratum diametri vasculi ita reciproce scala Mercurii in vasculo ad scalam Mercurii in tubo.

PROBLEMA 32.

139. *Datis diametris tuborum & vasculorum una cum altitudinibus*

nibus intervallorum, per quæ Mercurius descendit, invenire utrum baroscopia concordent, nec ne.

RESOLUTIO.

Quærantur vera descensus intervalla in eadem mensura (§. 130): quæ si utrinque æqualia reperiantur, evidens est, borometra inter se concordare; sin minus, discordare.

SCHOLION.

140. *Apparet adeo ad judicandam duorum vel plurium barometrorum concordiam, aut veram intervallorum ascensu differentiam non sufficere, ut utrique eadem graduatio applicetur, nisi utriusque vasculi* (§. 127) *ea fiat amplitudo, ut Mercurius ex tubo delapsus gravitate atmosphæra imminuta altitudinem in vasculo stagnantis sensibiliter non variet.*

THEOREMA 17.

Tab. . Fig. 12. 141. *Si tubus Torricellianus* AB *inclinatur, erit cylindrus Mercurialis atmosphæræ æquiponderans ad cylindrum Mercurialem eidem in situ tubi verticali æquiponderantem ut longitudo tubi* AB *ad altitudinem* BC.

DEMONSTRATIO.

Si loco ponderis atmosphærici egressum Mercurii ex tubo AB per osculum A impedientis concipiatur cylindrus Mercurialis isti æquiponderans in tubo verticali ad A resistere; erit ejus gravitas ad gravitatem Mercurii in tubo inclinato ut longitudo AB ad altitudinem BC (§. 34. *Hydrost.*) Cum itaque cylindro Mercurii verticali pondus atmosphæræ æquale sit; erit etiam gravitas Mercurii in tubo inclinato ad hoc ut longitudo tubi AB ad altitudinem BC. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

142. Si altitudo BC fiat longitudinis tubi vel subtripla, vel subquadrupla &c. mutationes baroscopii triplo, vel quadruplo &c. sensibiliores evadunt.

COROLLARIUM 2.

143. Si AB sumatur pro sinu toto, erit CB sinus anguli inclinationis BAC. Est ergo gravitas Mercurii in tubo inclinato ponderi atmosphærico æquiponderantis ad pondus atmosphæricum ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis.

COROLLARIUM 3.

144. Ergo & scala integra, & singula intervalla ascensus descensusque Mercurii reciproci in tubo inclinato AB ob variationes ponderis atmosphærici ad scalam integram & singula ejus intervalla in tubo verticali sunt ut sinus totus ad sinum anguli inclinationis. Ductis enim DF ipsi BC & FE ipsi CA parallelis, erit $o = x$ & $v = y$ (§. 255. *Geom.*), consequenter DE : DF = BA : BC (§. 267. *Geom.*).

PRO-

PROBLEMA 33.

145. *Data longitudine scalæ, per quam Mercurius nunc ascendit, nunc descendit in tubo verticaliter erecto, invenire angulum inclinationis tubi inclinandi, ut scala per quam Mercurius in ipso nunc ascendit, nunc descendit, habeat ad scalam tubi verticalis rationem datam.*

RESOLUTIO.

Sit longitudo scalæ in tubo verticali $= a$, quia datur ratio scalæ in inclinato ad scalam in verticali, datur etiam scala ipsa in inclinato, quæ sit $= b$. Sit porro sinus totus $= t$, sinus anguli inclinationis $= x$; erit utendo logarithmis $lx = la + lt - lb$ (§. 135).

CAPUT V.

DE RAREFACTIONE ET CONDENSATIONE, DENSITATE ITEM ET RARITATE AERIS.

THEOREMA 18.

146. *Calor elaterem aeris intendit.*

DEMONSTRATIO.

Aer vesicæ inclusus eadem vi premit, qua aer ambiens, ante caloris actionem (§. 34). Sed ubi calor in eum agit, vesicam distendit (§. 22). Tum itaque magis premit, quam ambiens externus (§. 75. *Mechan.*). Enimvero vis illa, qua vesicam distendit, est elater ejus (§. 26). Calor adeo elaterem aeris intendit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

147. Quia aer rarefactus iterum condensatur (§. 24); frigus elaterem ejus minuit.

THEOREMA 19.

148. *Vis elastica aeris, qua rarefiens expanditur, est ad elaterem aeris condensati uti volumen rarefacti ad volumen condensati.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus aerem rarefactum ea lege comprimi debere, ut idem recuperet volumen, quod condensatus obtinuerat: evidens est, tantum

tum ponderis imponi debere, quod vi elasticæ æquatur, qua expansus fuit (§. 75. *Mechan.*). Erit igitur elater aëris, qua rarefiens expanditur, ad elaterem condensati, ut pondus illud ad pondus alterum, quo condensatus premebatur (§. 553. *Mechan.*). Est vero pondus rarefacto incumbens idem, quod condensato incumbebat *per hypoth.* Ergo elater aëris, qua rarefiens expanditur, est ad elaterem condensati ut pondus, quod sustentat a rarefactione ad pristinum condensationis volumen reductus, ad pondus, quo rarefactus premitur, consequenter ut volumen rarefacti ad volumen condensati (§. 66). *Q. e. d.*

PROBLEMA 34.

149. *Aquam vel liquorem alium in vas quoddam per exiguum tubulum immittere.*

RESOLUTIO.

1. Vas igni admoveatur per aliquod temporis spatium.
2. Mox, ubi ab igne iterum removetur, orificium tubuli vel foramen liquori immittatur.

Dico, liquorem sua veluti sponte in cavitatem vasis ascensurum.

DEMONSTRATIO.

Dum enim globus igni admovetur, aër rarefit (§. 23), consequenter tanto major quantitas expelletur, quanto diutius ad ignem detinetur (§. 8). Quodsi jam orificium tubuli liquori immergatur, per eum in vas ascendet, dum calor exspirat. Dum enim calor exspirat, cæteris paribus, aëris, quæ restat, portio rarior est externo ambiente, adeoque elater ejus minor quam externi (§. 78), consequenter quam ponderis atmosphærici (§. 30). Quare cum circa tubulum liquor a pondere atmosphærico prematur (§. 21); aqua per tubulum in vas propelletur (§. 75. *Mechan.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

150. *Quodsi prima vice non tantum aëris expulsum fuerit, ut totus globus liquore impleri queat, eadem operatio iteranda. Nec necesse est, liquorem in priore operatione immissum rursus expelli, cum ipse potius ob propriam rarefactionem aëris adhuc residui expulsionem promoveat.*

THEOREMA 20.

151. Sit *globus vitreus* AB *cum annexo tubo* BC, *cujus orificium* C *aquæ immersum; hæreat aqua pendula in tubo usque ad* D: *ascendet, si aer ambiens frigidior, vel gravior evadit; descendet, si calidior, vel levior redditur.* Tab. II. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens frigidior redditur, refrigeratur etiam inclusus adeoque condensatur (§. 24): quo facto, elater ejus minuitur (§. 78). Cum igitur is constanter æqualis esse debeat differentiæ ponderis fluidi suspensi a pondere atmosphærico (§. 93); si minuitur, pondus fluidi, consequenter & volumen ejus (§. 17. *Hydrost.*) augeri debet. Aqua igitur in tubo ascendat necesse est. *Quod erat unum.*

Similiter si aer levior redditur, aqua circa tubum magis premitur, quam sub orificio tubi (§. 10). Tantum igitur aquæ ascendere debet, quantum sufficit ad æquilibrium cum pndere atmosphærico constituendum (§. 36. *Hydrost.*). *Quod erat secundum.*

Consra si aer externus calefit, calefit quoque inclusus, consequenter rarefit (§. 23), adeoque liquorem in tubo detrudit (§. 8). Fluidum descendere, si aer levior redditur, eadem ratione demonstratur, qua ostendimus, illud ascendere, si is gravior evadit. *Quod erat tertium & quartum.*

SCHOLION.

152. *Celeberrimus* Hallejus (a) *observavit, uti supra de Mercurio* (§. 123), *quod spiritus vini insigniter expansus fuerit, atque ab initio celerius, postea tardius in tubulo ascenderit. Cum spiritus vini duodecima voluminis parte dilatatus esset, manus quidem aquæ calorem ferre poterat, ille tamen ebullire incipiebat. Vereor autem, ne diversitas spiritus vini expansionis gradum variet. In aqua exiguam expansionem notavit idem* Hallejus, *inprimis sub initium, & ebulliens* $\frac{1}{26}$ *circiter spatio prioris augebatur, non amplius expandenda. Quamvis autem ex his experientiis manifestum sit, volumen fluidi calore crescere, frigore decrescere debere, consequenter liquorem ascendere conari, dum ab elatere aeris inclusi deorsum pellitur, & contra, adeoque rarefactionem liquoris obstare descensui ejus, condensationem vero ascensui: experientia tamen constat, hoc obstaculum non impedire, quo minus elateris aerei effectus sint satis sensibiles, quia aer multo magis rarefit & condensatur quam fluidum quodcunque aliud.*

THEOREMA 21.

153. *Densitas aeris, cæteris paribus, crescit in ratione ponderum comprimentium.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim densitates ut gravitates specificæ (§. 33. *Hydrostat.*) Gravitates specificæ sunt ut volumina reciproce (§. 29. *Hydrost.*) Ergo

(a) Philos. Transact. n. 197. p. 650. & seqq.

Ergo densitates sunt ut volumina reciproce (§. 167. *Arithm.*), consequenter ut pondera comprimentia (§. 73). *Q. e. d.*

THEOREMA 22.

154. ***Aer inferior densior est superiore.***

DEMONSRATIO.

Aer superior premit inferiorem (§. 21). Cum adeo inferiori major aeris quantitas incumbat, quam superiori; inferior quoque magis premitur, quam superior (§. 10). Densitas adeo inferioris major est densitate superioris (§. 153). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

155. Quia corpora densiora sunt graviora rarioribus sub eodem volumine (§. 14. *Hydrost.*) & aer gravis existit (§. 20); aer inferior specifice gravior est superiore.

THEOREMA 23.

156. ***Densitas aeris inferioris non est ponderi atmosphærico proportionalis.***

DEMONSTRATIO.

Si præter variationem ponderis atmosphærici cætera in aere inferiore omnia essent paria, densitates ejus essent ut pondera atmosphærica (§. 153). Sed calor aerem rarefacit, frigus condensat (§. 23. 24), adeoque a calore & frigore densitas diversimode variatur, utut eodem pondere prematur; ac forte adhuc aliæ dantur causæ eandem similiter alterantes. Cum adeo densitas aeris inferioris mutari possit, pondere atmosphærico immutato, ista huic proportionalis non est. *Q. e. d.*

THEOREMA 24.

157. ***Si aer redditur densior, pondus corporum in aere minuitur; si rarior, augetur.***

DEMONSTRATIO.

Quoniam gravitates specificæ sunt ut densitates (§. 33. *Hydrost.*); aer densior specifice gravior est rariori. Corpus igitur aere specifice gravius in densiore majorem ponderis partem amittit, quam in rariore (§. 56. *Hydrost.*) Unde si aer redditur densior, pondus minuitur; si rarior, augetur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

158. Si igitur densitas aeris sensibiliter alteratur, corporum in aere rariori æquilibratorum, quorum gravitates specificæ notabiliter differunt, æquilibrium tolletur in densiore, præponderabitque specifice gravius (§. 61. *Hydrost.*).

Digitized by Google

PROBLEMA 35.

159. *Invenire incrementum ponderis, quod volumen aeris unius pedis cubici ob variationem ponderis atmosphærici acquirere valet.*

RESOLUTIO.

Si pondus atmosphæræ cæteris paribus augetur, aer inferior magis comprimitur (§. 66), adeoque densior evadit (§. 153), consequenter pes cubicus aeris a compressione gravior (§. 9. *Hydrost.*). Sit jam pondus atmosphæræ minimum = a, maximum = b, pondus aeris a minimo compressi = c, pressi a maximo = x. Cum densitates corporum æqualium sint ut pondera (§. 16. *Hydrost.*): erit

$$a : b = c : x$$

$$x = bc : a$$

Ergo incrementum y, quod volumen aeris datum ob ponderis atmosphærici variationem acquirere valet, est $bc : a - c = (bc - ac) : a$, consequenter $a : b - a = c : y$.

Theorema. Ut pondus atmosphæricum minimum ad differentiam ejus a maximo, ita pondus aeris a minimo compressi ad incrementum ponderis, quod a tota variatione ponderis atmosphærici acquirere valet volumen aeris datum.

E. gr. Pes cubicus aeris in minima atmosphæræ gravitate sit 507 granorum (§ 55). Quoniam $a = 26$, $b = 28$ (§ 122): erit $y = 39$ granorum. Incrementum adeo, quod pes cubicus aeris ab omni variatione ponderis atmosphærici suscipere valet, est fere $\frac{1}{13}$ ejus ponderis, quod ipsi a minimo pondere atmosphærico presso competit.

DEFINITIO 11.

160. *Monoscopium* est instrumentum, quod alterationes densitatis aeris indicat. *Manometrum* est instrumentum, quod easdem metitur.

PROBLEMA 36.

161. *Manoscopium construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur bilanx tam accurate constructa, ut minimas æquilibrii mutationes indicet, cujus centrum motus est super centro jugi.
2. Ex altero jugi brachio suspendatur globus ex lamina metallica e. gr. cuprea aut orichalcea construendus, ne pondus affrictum in libra augeat (§. 782. *Mechan.*), minimas æquilibrii mutationes elusurum. Capacitas globi sit minimum unius pedis cubici, & ex eo educatur aer (§. 40).

3. Tru-

3. Trutinæ affigatur Quadrans ADC ex centro jugi B descriptus, ita ut secetur in gradu quadragesimo quinto ab indice BD, si jugum fuerit in situ horizontali.

Dico, Manoscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Etenim si aer densior redditur, pondus globi evacuati minuitur (§. 158). Et licet etiam *(vi §. cit.)* vis contrapondii minuatur, cum tamen ejus volumen vix spatium a laminæ, ex qua globus constructus, soliditate repletum occupet, nisus ejus deorsum minus minuitur, quam globi (§. 55. *Hydrost.*), consequenter contrapondium globo præponderat, & augmentum gravitatis specificæ aeris, in quo hæret, consequenter & densitatis (§. 33. *Hydrost.*) indicat. Est ergo machina manoscopium (§. 160). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

162. Quoniam aeris densitas & raritas non modo a pondere atmosphæræ (§ 153), sed & a caloris & frigoris actione pendet (§. 23. 24); manoscopium hoc baroscopium esse nequit.

SCHOLION 1.

163. *Equidem* Otto de Guericke (b) *&, qui ipsum sequitur,* Boylius (c) *idem instrumentum pro baroscopio venditant; sed non attenderunt, manente eodem pondere densitatem ac raritatem aeris sæpissime variari.*

SCHOLION 2.

164. *Neque vero putandum est, mutationes gravitatis globi adeo exiguas fore, ut in bilance notari nequeant, experientia enim contrarium abunde satis confirmat. Certe* Guerickius *se expertum scribit, quod globi gravitas interdum quovis, interdum secundo, tertio, quarto, quinto die aliquantum variata fuerit & inprimis ingravescere globum notavit, si pluat. Nec difficulter idem ratione assequimur. Cum enim gravitas unius pedis cubici aeris 39 granorum mutationem ob variatum pondus atmosphæricum sustineat (§. 159); bilanx vero unius vel alterius grani accessionem vel ablationem indicare possit, utut pondere 30 librarum (a quo multum abest globus cum suo contrapondio) oneretur (§. 55); si globus evacuatus pedem aeris cubicum capit, quin variationes densitatis ab atmosphæra pondere variato pendentes manoscopium nostrum indicet, dubitandum non est. Tanto minus autem dubitare fas est, quod alia adhuc densitatis variationes a diverso calore ac frigore aeris facta, nec istis minore accedant. Didicit nimirum* Hal-

Ddd 3 lejus

(b) in Experiment. de Vacuo lib. 3. C. 31. f. 114.
(c) in Historia frigoris tit. 17.

lejus *aerem ordinarium in Anglia a calore æstivo extendi $\frac{1}{13}$ circiter sui voluminis, a maximo autem frigore condensari $\frac{1}{20}$ fere.* Cum adeo pondus unius pedis cubici aerei sit 507 granorum (§. 55); erit decrementum ponderis in casu priore 32, incrementum in posteriore 25 granorum.

SCHOLION 3.

165. *Manometri constructionem dedit celeberrimus* Varignonius (d): *de quo alias nonnulla monuimus* (e).

CAPUT VI.

DE MOTU AERIS.

DEFINITIO 12.

166. *Ventus* est agitatio aeris sensibilis.

PROBLEMA 37.

167. *Data ratione gravitatis specificæ fluidi cujuscunque ad gravitatem aeris, una cum spatio, quod intra definitum aliquod temporis spatium fluidum istud percurrit ab aere premente impulsum, determinare spatium, quod ipse aer ob æqualem pressionem intra idem tempus emetiri debet.*

RESOLUTIO.

Ponatur altitudo, ad quam per datam aeris pressionem elevari potest fluidum in medio non resistente $= a$. Sit porro ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b : c$. Spatium, quod fluidum ab aere premente impulsum describit, dicatur s, & denique spatium, quod aer ob æqualem pressionem intra idem tempus emetitur, vocetur x. Quoniam altitudines fluidorum, ad quas propter æquales pressiones elevantur, sunt in ratione gravitatum reciproca (§. 36. *Hydrost.*); si altitudo, ad quam aer eandem cum fluido pressionem sustinens eveheretur, modo elatere careret, fiat $= y$; erit $c : b = a : y$, consequenter $y = ab : c$. Sunt vero velocitates, quibus fluida ob eandem pressionem elevantur, in ratione subduplicata altitudinum, ad quas ascendunt (§. 87. 322. *Mechan.*), adeoque in casu nostro ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{(ab : c)}$. Quare cum

(d) Memoires de l' Acad. Roy. des Sciences A. 175, p. m. 409, & seqq.
(e) in Element. Aerometriæ p. 284.

cum ob temporum suppositam æqualitatem spatia, quæ istis temporibus percurruntur, sint ut velocitates (§. 28. *Mechan.*); erit

$$\sqrt{a} : \sqrt{(ab:c)} = s : x$$

$$a : \frac{ab}{c} = s^2 : x^2 \text{ (§. 260. } \textit{Arithm.})$$

$$ac : ab = s^2 : x^2 \text{ (§. 178. } \textit{Arithm.})$$

adeoque

$$c : b = s^2 : x^2 \text{ (§. 181. } \textit{Arithm}).$$

Theorema. Ut gravitas specifica aeris ad gravitatem fluidi alterius cujuscunque, ita reciproce quadratum spatii, quod fluidum hoc quacunque vi impulsum intra quodcunque temporis spatium percurrit, ad quadratum spatii, quod aer ob eandem pressionem eodem tempore emetitur.

COROLLARIUM 1.

168. Ergo $x = \sqrt{(bs^2:c)}$. Unde si ponamus, aquam data vi impulsam intra minutum temporis secundum percurrere spatium 2 pedum; erit $s = 2$, cumque gravitas specifica aquæ sit ad gravitatem specificam aeris ut 970 ad 1 (§. 57), erit $b = 970$ & $c = 1$, consequenter $x = \sqrt{970 \cdot 4} = \sqrt{3880} = 62'''$ fere.

COROLLARIUM 2.

169. Est etiam $s = \sqrt{(c x^2 : b)}$, adeoque spatium, quod intra certum aliquod temporis spatium ob certam quandam impressionem fluidum quodcunque emetitur, determinatur, si ad duos numeros, quibus ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris exprimitur, atque quadratum spatii quod aer ob eandem pressionem intra idem temporis spatium emetitur, numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302. *Arithm.*) & ex eo radix quadrata extrahatur (§. 269. *Arithm.*)

SCHOLION.

170. Mariottus (f) *notat, ventum satis viplentum ordinarie spatium 24 pedum intra minutum secundum describere. Quodsi ergo quæratur spatium, quod aqua ob eandem pressionem, quam aer sustinet, intra idem temporis spatium absolvit, erit* $c = 1, x = 24$, $b = 970$ *& reperietur* $s = \sqrt{(576 : 970)} = \frac{24}{31}$.

PROBLEMA 38.

171. ***Data altitudine, ad quam fluidum quodcunque a pressura aeris elevatur, una cum altitudine, per quam corpus grave intra minutum secundum descendit, determinare spatium, quod fluidum istud intra minutum secundum vi impetus impressi motu æquabili percurrit.***

RESOLUTIO.

Sit altitudo, ad quam fluidum ab aere premente elevatur, $= a$, minutum temporis secundum $= b$, spatium quæsitum $= x$. Quoniam corpus grave per vim cadendo acqui-

(f) Trait. du mouvement des eaux p. 226.

acquiſitam elevatur ad altitudinem per quam decidit (§. 322. *Mech.*); vis aeris prementis, qua fluidum ad datam altitudinem elevatur, æqualis erit vi, quam id per eandem cadendo acquirere valet. Porro vis cadendo acquiſita ejus eſt celeritatis, qua corpus motu æquabili intra idem tempus, quo decidit, deſcribere valet lineam altitudinis, ex qua decidit, duplam (§. 92. *Mech.*) Reperietur adeo ſpatium, quod fluidum intra idem tempus, quo decidit, vi cadendo acquiſita percurrere valet $= 2a$. Sit præterea ſpatium, quod corpus grave deſcendens intra minutum ſecundum deſcribit, $= c$. Quoniam tempora ſunt in ratione ſubduplicata ſpatiorum a corporibus cadentibus deſcriptorum, erit tempus, quo grave decidit per ſpatium a, $= \sqrt{(ab^2 : c)}$ (§. 87. *Mech.*). Quare ſi motus æquabilis ponatur, habebimus (§. 34. *Mech.*)

$$\sqrt{(ab^2 : c)} : 2b = a : x$$

$$2ab = x\sqrt{(ab^2 : c)}$$

$$4a^2b^2 = x^2ab^2 : c$$

$$4ac = x^2$$

$$2a : x = x : 2c$$

Theorema. Spatium, quod fluidum ob impetum impreſſum intra minutum ſecundum motu æquabili percurrit, eſt medium proportionale inter altitudinem duplam, ad quam idem ab aere premente elevatur, & altitudinem duplam ejus, per quam grave intra minutum ſecundum decidit.

SCHOLION.

172. *Ponamus, Mercurium per preſſionem atmoſphæræ in tubo Torricelliano ſuſtentari ad altitudinem* $28''$: *erit adeo in problemate noſtro* $a = 28''$. *Porro* $c = 15'\ 1''$ *ſeu* $181''$ (*pedis Pariſini*) (§. 327. Mechan.). *Ergo* x *hoc eſt ſpatium, quod ob eandem preſſionem Mercurius motu æquabili tempore unius ſecundi percurreret* $= 2\sqrt{181 . 28} = 142''$ *quam proxime ſeu* $11'\ 10''$. *Ponamus Mercurium elevari per aeris preſſionem nonniſi* $2''$. *Erit in caſu problematis noſtri* $a = 2''$, $c = 181''$, *adeoque* $x = 2\sqrt{181 . 2} = 38'' = 3'\ 2''$.

PROBLEMA 39.

173. ***Data altitudine fluidi, ad quam propter preſſionem aeris elevatur, invenire ſpatium, quod tempore unius minuti ſecundi ob eandem preſſionem percurrere debet aer in medio non reſiſtente.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur, quantum ſpatium ob preſſionem aeris, qua ad datam altitudinem elevatur, tempore unius minuti ſecundi motu æquabili emetiretur fluidum datum (§. 169). Hinc enim porro

2. In-

2. Investigari potest spatium, quod aer in medio non resistente ob eandem pressionem percurrere debet (§. 167).

COROLLARIUM 1.

174. Per præsens igitur problema determinari potest spatium, quod aer in vas prorsus evacuatum irruens intra minutum temporis secundum describit. Si enim vas prorsus evacuatum fuerit, aer irruens pressionem sustinet ei æqualem, qua aqua ad altitudinem 32 pedum Parisiensium elevatur (§. 29). Quare spatium, quod aqua ob istam pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili percurreret, est 528'' (§. 171). Jam cum ratio gravitatis specificæ aquæ ad gravitatem aeris sit 970 : 1, reperietur spatium, quod aer in vas prorsus evacuatum irruens motu æquabili tempore unius minuti secundi percurrere debet, 1370 pedum (§. 167).

COROLLARIUM 2.

175. Si detur differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aeris contiguis, inveniri potest spatium, quod aer ex volumine fortiori elatere instructo irruens in volumen elatere debiliori præditum describit.

SCHOLION.

176. *Si e. gr. differentia virium elasticarum in duobus voluminibus aeris contiguis ea, qua Mercurius elevari potest ad altitudinem 2 digitorum; reperietur spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili Mercurius describere valet 38'' (§. 171). Cum jam gravitas specifica Mercurii ad gravitatem aquæ sit ut 14 ad 1 (§. 29) & gravitas aquæ ad gravitatem aeris ut 970 ad 1, erit gravitas Mercurii ad gravitatem aeris ut 13580 ad 1, adeoque reperietur spatium, quod ob æqualem pressionem aer emetiri debet tempore unius minuti secundi fere 368 pedum. Irruet ergo aer ex volumine fortiori in debilius ea celeritate, qua tempore unius minuti secundi fere 368 pedes percurrere valet. Sit differentia virium elasticarum nonnisi 3''': reperietur spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi motu æquabili Mercurius describere valet, fere 12'', tandemque spatium, quod ob istiusmodi pressionem tempore unius minuti secundi aer emetiri debet, 116⅓ pedum (§. 167). Ea igitur celeritate, quæ tempore unius minuti secundi spatium 116 circiter pedum percurrere valet, aer ex volumine fortiori in debilius irruit. Quoniam* Mariottus (g) *observat, ventum satis violentum intra minutum temporis secundum 24 pedes percurrere; ejus celeritas multo minor est ea, qua aer irruit ex volumine fortiori in debilius, differentia virium elasticarum nonnisi tanta existente, quanta Mercurium in tubo Torricelliano ad altitudinem 3''' elevare valet.*

COROLLARIUM 2.

177. Quoniam data ratione voluminum aeris primitivi atque compressi inveniri

(g) Traité du mouvement des eaux p. 126.

veniri potest altitudo, ad quam aer compressus Mercurium in tubo Torricelliano elevare potest (§. 83); per problema præsens determinari etiam potest celeritas, qua aer cessante compressione seu remota vi premente sese expandit.

PROBLEMA 40.

178. *Dato spatio, quod aer intra minutum secundum percurrit, determinare pressionem, quæ celeritatem istam producere valet.*

RESOLUTIO.

Pressionem determinatam esse patet, si constet altitudo, ad quam fluidum quodcunque in tubo vacuo ab aere elevandum, tantam pressionem producere valente. Sit itaque hæc altitudo $= x$, spatium quod aer intra minutum secundum percurrit $= a$, ratio gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris $= b:c$; altitudo denique, per quam corpus grave intra minutum secundum descendit $= d$; reperietur spatium a fluido tempore unius minuti secundi percurrendum $= \surd(a^2c:b)$ (§. 169). Hinc porro elicitur (§. 171) altitudo quæsita $= a^2c:4bd$. Est itaque

$$4bd:ac = a:x.$$

Theorema Spatium, quod aer tempore unius minuti secundi percurrit, est ad altitudinem, ad quam fluidum in tubo vacuo elevandum, ut pressionem efficiat celeritati, qua istud describitur, producendæ sufficientem, in ratione composita gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem aeris atque altitudinis quadruplæ, per quam corpus tempore primi minuti secundi descendit, ad spatium aeris prædictum. Sit e. g. $a = 24'$, seu $288''$ ratio Mercurii ad aerem $b:c = 13580:1$ (§. 176), $d = 181''$ (§. 47. *Mechan.*); erit x minor unica linea seu duodecima digiti parte.

SCHOLION 1.

179. *Apparet adeo, quod exiguas mutationes in baroscopio, sed subitas, ingentes admodum procellæ subsequi debeant: id quod experientia consentaneum theoriam nostram confirmat.*

SCHOLION 2.

180. *Equidem de actione venti in corpora jam porro agi hic poterat, ac imprimis determinandus erat situs alarum in molendino alato, qualis nempe requiratur, ut ad eas circa axem convertendas vim maximam adhibeat ventus: enimvero cum hic opus sit principiis generalibus de motu fluidorum, quæ in Hydraulica demum docentur; ideo ibidem universali ratione hoc argumentum exequemur, ne minus dixisse videamur, cum plus dicere possemus.*

DEFINITIO 13.

181. *Anemometrum* est instrumentum, quo vim ventorum metimur.

PROBLEMA 41.

182. *Anemometrum construere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Conſtruantur alæ ABCD, quales in molis alatis adhiberi ſolent, multo tamen minores, a plano verticali ſub angulo 54 circiter graduum reclinatæ.
2. Axi, cui alæ infiguntur, aptetur etiam cochlea perpetua EF, quæ
3. Circumacta deprimat dentes rotæ ſtellatæ GH.
4. Axi per centrum transeunti infigatur ad angulos rectos brachium ſatis longum IK, in medio canaliculi inſtar excavandum, ut intra cavitatem pondus plumbeum L ſurſum deorſum libere moveri poſſit, ipſique (nempe brachio) ex altera axeos parte æquilibretur brachium minus y.
5. Brachii majoris IK longitudo in quotcunque partes æquales dividatur, quarum ſingulæ radio axis æquantur.
6. Eidem axi infigatur index MN brachio IK ad angulos rectos inſiſtens, & extra ciſtam, cui rota ſtellata cum cochlea perpetua incluſa, eminens.
7. Denique ex centro axis in pariete ciſtæ exteriore deſcribatur quadrans circuli in 90 gradus more ſolito dividendus, ab indice vel aſcendente, vel deſcendente indicandus.

Dico, Anemometrum eſſe conſtructum.

DEMONSTRATIO.

Manifeſtum enim, ſi alæ ABCD vento opponantur, cochleam perpetuam EF circumvolvi atque adeo rotam ſtellatam GH in orbem agere. Quare cum brachium IK cum rota ſtellata GH eidem axi infigatur, *per conſtruct.* ubi hæc circumagitur, illud cum pondere L elevabitur. Quoniam vero diſtantia ponderis a centro motus continuo fit major, quo altius elevatur; tanto quoque gravius fiat neceſſe eſt, quo altius attollitur (§. 796. *Mechan.*). Vis igitur venti, quæ per minorem angulum elevare poteſt pondus, non ideo idem elevare valet per angulum majorem. Quamprimum itaque ponderis gravitatio vi venti ipſum elevantis æqualis evadit, motus machinæ ſiſtatur neceſſe eſt (§. 75. *Mechan.*) & quia cochlea perpetua EF rotam quidem GH circumagere poteſt, ipſa autem a rota circumagi nequit. brachium IK cum pondere L relabi nequit. Index adeo ſemper indicat, quantus ſit angulus elevationis ponderis, ubi

eidem vis venti æquilibratur: unde determinabitur vis venti (§.79. *Mechan.*), atque adeo per machinam nostram ratio virium ventorum determinari potest, hoc est, vires venti metiri licet (§.23. *Geom.*). Est igitur anemometrum (§.181). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

183. *Ut hæc machina sine ullius adjumento alas* ABCD *vento semper obvertat, cistæ* ST *plano, quod alis opponitur, ad angulos rectos affigendus est asserculus* POQR *figuram trapezii parallelarum basium habens. Ventus enim incidens in asserculum* POQR, *machinam circa axem pedamenti mobilem convolvet, donec alæ vento opponantur. Alias directio ad ductum vexilli e centro machina erecti fieri potest, ut in molendinis vulgaribus alatis.*

SCHOLION 2.

184. *Brachio* IK *contrapondium* y *additur, ut instar lineæ gravitate carentis considerari possit, nec tadia calculi præter necessitatem multiplicentur.*

THEOREMA 25.

185. ***Si elater aeris alicubi debilior evadit quam in locis contiguis, ventus flat per locum, in quo elater imminutus.***

DEMONSTRATIO.

Cum aer per elaterem suum quaquaversum se expandere nitatur (§.26); si elater uno in loco minor, quam in altero, nisus aeris vi elastica majore præditi adversus aerem vi elastica minore instructum major erit, quam hujus adversus istum. Ergo aer minus elasticus vi minore resistit, quam magis elastico urgetur, consequenter minus elasticus loco suo pellitur & magis elasticus in eum succedit. Quodsi adeo excessus elateris in aere magis elastico super elaterem minus elastici is sit, qui exiguam in baroscopio mutationem inducere valet; motus quoque tam aeris expulsi, quam in ipsius locum succedentis sensibilis evadat necesse est (§. 176). Flat ergo ventus per locum, quem aer minus elasticus replet (§.166). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

186. Cum aucto pondere comprimente elater augeatur (§. 553. *Mech.*) aer vero compressus sit densior minus compresso (§. 78): ventus flat per aerem rariorem ex loco, qui densiore repletur.

COROLLARIUM 2.

187. Quamobrem, quia aer densior rariore specifice gravior (§. 33. *Hydrost.*) extraordinaria aeris aliquo in loco levitas cum ventis extraordinariis seu procellis conjungi debet.

Digitized by Google

COROLLARIUM 3.

188. Jam descensus Mercurii extraordinarius in baroscopio aeris levitatem extraordinariam indicat (§. 120). Non ergo mirum, quod procellas portendat, si subito fiat.

SCHOLION.

189. *Non tamen necesse est, ut aeris levitas semper cum ventis conjungatur. Sufficit enim gravitatem aeris subitas pati mutationes. Hinc ventum sat valide flantem hoc ipso temporis articulo experimur, utut in media altitudine, 29 nempe digitorum Anglicorum, Mercurius in baroscopio consistat; nec nisi $\frac{1}{18}$ unius digiti depressior nunc factus, quam heri erat. Immo in maxima depressione ventus sæpe nullus spirat, quia depressio successive, non subito facta.*

COROLLARIUM 4.

190. Si aer alicubi subito condensatur, elater ejus subito minuitur (§. 148). Quodsi ergo hæc imminutio ea fuerit, quæ in baroscopio vix indicari possit (§. 176. 178); ventus per aerem condensatum flabit.

COROLLARIUM 5.

191. Quoniam vero subito condensari nequit, nisi magnam ante passus fuerit rarefactionem (§. 6. 8); ventus flabit per aerem, dum post æstum vehementem refrigeratur.

COROLLARIUM 6.

192. Similiter si aer subito rarefiat, elater ejus subito intenditur (§. 148), adeoque defluet per contiguum actioni vis rarefacientis non obnoxium (§. 75. *Mechan.*). Flabit ergo ventus ex loco, in quo aer subito rarefit.

COROLLARIUM 7.

193. Cum vires solis in rarefaciëndo aere notissimæ sint; solem in ventorum genesin influere manifestum est (§. 5. 6).

PROBLEMA 42.

194. *Ventum excitare adversus plagam desideratam spirantem.*

RESOLUTIO.

1. Construatur vas cylindricum ABCD ex ligno, cujus diameter AB & altitudo AC eo major esse debet, quo impetuosior ventus excitandus. Tab. II. Fig. 16.
2. Vas ipsum sit undiquaque probe clausum, solo foramine in E gaudens, cui tubus EF utrinque apertus ante immittendus.
3. Per medium cylindrum transeat axis mobilis HI quatuor brachiis cum aliis coriaceis K, L, M, N, & curriculo O extra vas instructus. Habeat vero curriculus 6 vel 7 bacillos.
4. Curriculo occurrat rota dentata PQ cum axe curvato RS 30 vel 28 dentes habens.

Dum ergo axis SR curvatus semel convolvitur, alter erectus IH 5 vel 4 conversiones absolvit adeoque alæ L, M, N, K per aerem inclusum

celerrime feruntur eundemque per tubum expellunt. Cum adeo tubus versus plagam desideratam dirigi possit; ventus excitabitur (§. 166) adversus plagam desideratam spirans. *Q. e. f.*

SCHOLION.

195. *Cum in molis frumentariis axis ferreus* HI *cum curriculo* C *occurrat* (§. 925. Mechan.); *hoc artificio sub lapidibus molaribus facile excitatur ventus partes a granis frumenti abrasas a nucleo eorum separaturus. Tum vero tubus* EF *facci vices sustinet, & basis* GF *declivis, in* G *vero foramen esse debet, ut grana graviora per hoc decidant, leviores autem partes abrasa a vento per* F *ejiciantur. Hoc artificio uti quoque liceret ad paleas a frumento post triturationem separandas; additis addendis, qua nunc fusius exponere non est nostri instituti.*

CAPUT VII.
DE
CALORE AC FRIGORE, ITEMQUE HUMIDITATE AC SICCITATE AERIS.

DEFINITIO 14.

196. *Thermoscopium* est instrumentum caloris ac frigoris in aere incrementa & decrementa indicans. *Thermometrum* vero est instrumentum, quo calorem ac frigus aeris metiri licet.

DEFINITIO 15.

197. *Hygroscopium* est instrumentum, quod humiditatis & siccitatis in aere incrementa & decrementa indicat. *Hygrometrum* vero est instrumentum, quo humiditatem & siccitatem aeris metimur.

PROBLEMA 43.

198. *Thermoscopium construere.*

RESOLUTIO.

1. Tubo BC, qui globo vitreo AB cohæret, immittatur aqua communis regiæ permixta & ab orichalco in hac soluto viredine tincta (§. 149). Opera vero danda est, ut tantum aeris in globo Tab. II. Fig. 17.

bo & tubo relinquatur, qui hieme maximam condensationem passus globum exacte repleat & æstate ad summam rarefactionis gradum perductus non omnem ev tubo BC liquorem expellat.

2. Tubus immittatur vasculo vel alteri ejus extremo cohæreat globus CD apertus, ut aer ejici, iterumque ingredi libere possit, & in quo similis liquor contineatur, qualis in tubum immissus.

3. Ab utroque latere tubi applicetur scala EF in particulas quotcunque æquales dividenda.

DEMONSTRATIO.

Si enim aer ambiens fit calidior, liquor in tubo descendit: si is frigidior evadit, hic ascendit (§.151). Incrementis, igitur caloris & frigoris indicat hoc instrumentum, adeoque thermoscopium est (§.196). Q. e. d.

Aliter.

1. Eodem artificio, quo ante, & cum eadem cautione, in tubum BC in varios gyros contortum commoditatis gratia (ne scilicet longior spatium nimis longum occupet nec facile damnum patiatur) immittatur pauculum Mercurii, pisi magnitudinem non excedens.

2. Tubulus dividatur in partes quotcunque æquales, quæ scalæ vicem sustineant.

Accessus Mercurii ad globum frigoris; recessus vero ejusdem a globo caloris incrementa indicabit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ præcedens.

COROLLARIUM 1.

199. Quia liquor in thermoscopio primo & Mercurius in altero etiam ascendit, si aer gravior redditur; contra vero descendit, si levior evadit (§.151): caloris ac frigoris incrementa non satis fideliter exprimit.

COROLLARIUM 2.

200. Quoniam tamen mutationes admodum sensibiles sunt; si aliorum corporum calor examinandus, commode thermoscopio altero utimur: exiguo enim temporis spatio, quo experimentum instituitur, gravitas atmosphæræ sensibiliter non mutatur.

SCHOLION.

201. *Quodsi in thermoscopio primo liquorem colore intense rubro & admodum grato tingere volueris; aquam ferventem affunde foliis florum simpliplicium atque rubidorum malvæ hortensis arefactis, ut color extrahatur. Quodsi enim tinctura aquam regiam affuderis, non sine jucunditate colorem intense rubrum*

brum emergentem contueberis, reliquos omnes longe antecellentem, quibus huc usque usi sunt artifices.

PROBLEMA 44.

202. *Thermoscopium Florentinum construere.*

RESOLUTIO.

Cum Academici Florentini perpenderent incommoda, quibus thermoscopium paulo ante descriptum premitur (§. 198); mensuram caloris & frigoris quaesivere in rarefactione spiritus vini, utut rarefactione aeris longe minore (§. 152). Thermoscopium vero ab ipsis repertum ita construitur:

1. Frustulis ex radice curcumae aut anchusae relectis affundatur spiritus vini rectificatissimus, seu qui, dum accensus conflagrat, pulverem pyrium accendit; a priore enim radice colore flavo, a posteriore autem rubro tingetur.
2. Postea spiritus vini iterum iterumque filtretur per chartam bibulam, ut particulae crassiores ex radice extractae remaneant.
3. Spiritu vini tincto & filtrato impleatur globus vitreus AB cum tubo BC. Ne autem hieme spiritus omnis in globum descendat; globum immittere juvat nivi multo sale conspersae aut (si aestivo tempore thermoscopium parare volueris) aquae fontanae frigidae, in qua multum nitri solutum, ut spiritus condensatus indicet terminum, quem maximo frigore attingere valet.
4. Quodsi a globo longiore intervallo adhuc distet, aliqua ejus portio rursus expellenda. Ne autem tubus justo longior fiat, globum spiritu plenum aquae calidae carbonibus candentibus impositae immittatur & notetur terminus, ad quem pertingit, ubi ebullitioni proximus.
5. Hoc ergo termino ad flammam lampadis admoto, tubus hermetice sigilletur.
6. A latere denique affigatur ut in probl. praec. scala EF in particulas quotcunque aequales divisa.

Tab. III. Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Quoniam spiritus vini rarefit & condensatur (§. 152); calore crescente, in tubo ascendet (§. 8); decrescente, descendet (§. 6); Caloris igitur incrementa & decrementa instrumentum indicat, consequenter thermoscopium est (§. 196). *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

203. Si spiritus vini per multos gradus scalæ ascendit, calorem multum crevisse constat; si descendit, idem multum decrevisse intelligitur: quoniam tamen ratio caloris hodierni ad hesternum non indicatur, instrumentum calorem non metitur (§. 23. *Geom.*) adeoque thermometrum non est (§. 196).

COROLLARIUM 2.

204. Liquor in tubo vi gravitatis suæ deorsum nititur (§. 4. *Mechan.*), adeoque ex globo in ipsum ulterius ascendenti resistit tanto quidem magis, quo altius jam ascendit (§. 10). Præstaret itaque, situm tubi BC esse horizontalem.

COROLLARIUM 3.

205. Cum necessario aliquid aeris super liquore in parte tubi vacua existat, is vi elateris deorsum nititur (§. 26), adeoque ascensui liquoris resistit. A liquore ascendente comprimitur (§. 17). Quare elater ipsius augetur (§. 71) ab actione caloris forte ulterius intendendus (§. 146).

COROLLARIUM 4.

206. Cum experientia constet, remissiorem caloris gradum facilius cum spiritu vini in globo communicari, quam vehementiorem; rarefactiones spiritus vini viribus productricibus proportionales non sunt, inprimis cum & vehementior caloris gradus plus liquoris in tubulo offendat, quam remissior, cui tamen facilius communicari potest calor, quam in globo stagnanti. Thermoscopium adeo Florentinum, accedente inprimis resistentia inæquali (§. 204. 205), thermometrum non est (§. 196).

SCHOLION 1.

207. Hallejus *autor est, se didicisse ex iis, qui spiritum vini diu asservarunt, quod is successu temporis partem vis expansivæ amittat* (g). *Sed meretur res accuratiori examini subjici, ut eorum, quæ de legibus experientiarum alibi tradidimus* (h).

SCHOLION 2.

208. *Varii variis modis gradum fixum caloris ac frigoris quæsiverunt, a quo utrinque gradus reliqui computentur, ut observationes eodem vel diverso tempore in pluribus locis factas conferre inter se liceat. Aliqui locum notant, in quo liquor hieme hæret, dum aqua congelare incipit, iterumque alterum tempore æstivo, dum butyrum juxta globum thermoscopii positum liquefit. Spatium intermedium in duas partes æquales dividunt, quod divisionis punctum in ipsorum graduatione calori temperato respondet. Pareem utramque in 10 gradus subdividunt, tandemque quatuor istiusmodi gradus infra gradum congelationis aquarum, quatuor itidem super gradum liquationis butyri transferunt. Notandum vero divisionem fieri thermoscopio in umbra collocato, & ne observationes turbentur, versus eandem constanter plagam instrumentum dirigi debere, quam respiciebat, cum divi-*

(g) Transact. Anglic. n. 197. p. 650.
(h) Act. Erud. A. 1708. p. 163. & seqq. conf. Logica §. 664. & seqq.

Digitized by Google

divisio absolveretur. Enimvero supponunt, congelationi aquæ cujusvis eundem gradum frigoris & liquationi butyri cujusvis eundem gradum caloris respondere, ac singula thermoscopia ab eodem caloris vel frigoris gradu easdem recipere impressiones. Posterius autem fallere non ignorant, qui experientia edocti, thermoscopia eidem parieti affixa non eundem constanter caloris gradum ostendere, utut eadem utrique graduatio fuerit applicata. Et valde vereor, ne primi cum cura examinaturi contrarium similiter experiantur. Differunt enim aquæ inter se, differunt inter se butyra: id quod vel sola gravitatis specificæ variatio monstrat, ut alia taceamus, quæ meditantibus & experimentantibus se offerent.

SCHOLION 3.

209. *Suadent alii, ut globus thermoscopii nivi vel glaciei multo sale conspersa immittatur, & gradus, ad quem spiritus subsistit notetur. Hinc thermoscopium in cellam profundam transferunt, quorsum aëris externi nihil pertingit, ut actionem aëris temperati recipiens gradum caloris temperati indicet. Denique spatium intermedium in 15 vel plures partes æquales dividunt, etiam supra gradum caloris temperati transferendas, ut graduatio integra absolvatur. Sed ut non urgeam, quæ in scholio præcedente jam abunde dicta sunt, quis quæso respondeat quærenti: an omni nivi idem sit frigoris gradus? An omni sali eadem vis corrodendi lamellas nivis glaciales? Suppono enim, frigus a sale nivi permixto produci, quatenus corrodit lamellas glaciales & abrasis superficieculis earundem interiorem nucleum summe frigidum corporibus frigefaciendis applicari facit.*

SCHOLION 4.

210. *Celeberrimus* Hallejus *pro termino fixo assumit eum caloris gradum, quo spiritus vini ebullire incipit. Enimvero jam supra monuimus, quænam ratio sit suspicandi, forte nec hunc gradum esse usque adeo fixum. Et licet post ipsum* Amonton (i) *retinuerit ipsum gradum caloris, qui aquæ ebullienti convenit, dum thermoscopium Mercuriale construit, & postea* (k) *hujus ope thermoscopio Florentino talem graduationem applicari docuerit, quæ ab eodem caloris gradu reliquos computat: id tamen dubii remanet, cum diversa sit aquarum gravitas specifica, quæ massæ ac texturæ diversitatem arguit, num calor aquarum ebullientium omnium idem sit: unde operæ pretium facient rerum naturalium scrutatores, si factis accuratis experimentis inquirant, quinam sit gravitatis fluidorum specificæ ad calefactionem eorundem respectus.*

SCHOLION 5.

211. *Nondum excipere licet, istiusmodi minutias in praxi non esse attendendas: neque enim hactenus demonstratum, quod irregularitates a causis memoratis pendentes sint minutiæ. Lis igitur adhuc pendens nonnisi pluribus experimentis a pluribus præsertim pluribus in locis factis dirimenda.*

SCHO-

(i) Memoir de l'Acad. Royal. des Scient. A. 1702. p. m. 210. & seqq.
(k) Memoir. de la meme Academ. A. 1703. p. m. 63. & seqq.

SCHOLION 6.

212. Carolus Renaldinus (l) *tradit modum integram graduationem methodo experimentali determinandi, ut habeantur gradus inequales æqualibus gradibus caloris, dum intenditur, respondentes, quam collectores Actorum Eruditorum Lipsiensium* (m) *his verbis describunt:* „ Capiatur tubus gracilis, longitudinis circiter quatuor palmorum, „ cum annexa bulla, eique infundatur „ spiritus vini tantum, ut sphærula glacie circumdata omnino repleatur, neneque tamen aliquid redundet, orificiumque tubi sigilletur hermetice. Deinde parentur sex vasa, quorum quodlibet aquæ libram & aliquid amplius potest recipere, & in primum infundantur aquæ gelidæ unciæ 11, in secundum unciæ 10, in tertium 9 & sic porro. His peractis thermometrum mergatur in vas primum eique affundatur aquæ ferventis uncia una, observeturque quo usque ascendat spiritus in collo & locus unitate notetur. Porro transferatur in vas secundum, cui injectæ aquæ ferventis unciæ duæ denuoque notetur locus, ad quem ascendit spiritus, noteturque binario & sic dein eps. Quodsi cui placeat ulterius procedere, donec tota aquæ libra sit insumta, perfectius erit instrumentum elaboratum, nempe duodecim numeris aut asteriscis distinctum, quibus caloris termini denotantur.

SCHOLION 7.

213. *Facile incautis imponere poterat* Renaldinus, *ut sibi persuaderent, hac ratione exactam caloris mensuram obtineri. Habes enim duodecim caloris gradus & effectus respondentes gradui uni, duplo, triplo, quadruplo &c. Unde vicissim cognoscentur gradus simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. caloris. Dabitur igitur ratio caloris hujus diei ad calorem cujuscunque alterius, consequenter calorem metiri licet* (§. 23. Geom.). *Atat! non nimis confidenter pronunciandum. Examinemus, quaso, supposita, ne forte aliquid esse ponamus, quod non est, sicque erroneam conclusionem pro vera eliciamus. Supponitur, nos habere gradum caloris simplum, si 11 unciis aquæ gelidæ affundatur una ferventis; gradum duplum, si 10 affundantur duo; triplum, si 9 tres; quadruplum, si 8 quatuor &c. affundantur. Supponitur porro calorem simplum vi simpla, duplum dupla, triplum tripla, quadruplum quadrupla &c. uniformiter agere in spiritum vini in globo contentum. Supponitur denique, si idem effectus in thermoscopio a calore aeris ambientis producitur, qui ab aqua calida producebatur, aeri eundem competere caloris gradum qui aquæ conveniebat. Enimvero nullum ex his suppositis verum est. Quod enim primum attinet, concedamus interea, calorem aquæ ferventis, si frigida affundatur, per hanc æqualiter distribui. Distribuentur adeo unus caloris gradus per partes undecim; duo per 10; tres per 9; quatuor per 8 &c. Si itaque assumamus æqualia istarum aquarum volumina, e. gr. Singularum* par-

(l) in Philos. Nat. dissert. 16. sect. 12.
(m) Supplement. Tom. 2. sect. 10. p. 453.

partes duodecimas, non erit calor duplus in altero, triplus in tertio, quadruplus in quarto casu &c. Fallit ergo suppositum primum. Sed non minus fallit alterum: neque enim calor aquæ ferventis per frigidam, cui affunditur, æqualiter diffunditur; nec calor aquæ calidæ in spiritum vini uniformiter agit, id est, eadem vi per omne tempus actionis suæ. Prius experientiam vulgi non fugit, ut adeo id aliis experimentis & rationibus confirmari non opus sit. Posterius facillime ostenditur. Notum nimirum est, requiri aliquod temporis spatium, antequam calorem suum cum spiritu vini per globum vitreum communicet aqua calida. Sed per totum illud temporis spatium eundem calorem aqua non retinet, cum eum continuo exhalet. Nequaquam igitur habentur effectus veri graduum caloris simpli, dupli, tripli, quadrupli &c. si vel maxime efficeretur, ut calor in aquis diversis sub initium immersionis globi esset nunc simplus, nunc duplus, nunc quadruplus &c. Calor denique ambientis aeris non modo in spiritum vini in globo, sed & in tubo contentum agit, adeoque non istum modo, verum etiam hunc rarefacit. Immo nondum constat, num omnia fluida, in quibus idem est gradus caloris, eadem facilitate cum alio corpore calorem suum communicent: nec forte hæc disquisitio multum tractabilitatis promittit. Taceo alia, quæ hic urgeri possent. Sufficit satis constare, methodum Renaldinianam *suppositis niti partim precariis, partim manifesto falsis, ut adeo ratio nulla sit, cur vulgari divisioni in partes æquales hæc in partes inæquales divisio mechanica præferatur.*

SCHOLION 8.

214. *Cæterum quamvis mutationes thermoscopii Florentini admodum sensibiles existant, ita ut spiritus vini per notabile intervallum ascendat, manu calida admota, iterumque descendat, ea remota; ubi tamen per insigne intervallum tempore hiemali descendit, ascensus intervalla decrementis frigoris non satis respondent. E. gr. hoc ipso (n) anno d. 9. Jan. h. 8. mat. liquor in thermoscopio meo descenderat usque ad 72mum gradum scalæ frigoris, cum consueta phænomena frigus intensum loquerentur: sed cum d. 18 Jan. eadem hora tempestate jam multo mitiore ad gradum 80mum subsisteret, hora tertia, qua nix & glacies ad pristinum fluiditatis statum reducebantur, spiritus ad 72mum hærebat. Scilicet ad eundem sæpius gradum depressus cernitur liquor, cum tamen phænomena alia diversitatem caloris ac frigoris insignem manifesto prodant. Imo interdum depressio spiritus major cum effectibus frigoris remissioris; minor vero cum effectibus multo intensioris conjungi solet. Et hæc observantur, etiamsi thermoscopium collocetur in loco, ad quem aeri externo liber patet aditus. Ratio phænomeni hæc mihi videtur. Experientia constat, frigore invalescente multum aeris ex fluidis expelli: id quod testantur vesiculæ tum superficiebus vitrorum, in quibus continentur, adhærentes. Extra dubium itaque positum videtur, fri-*

(n) scilicet 1713, quo prima horum Elementorum editio prodiit.

frigore intenso ex spiritu quoque vini in thermoscopio aerem ejici & per tubi vacuam partem expandi. Cum adeo aer ambiens calidior rursus redditur, inclusi elater augetur spirituique ascensuro resistit (§. 146). *Quoniam vero per experimenta* Mariotti (o) *determinata quadam aeris quantitas in fluido salis instar dissolvitur; aer a frigore expulsus crescente calore sensim sensimque spiritui rursus permiscetur: quod antequam fiat, altitudines caloris incrementa indicantes semper erunt justis minores.*

EXPERIENTIA 6.

215. *Funem cannabinum ex duplici filo contortum humectavimus & longitudinem ejus notabiliter minui animadvertimus: ubi vero denuo exsiccabatur, ad pristinam redibat dimensionem. Multo autem brevior evadebat, ubi sub aqua per aliquod tempus ipsum detinueramus. Huc pertinent, quæ* Schwenterum *expertum esse in Geometria* (p) *annotavimus. Et* Guilielmus Molyneux, *Armiger atque Societatis Dublinensis Secretarius, istiusmodi funem humectatum cum appenso pondere suspendit, eumque pro ratione exsiccationis resolvi animadvertit. Cum pelvim aqua calida plenam admovisset, ascendente vapore funis denuo velociter contortus, eoque cessante rursus resolutus. Immo halitu oris octies aut decies repetito, funem contorqueri didicit celeriterque resolvi admota prope uncum candela aut ferro ignito* (q).

COROLLARIUM.

216. Sola igitur humiditas aeris funium cannabinorum longitudinem notabiliter abbreviare, ipsosque funes arctius contorquere valet.

SCHOLION.

217. *Humor nimium dimensionem funis secundum diametrum auget. Sed cum a gyri spirales filorum contortorum fere in circulares abeant autopsia teste, dimensio secundum longitudinem decrescit. Abbreviationis igitur causa non modo ab insinuatione humoris in poros funium, sed & inprimis a spirali eorundem textura petenda.*

EXPERIENTIA 7.

218. *Idem in nervo aliquo fidium, cujus longitudo erat* 1′ 14″ *circiter juxta mensuram Rhenanam, experti sumus. Cum enim eundem duobus clavis utraque sui extremitate alligatum juxta fenestram apertam extendissemus &* ope

(o) Essay de la Nature de l'Air p. 97. & seqq.
(p) §. 129. p. 133.
(q) Philos. Transact. Anni 1685. n. 162. p. 1032, conf. Acta Erudit. A. 1686. p. 389, 390.

ope pauculæ ceræ indiculum ligneum applicassemus, per complures dies non sine voluptate nervum contorqueri advertimus, cum sole oriente ros decideret, ita ut fere semicirculum intra exiguum temporis intervallum indiculus descripsisse notaretur. Ast Solis radiis illustratus nervus iterum resolvebatur atque indiculum ultra terminum reducebat, in quo cum sub ortum solis conspexeramus, cum fenestram cubiculi noctu clausam primum aperiremus. Non tamen singulis diebus æquales indiculi itus reditusque notavimus. Eundem nervum sub aqua demersum sensibiliter contorqueri didicimus: satis enim celeres ejus intra aquam convolutiones notavimus, non secus acsi duo manibus prehendentes ejus extremitates ipsum vi contorquerent. Extracti ex aqua minorem longitudinem notavimus, quam cum eundem aquæ immitteremus, & radiis licet solaribus exsiccatus ad pristinam longitudinem reducturi vires eludebat.

SCHOLION.

219. *Similia se expertum testatur* Sturmius (r). *Non ignoro, quod alii (s) contrarium accidere affirmant; sed quid alii experti sint, mihi quidem haud constat, cum circumstantias singulares non annotent. Mihi rem enarrare libuit, prout eandem expertus sum.*

PROBLEMA 45.

220. *Hygroscopium construere.*

RESOLUTIO.

1. Funem cannabinum aut nervum fidium AB juxta parietem extende super rotula B alterique ejus extremo D pondus E alliga, cui infixus sit stylus FG. Tab. III. Fig. 23.
2. Eidem parieti affigatur lamina metallica HI, in partes quotcunque æquales divisa.

Dico hygroscopium esse constructum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim humor funium & chordarum longitudinem sensibiliter abbreviet, humore autem rursus exspirato iterum resolvat (§. 214); pondus humore aeris aucto asendet, imminuto descendet. Et quoniam index FG in lamina HI spatium monstrat, per quod pondus ascendit, vel descen-

(r) in Colleg. Curios. part. 1. tent. 14. phæn. 5. p. 124. & seqq.
(s) Traitez des barometres, thermometres & notiometres p. 94.

ſcendit, intervalla vero aſcenſus & deſcenſus decrementis ac incrementis longitudinis funis aut nervi fidium ABD æqualia ſunt; inſtrumentum indicat, num dato hoc tempore aer plus alat humoris, quam alio habuit. Eſt igitur hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

b. Si hygroſcopium ſenſibilius deſideres, funem aut nervum fidium circa plures trochleas A, D, E, F & G circumvolve & reliqua fiant ut ante. Perinde vero eſt, ſive partes funis AB, AD, DE, EF, FG ſint horizonti parallelæ, ut in ſchemate expresſimus, ſive ad eundem perpendiculares: prouti nempe quolibet in caſu commodum viſum fuerit.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt cum præcedente.

Aliter.

Tab. III. Fig. 22.

1. Funis cannabinus AC aut nervus fidium altera ſui extremitate unco ferreo A alligetur, altera vero C in centro tabulæ ligneæ EF horizontaliter poſitæ firmetur.
2. Prope C infigatur pondus plumbeum D unius circiter libræ cum annexa regula DG.
3. Ex centro C in tabula deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim funis cannabinus atque nervus fidium levi quodam humore aeris, qualem ſecum vehit halitus oris, imbutus velociter contorqueatur, eodem autem exhalante rurſus extemplo reſolvatur (§. 215. 218); evidens eſt, quod humore aeris aucto index quantitatem contorſionis vel reſolutionis monſtrare, conſequenter humiditatis & ſiccitatis incrementa indicare debeat. Eſt igitur inſtrumentum hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. III. Fig. 23.

1. Funis cannabinus aut nervus fidium HI altero ſui extremo ſuſpendatur ex unco H.
2. Alteri extremitati I annectatur globus K unius circiter libræ.
3. Limbo pedamenti LM inſcribantur duæ peripheriæ circuli parallelæ & ſpatium intermedium in partes quotcunque æquales dividatur.

4. Glo-

4. Globo infigatur ſtylus NO, cujus extremitas O limbi diviſionem fere attingit.

Dico, hunc indicem incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris oſtenſurum.

DEMONSTRATIO.

Eadem prorſus eſt, quæ proxime præcedens.

Aliter.

Tab. III. Fig. 24: 1. Parentur ſubſcudes ſulcatæ AB & CD ex ligno quercino.

2. Intra crenas oppoſitas aptentut aſſerculi abietini AEFC & GBDH, ita ut ultro citroque facillime moveri posſint.

3. In extremitatibus ſubſcudium A, B, C, D clavis firmentur asſerculi & inter utrumque relinquatur ſpatium EGHF, cujus latitudo EG unius circiter digiti.

4. In I firmetur lamina orichalcea dentata IK & in L rotula dentata, cujus axi in altera machinæ facie index inferatur.

5. Tandem ex centro axis in eadem facie deſcribatur circulus in partes quotcunque æquales dividendus.

DEMONSTRATIO.

Cum enim experientia teſte lignum abietinum humorem aeris facillime imbibat ac inde turgeſcat, humore autem rurſus exſpirato tabeſcat: ſi aeris humiditas augetur, aſſerculi AF & BH humore turgeſcentes propius ad ſe invicem accedunt; ſi illa rurſus minuitur, iidem aſſerculi tabeſcentes denuo a ſe invicem diſcedunt. Quoniam vero diſtantia aſſerculorum nec minui poteſt ſine rotulæ L convolutione, nec augeri; index monſtrabit incrementa humiditatis & ſiccitatis aeris. Eſt igitur machina conſtructa hygroſcopium (§. 197) *Q. e. d.*

Aliter.

Manoſcopium ſuperius deſcriptum in hygroſcopium abit, ſi globo evacuato E ſubſtituas ſpongiam, aut materiam quandam aliam, quæ humorem facile imbibit. Solet autem ſpongia primum aqua communi, deinde, ubi bonam partem rurſus exſiccata fuerit, aqua vel aceto, in quo aliquid ſalis Ammoniaci ſeu ſalis tartari diſſolutum fuerit, macerari atque in loco umbroſo denuo exiccari. Tab. II. Fig. 14

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim aer humidus evadit, ſpongia gravior reddita præponderat; ſi ille levior redditur, hæc rurſus altius tollitur experientia teſte, adeoque index incrementa & decrementa humiditatis indicat. Eſt ergo hygroſcopium (§. 197). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

221. *Omnia hygroſcopia, quæ hactenus deſcripta ſunt, ſenſim ſenſimque a perfectione ſua deficiunt, tandemque ab humiditate aeris parum aut nihil mutationis patiuntur. Uſus ultimi eſt magis diuturnus, quam cæterorum omnium.*

SCHOLION 2.

222. *In hygroſcopio ultimo* Gouldius (t) *loco ſpongiæ omnium maxime commendat oleum vitrioli, quod indies in tantum augeri obſervavit, ut intra ſpatium 57 dierum a tribus drachmis ad drachmas novem & 30 grana aſcenderet. Enimvero non annotat, num etiam humiditatem tam prompte rurſus dimittat, quam eam attrahit: de quo valde dubito, adeoque præſenti inſtituto oleum vitrioli minime congruum judico.*

SCHOLION 3.

223. *Cæterum quilibet me non monente videt, ſtructuram hygroſcopiorum multis modis variari poſſe.*

(t) in Actis Erudit. A. 1685. p. 315.

FINIS AEROMETRIÆ.

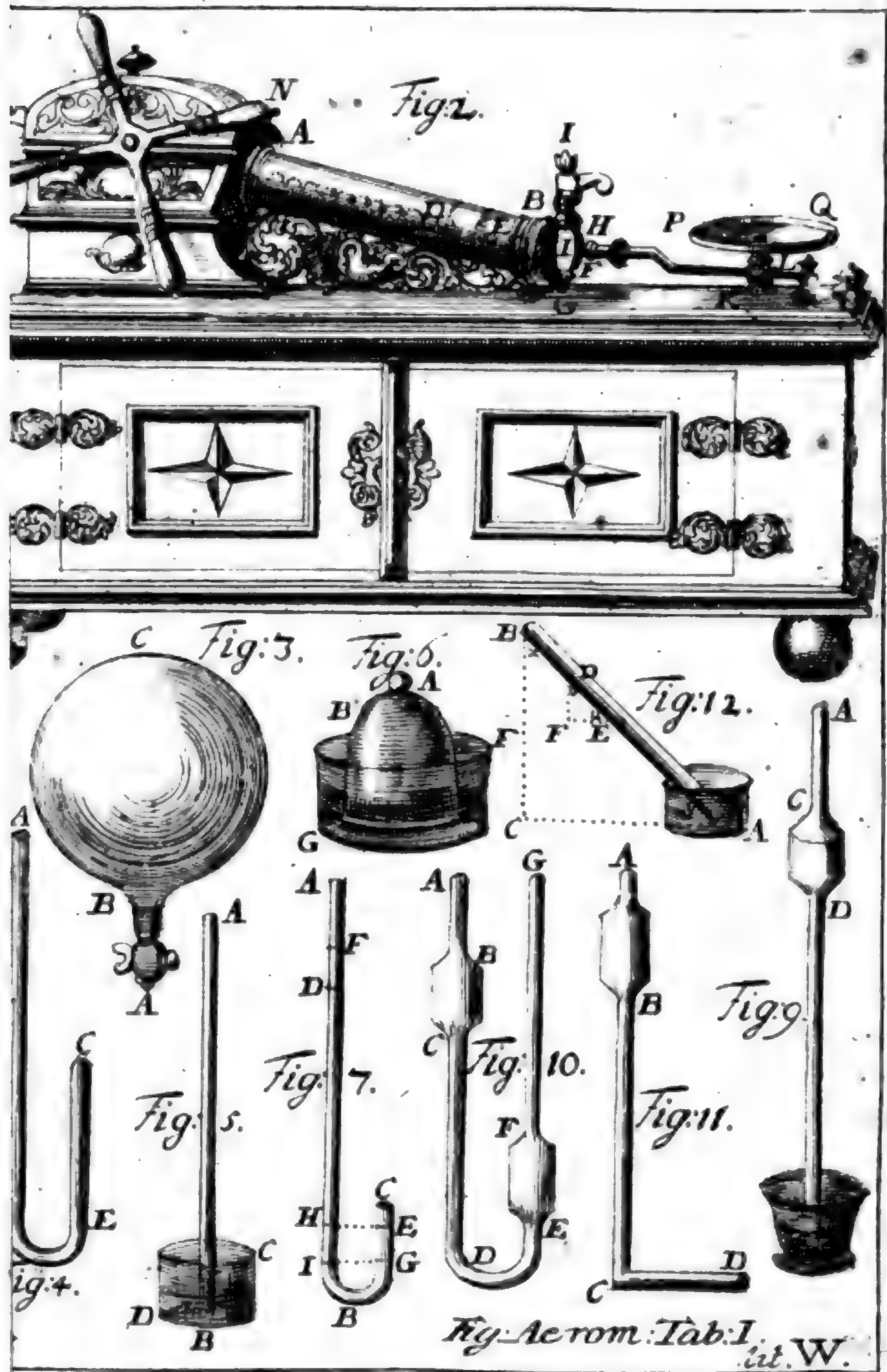


Fig:2.
N
A
I
B
H
P
Q
C
Fig:3.
Fig:6.
A
B
F
G
Fig:12.
D
F
E
C
A
Fig:5.
Fig:7.
Fig:10.
Fig:11.
Fig:9.
ig:4.
Fig: Aerom: Tab:I.

lit.W.

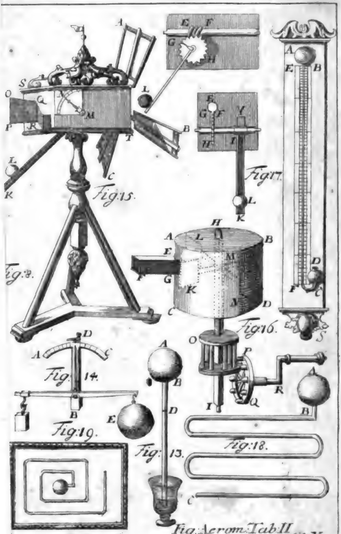


Fig: Aerom: Tab. II

lit. X

Google

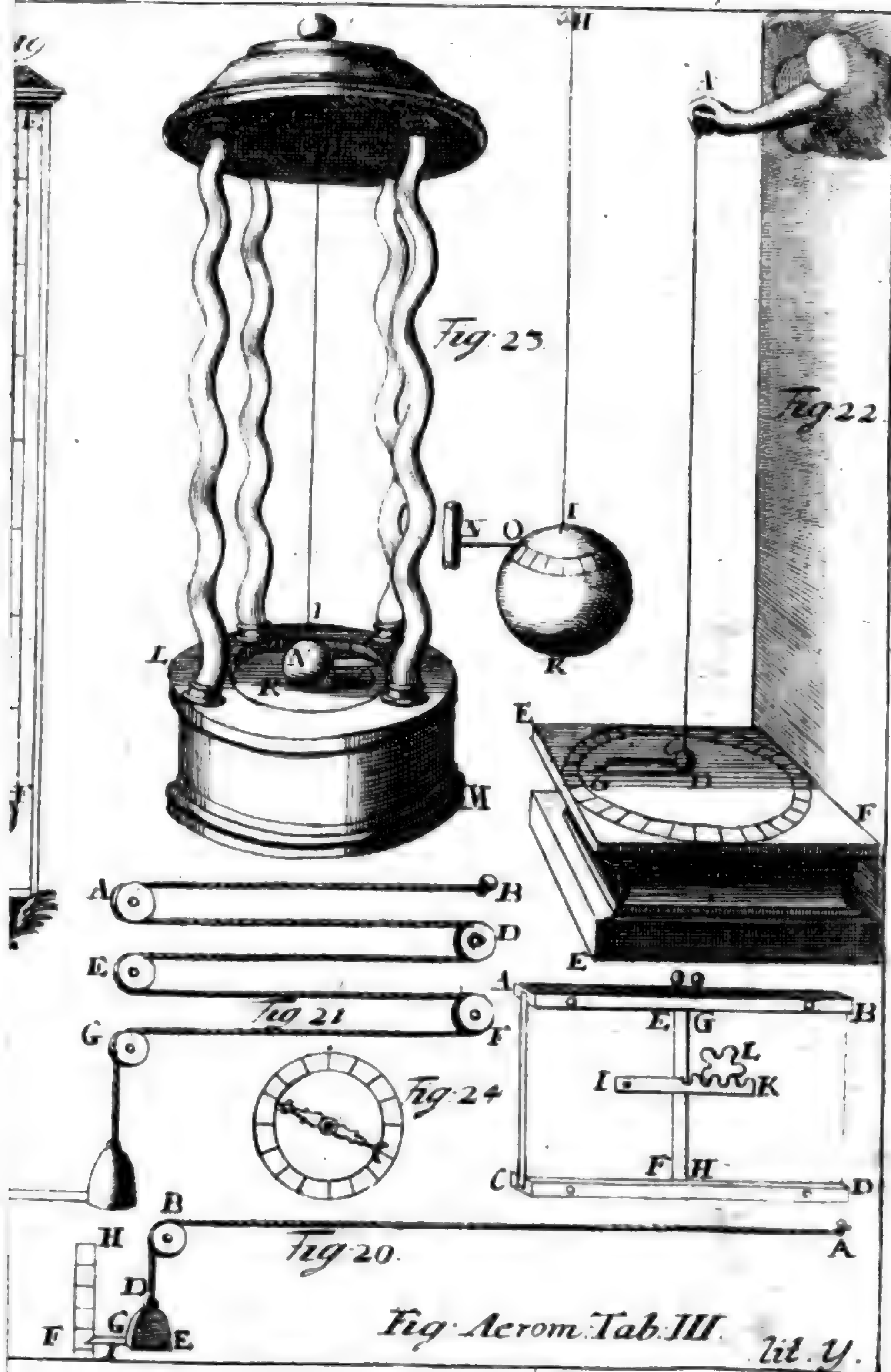


Fig. 23.
Fig. 22
Fig. 21
Fig. 24
Fig. 20.
Fig. Aerom. Tab. III.
lit. Y.

ELEMENTA HYDRAULICÆ.

PRÆFATIO.

In Hydraulica non modo machinarum, quibus aqua elevatur, atque fontium salientium constructio edoceri debet; sed explicandæ sunt præterea leges motus corporum fluidorum. Quemadmodum vero argumentum prius stupenda diligentia jam olim excultum fuit, id quod vel soli libri spiritalium *Heronis* aperte loquuntur; ita diffiteri non possumus, in posterore excolendo posteris adhuc multum relictum esse, utut præclara jam dederint viri de Hydraulica optime meriti *Majottus*, *Castellus*, *Torricellius*, *Borellus*, *Guilielminus*, *Mariottus* & inprimis celeberrimus *Varignonius* (a). Immo ipsa machinarum Hydraulicarum constructio Matheseos puræ opem adhuc flagitat. Dignum vero utrumque argumentum, quod indies magis magisque excolatur. Si enim machinas Hydraulicas fontesque salientes spe-

(a) Memoires de l'Academie Royal. des Sciences A. 1703. p. 285.

ctes, de Hydraulica non inepte dixeris, quod vulgo de Poëtis ingeminari ſolet, quod non minus prodeſſe, quam delectare velit. Egregia ſcilicet vitæ humanæ commoda præſtat, dum varias vias oſtendit, per quas aqua ad locum datum derivari poteſt. Mirifice delectat, dum jucunda fontium ſalientium aliorumque admirandorum ſpectacula oculis objicit. Leges motus aquarum tum ad ſcientiæ naturalis, tum ad machinarum perfectionem tendunt: & ſi quando perfectam habebimus, motus fluidorum in corpore animali diſtinctius cognoſcetur, unde multa commoda in genus humanum redundabunt. Quamvis vero mihi potiſſimum propoſitum ſit, machinarum Hydraulicarum conſtructionem exponere & ad cauſas ſuas revocare; non tamen leges motus fluidorum prorſus inſuper habebo, ſed eas propoſiturus ſum, quæ ad ulteriorem disquiſitionem viam ſternunt & præ reliquis ſcitu neceſſariæ ſunt. Has meditentur inprimis illi, quos rerum naturalium cognitio ſolidior juvat. Nemo autem ad Hydraulicam accedat, niſi notionem virium ex Mechanica, æquilibrium fluidorum ex Hydroſtatica; proprietates aeris ex Aerometria perſpexerit.

ELE-

ELEMENTORUM HYDRAULICÆ
CAPUT I.
DE
MOTU FLUIDORUM A GRAVITATE PENDENTE.

DEFINITIO I.

1. Hydraulica est scientia motus fluidorum, præsertim aquarum.

SCHOLION.

2. *Quare cum in Hydrostatica explicetur æquilibrium fluidorum, ex sublato autem æquilibrio motus nascatur; Hydraulica Hydrostaticam supponit. Unde contigit, ut nonnulli, qui de Hydraulica scripsere, hydrostaticam cum ea conjunxerint.*

DEFINITIO 2.

Tab. I. Fig. 1. 3. Per *tubum* atque *Canalem* intelligo cylindrum quemcunque AB intus cavum.

DEFINITIO 3.

4. *Lumen* est apertura tubi.

DEFINITIO 4.

5. *Epistomium* vel *Clavicula* est instrumentum, quo lumen ad arbitrium obturari & aperiri potest.

SCHOLION.

6. *Quoniam in machinis Hydraulicis epistomiis creberrimus est usus, non inconsultum ducimus, ut ejus structura hic exponatur.*

PROBLEMA I.

7. *Epistomium vel claviculam construere.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO.

1. Paretur ex orichalco cubus AB CD cum gemina tubi parte GH & EF, quarum altera GH cochlea instrui debet, ut ad arbitrium ad tubum vel vas firmari, iterumque ab eo removeri possit, aut si cochlea destituantur, tubo vel vasi afferruminetur.
2. Cubus cylindrice excavetur, ut cavitati ejus immitti possit cylindrus solidus HI perforatus in K & in L matrice, in O manubrio instructus, ut per cavitatem cylindri trajectus mediante cochlea M in hoc situ firmari, & ope

ope manubrii O huc illucque versari possit.

3. Perforetur similiter uterque tubulus GH & EF.

Quodsi enim cylindrum solidum HI ita convertas, ut cavitas ejus K foraminibus tubulorum GH & EF respondeat, aqua in F effluere potest: si vero idem cylindrus HI soliditatem foraminibus iisdem obvertat, nihil aquæ egredi poterit, adeoque instrumeutum est epistomium vel clavicula (§. 5).

SCHOLION.

8. *Perfectissimam epistomii constructionem hic exponere libuit. In praxi enim facile apparebit ex circumstantiis singularibus, si qua omitti possint. Ita e.gr. communiter omittitur cochlea* M *cum matrice, qua cylindrum* HI *intra cavitatem cubi* AC *firmandum esse diximus. Neque cochlea* F *semper adest & tubus* GF *sæpius horizontalis est.*

THEOREMA I.

Tab. I. Fig. 3. 9. *Locus* A, *ad quem aqua ex loco alio* B *sive per alveum, sive per tubos aut canales derivanda, humilior seu centro Telluris propior esse debet hoc ipso altero.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim aqua non fluat, nisi vi gravitatis, gravitas vero sit nisus versus centrum Telluris (§. 4. *Mechan.*): per alveum fluere nequit, nisi quamdiu ad centrum Telluris propius accedere potest. Necesse igitur est, ut locus, ad quem aqua per alveum fluere debet, centro Telluris propior sit altero, unde derivatur. *Quod erat unum.*

Quodsi aqua per canales BC & CA derivari debet ex B in A, ita ut primum descendat ex B in C, deinde rursus ascendat ex C in A: sit DE linea horizontalis per C ducta & BD atque AE ad eandem perpendicularis. Sit jam AE < BD, presio aquæ in tubo BC major est pressione aquæ in tubo AC (§. 34. *Hydrost.*). Ista igitur prævalet, adeoque aquam AC impellit per A effluxuram. Enimvero si AC > BD; quamprimum aqua in tubo AC ascendit ad altitudinem ipsi BD æqualem, alteri in tubo BC æquilibratur (§. 34. *Hyprost.*), ab ea igitur ad ulteriorem ascensum sollicitari nequit (§. 75. *Mechan.*) Sed vi gravitatis deorsum nititur versus C (4. *Mechan.*), adeoque nec vi intrinseca ascendere potest. Ibi igitur subsistit, consequenter aqua ex loco B in alium A per tubos aut canales recurvos derivari nequit, nisi A sit humilior B. *Quod erat alterum.*

CO-

COROLLARIUM 1.

10. Cum alveus vel tubus BC, per quem aqua fluit ex B in C, sit planum inclinatum (§. 258. *Mechan.*); ad aquas fluentes applicari possunt, quæ in Mechanica cap. 6. de descensu gravium in plano inclinato demonstrata sunt.

COROLLARIUM 2.

11. Sunt igitur velocitates aquarum per diversos tubos fluentium eodem tempore acquisitæ ut tuborum longitudines reciproce (§. 302. *Mechan.*).

SCHOLION.

12. *Insuper hic & in sequentibus habemus resistentiam, quæ oritur ex affrictu in fundo alvei & parietibus tubi* (§. 933. Mechan.).

PROBLEMA 2.

13. ***Aquam ex loco uno derivare in alterum.***

RESOLUTIO.

1. Libelletur aqua (§. 912. *Mech.*) hoc est, investigetur, quam propior centro Telluris sit locus, ad quem aqua derivanda est, altero unde derivatur. (§. 904. *Mech.*)
2. Quodsi locus ille hoc humilior fuerit, non alia re opus est, quam ut aqua vel per canalem, vel per tubos declives ex loco excelsiore in humiliorem deducatur. prout vel magna, vel exigua ejus suppetit copia.
3. Ut aqua per intervalla nobis commoda visa effundatur, extremum tubi epistomio muniatur (§. 5).
4. Et quia experientia teste fontes naturales non omni tempore eandem aquæ copiam effundunt; non modo tubus capacior fieri debet, sed & circa fontem alveus quidam muro includendus, ut aqua intra ipsum assurgens inferius in tubum ruentem fortius premat, sicque per ipsum celerius fluat.
5. Si tubus vel canalis per intervalla sufficientem aquæ copiam non præbeat, aut præbeat nimis tarde; aqua remoto epistomio continuo fluens intra puteum ex saxis exstructum colligatur necesse est: qui tanto amplior vel profundior fieri debet, quo terminus ad quem fuerit termino a quo humilior.
6. Si denique aqua ad terminum infimum C delapsa rursus ascendere debet, deducenda est per canales inclinatos BC & CA, ita ut altitudo AE fuerit minor altitudine BD (§. 9). Tab. I. Fig. 3.

SCHOLION 1.

14. *Utimur autem in deducendis aquis tubis vel ligneis, vel plumbeis, vel argillaceis, aut canalibus lapideis. Luminis diameter in tubo ligneo est* 4, 5 *vel* 6 di-

6 digitorum pro quantitate aquæ effundendæ, conjunguntur autem annulo ferreo CD. Tubo plumbeo locus est, si aqua in altum elevanda ad fontes salientes: neque vero sanitati conducere deprehensa est aqua, quæ per plumbeos fluit. Argillaceorum interior superficies lithargyrio obducenda; immo & exterior, nisi sumtibus parcas. Longitudo eorum est duorum aut unius & dimidii pedum, crassities duorum digitorum, diameter luminis duorum aut trium. Commissuris pyxidatis conjunguntur, quæ calce viva oleo permixta obducuntur, ne noceat humiditas.

Tab. I Fig. 4.

SCHOLION 2.

15. *In alveo, quem prope fontem construxisti, ita aptandus est tubus, ut aquam nec ex fundo, nec ex superficie hauriat, quia prope fundum turbida, gravioribus quæ in aquam incidunt eandem petentibus, superficies vero insecta aliaque impuritates leviores innatant. Solent etiam ad arcendas sordes lumini canalis primo cribrum ferreum, sed stanno obductum apponere, immo ad percolandam aquam turbidam spongiam. Ut aqua conservetur limpida, alveum tecto aut fornice muniri præstat.*

SCHOLION 3.

16. *Ne Aer interceptus cursum aquarum iu canale intercipiat, sed exitus ei concedi queat, atque canalis ipse purgari possit, quoties opus fuerit; hinc inde est perforandus & obturaculo figuram coni truncati habente foramen obturandum.*

SCHOLION 4.

17. *Ceterum omni studio in deducendis aquis vitandus est aquarum ascensus, quia aqua ascendens majorem vim infert, quam descendens.*

PROBLEMA 43.

18. *Fontem naturalem arte construere.*

RESOLUTIO.

1. In loco elevato paretur fossa aggeribus undiquaque cincta & variis meatibus ex crustis lapideis excitatis hinc inde distincta, qui omnes in unum hient exiguo foramine instructum.
2. Fossa hæc desuper silicibus, calculis & ad duos tresve pedes glarea operiatur, & quicquid aquæ pluvialis aliunde derivari potest, cum cura eo derivetur.

Ita enim per glaream & calculos in meatus destillabit aqua & filtrata ab exhalationibus immixtis purgabitur, atque per orificium meatus ultimi ad radicem foveæ profluet.

SCHOLION

19. *Si intra meatus foveæ tot aqua non contineatur, ut perennis fluat, orificio meatus ultimi tubus cum epistomio aptandus.*

THEO-

THEOREMA 2.

Tab. I. Fig. 5. 20. *Si duo tubi æquales altitudines* AB *&* CD *atque æqualia lumina* E *&* F *habuerint, fuerintque ambo constanter pleni; æquali tempore æquales aquæ quantitates effundent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam lumina E & F æqualia sunt & altitudines aquæ super iisdem etiam æquales, *per hypoth.* aquæ luminibus proxime imminentes eadem vi premuntur (§. 42. *Hydrost.*), adeoque æqualia volumina æqualem adhibent egrediendi conatum, consequenter si aqua actu egreditur, æquali tempore æquales quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

21. Quoniam fundus tubi perpendicularis eadem vi premitur, qua fundus inclinati, ubi utriusque altitudo eadem fuerit, ipsique fundi inter se æquentur (§. 47. *Hydrost.*); si tuborum utcunque inclinatorum, modo æquealtorum lumina fuerint æqualia, tubique constanter pleni, eodem tempore eadem aquæ quantitas effluet.

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. 6. 22. *Si duo tubi æquales altitudines* AB, *&* CD, *sed lumina inæqualia* E *&* F *habuerint, fuerintque constanter pleni, quantitates aquarum effluentium eodem tempore sunt ut lumina* E *&* F.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur lumen majus divisum in plura minora alteri E æqualia: per singulas majoris partes æquali tempore quantitates aquæ effundentur illi æquales, quæ per lumen minus effuuditur (§. 20). Sunt adeo quantitates aquarum per utrumque lumen tempore æquali effusarum ut lumen minus ad numerum partium, in quas divisum concipitur majus, hoc est, ut lumen minus ad majus (§. 86. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

23. Si lumina fuerint circularia: quantitates aquæ eodem tempore ex tubis æque altis & constanter plenis effusæ sunt in ratione duplicata diametrorum luminis (§. 409. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

24. In tubis etiam inclinatis æque altis, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt in ratione duplicata diametrorum. Patet eodem modo, quo corollarium theorematis præcedentis (§. 21).

SCHOLION.

25. *Legem hanc experimentis non ex-*

exacte respondere autor est Mariottus (a). *Observavit enim, si diameter luminis* F *erat diametri luminis* E *dupla, ex tubo minore plus quamquartam aquæ ex majore effluentis partem eodem tempore effundi, tuborum altitudine medica existente. Enimvero in demonstratione abstrahimus ab omnibus obstaculis accidentalibus, quæ irregularitatem inducere solent, qualia plura hic concurrunt. Scilicet altitudo aquæ super lumine minor, quam ad latera vasis: aqua enim in ea voluminis parte, quæ lumini respondet, cavitatem assumit, cum effluenti non extemplo alia a lateribus succedere valet. Quoniam vero hoc decrementum altitudinis majus est in tubo majore, quam in minore, pressura quoque seu exeundi conatus minor erit in majore, quam in minore* (§. 44. Hydrost.) *Porro dum aqua superior effluentis locum occupare nititur, vim, qua premit, ad descendendum impendit, non ad premendum. Unde denuo conatus ad exeundum minuitur. Tandem hic quoque habenda est resistentia aeris & affrictus aquæ in superficie tubi & orificio inprimis ratio. Enimvero omnia illa impedimenta ad certas leges nondum revocata: immo hactenus nequidem constitutum est, quodnam eorum in casu quolibet dato prævaleat.* Dechales (b) *affrictus unice rationem habens, in aqua effundenda prærogativam majoribus luminibus tribuit, quia proportionaliter minorem superficiem habent, cum tamen ex modo dictis pateat,* Mariottum *prorsus contrarium expertum esse. Ipse vero* Mariottus (c) *non diffitetur, dari subinde causas, quæ multas irregularitates inducant, ita ut nunc majoribus, nunc minoribus luminibus in aqua effundenda tribuenda sit prærogativa, & assertum suum experimentis confirmat.*

THEOREMA 4.

26. *Si duorum tuborum constanter plenorum* AB *&* CD *lumina* E *&* F *æqualia fuerint; quantitates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut celeritates.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. aquam ex tubo AB effluere ea celeritate, quæ sit ad alteram ex tubo CD effusæ in ratione dupla. Quia hic tantum ratio habetur motus instantanei per foramen; motus aquæ ut æquabilis considerari potest, adeoque celeritates erunt ut spatia eodem tempore percursa (§. 33. *Mechan.*). Quodsi ergo filum aliquod aquæ in tubo AB extenderetur usque ad G; filum ex altero usque ad I: erunt longitudines EG & IF in ratione dupla seu celeritatum. Enimvero quantita

(a) Trait. du mouvement des Eaux part. 3. disc. I. p. 267.
(b) in Tract. de fontibus naturalibus prop. 30. f. 132. Tom. 3. Mund. Mathem.
(c) loc. cit. disc. 2. p. 276.

titates aquarum eodem tempore effluentium sunt ut fila ista seu cylindri EG & FI: quorum bases E & F cum æquales sint, *per hypoth.* altitudinum EG & FI rationem habent (§. 573. *Geom.*). Sunt adeo etiam quantitates aquarum effluentium ut celeritates (§. 167. *Arith.*(*Q. e. d.*).

THEOREMA 5.

Tab. I. Fig. 7. 27. *Si duo tubi habuerint lumina* E *&* F *æqualia, sed altitudines* AB *&* CD *inæquales, fuerintque constanter pleni, quantitas aquæ effluentis ex majore* AB *erit ad quantitatem aquæ effluentis ex minore* CD *eodem vel æquali tempore, in ratione subduplicata altitudinum* AB *&* CD.

DEMONSTRATIO.

Cum vires aquas per lumina E & F expellentes sint gravitates absolutæ aquarum luminibus imminentium; ob luminum æqualitatem *per hypoth* altitudinum AB & CD rationem habent (§. 573. *Geom.*). Sed quia gravia tantum prementia sunt vires mortuæ (§. 9. *Mechan.*), si quantitates aquarum eodem tempore effluentium fuerint ut A & *a*, celeritates ut C & *c*; erunt vires ut A. C ad *a.c.* (§. 278. *Mechan.*), consequenter A. C ad *a.c* = AB : CD (§. 167. *Arithm.*) Est vero etiam A : *a* = C : *c* (§. 26), adeoque (cum porro sit A : *a* = A : *a*) A.C : *a.c* = $A^2 : a^2$ (§. 185. *Arithm.*). Quare $A^2 : a^2$ = AB : CD (§. 167. *Arithm.*) & hinc A : *a* = $\sqrt{AB} : \sqrt{CD}$ (§. 124. *Analyſ. finit.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

28. Altitudines aquarum AB & CD per æqualia lumina E & F effluentium sunt in ratione duplicata ipsarummet aquarum eodem tempore effusarum.

COROLLARIUM 2.

29. Et quia quantitates aquarum fluentium sunt ut velocitates (§. 26); velocitates quoque erunt in ratione subduplicata altitudinum.

PROBLEMA 4.

30. *Data ratione aquarum effluentium per utrumque tubum* AB *&* CD *una cum altitudine unius, invenire altitudinem alterius.* Tab. I. Fig. 7.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad numeros, quæ rationem aquarum effluentium exprimunt & radicem altitudinis datæ numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*)
2. Ducatur is in seipsum: erit factum altitudo CD quæsita (§. 28).

Digitized by Google

SCHOLION 1.

31. *Cum ex altitudine data rarissime radicem perfectam extrahere liceat, ut altitudo quæsita exacte inveniatur, per regulas Arithmeticæ irrationalium operandum. Sit e. gr. ratio data 3:5, altitudo data 7, reperietur radix altitudinis quæsita* $5\sqrt{7:3}$. *Unde habetur altitudo ipsa quæsita* $\frac{25}{9}\cdot 7 = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$.

SCHOLION 2.

32. *Quodsi cui leges Algorithmi irrationalium non fuerint perspectæ, is faciat ut 3 ad 5 ita 7 altitudo data ad numerum quartum proportionalem* $\frac{35}{3}$ *& porro ut 7 ad* $\frac{35}{3}$ *ita* $\frac{35}{3}$ *ad altitudinem quæsitam, quæ ut ante* $= \frac{5\cdot 35}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$. *Sit enim universaliter* $3:5 = a:b$, $7 = c$; *reperietur per resolutionem proplematis altitudo quæsita* $= b^2c:a^2$. *Sed quarta proportionalis ad* a, b *& c est* $bc:a$ *& tertia proportionalis ad* c *&* $bc:a$ *est ut ante* $b^2c:a^2$. *Unde patet inferri posse,* ut quadrata numerorum datam rationem aquarum effluentium exprimentium, ita altitudo data ad quæsitam: *id quod etiam ex demonstratione theorematis quinti* (§. 27) *liquet. Atque hac analogia commodissime utuntur, qui a tricis algorithmi irrationalium sibi metuunt.*

PROBLEMA 5.

33. ***Data ratione altitudinum tuborum constanter plenorum & per æqualia lumina aquas effundentium, una cum quantitate aquæ ex uno effusa, invenire quantitatem aquæ eodem tempore ex altero effluentem.***

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad altitudines datas & quadratum quantitatis aquæ per lumen unum effusæ numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*), qui erit quadratum quantitatis aquæ per lumen alterum effluentis (§. 28).
2. Inde itaque si radicem quadratam extrahas (§. 269. *Arithm.*) prodibit ipsa quantitas aquæ quæsita.

E. gr. Sint altitudines tuborum ut 9, ad 25, quantitas aquæ ex uno tubo effusa trium pollicum; erit quantitas aquæ ex altero effluens $= \sqrt{(9\cdot 25:9)} = \sqrt{25} = 5$.

THEOREMA 6.

34. *Si duorum tuborum constanter plenorum altitudines* AB *&* CD *fuerint inæquales, lumina* E *&* F *itidem inæqualia; erunt quantitates aquarum eodem tempore effluentium in ratione composita ex simplici luminum & subduplicata altitudinum.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sit altitudo communis duorum tuborum lumina inæqualia L & *l* habentium $= a$, quantitates aquarum eodem tempore effluentium sint P & *q*. Porro altitudo tubi tertii = A, lumen = L, quantitas

tas aquæ dato tempore effluentis Q: erit

$P : q = L : l$ (§. 22).

$Q : P = \sqrt{A} : \sqrt{a}$ (§. 27).

Ergo $PQ : Pq = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 213. *Arithm.*)

Unde $Q : q = L\sqrt{A} : l\sqrt{a}$ (§. 180. *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

35. Si $Q = q$; erit $L\sqrt{A} = l\sqrt{a}$, consequenter $L : l = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 299. *Arithm.*) & $L^2 : l^2 = a : A$ (§. 260. *Arithm.*), hoc est, si quantitates aquarum ex duobus tubis constanter plenis & altitudines atque lumina inæqualia habentibus eodem tempore effluentes fuerint æquales; lumina sunt reciproce ut radices altitudinum, altitudines vero in ratione reciproca quadratorum luminum.

THEOREMA 7.

Tab. L. Fig. 6. 36. *Si altitudines duorum tuborum constanter plenorum* AB *&* CD *æquales fuerint, aquæ per lumina* E *&* F *utcunque inæqualia eadem celeritate effluunt.*

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet, si præter altitudines etiam lumina fuerint æqualia, aquam ex utroque tubo eadem celeritate egredi, cum nulla adsit disparitatis ratio. Concipiamus itaque lumen majus divisum in partes quotcunque, quæ singulæ minori lumini æquales sint. Quoniam aqua, quæ per partem luminis movetur, non aliter movetur, ac si per reliquas nihil flueret, cum impetus totus pendeat a pressione perpendiculariter imminentis (§. 225. *Mechan.*); evidens est, eandem in singulis partibus lumini minori æqualibus eadem celeritate moveri, qua fertur per lumen minus. Aqua igitur per totum lumen majus eadem celeritate fluit, qua per minus. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

37. *Si altitudines tuborum constanter plenorum* AB *&* CD, *itemque lumina* E *&* F *inæqualia fuerint; celeritates aquarum effluentium sunt in ratione subduplicata altitudinum.* Tab. L. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Sint altitudines trium tuborum α, a & A, lumina eorundem L, l & L, velocitates aquarum effluentium u, v & c. Quia $L = L$; erit $u : c = \sqrt{\alpha} : \sqrt{A}$ (§. 29). Est vero $\alpha = a$, *per hypath.* adeoque $\sqrt{\alpha} = \sqrt{a}$. Ergo $u : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168. *Arithm.*) Porro ob $\alpha = a$, *per hypoth.* etiam $u = v$ (§. 36). Ergo $v : c = \sqrt{a} : \sqrt{A}$ (§. 168. *Arithm.*) *Q. e. d.*

CO-

COROLLARIUM 1.

38. Cum altitudinibus inæqualibus existentibus aquarum per æqualia lumina fluentium celeritates similiter sint in ratione altitudinum subduplicata (§. 29), hæc vero ratio æqualis fit, si altitudines æquales; patet in genere celeritates aquarum ex tubis constanter plenis effluentium esse in ratione altitudinum subduplicata.

COROLLARIUM 2.

39. Quadrata igitur velocitatum sunt ut altitudines (*§. 260 Arithm.*).

SCHOLION.

40. Mariottus (d) *multiplici experimento docuit, si ad vas* ABCD *applicetur tubus* EF, *plus aqua per tubum aquali tempore effluere, quam per idem lumen vasis* E, *tubo remoto, & motum aqua eo magis accelerari, quo tubus* EF *longior. Cum altitudo vasis* AC *esset unius pedis, tubi vitrei* EF *longitudo trium pedum, diameter luminis trium linearum; intervallo unius minuti effundebantur* $6\frac{1}{8}$ *sextarii aqua, tubo autem remoto nonnisi* 4 *circiter. Cum longitudo tubi* EF *esset 6 pedum, diameter luminis* F *unius digiti, aqua omnis intra 37 minuta secunda effluxit. Cum vero tubi dimidium* FH *rescinderetur, vas integrum intra 45''; tubo prorsus remoto intra 95'' evacuatum est. Tubo nimirum applicato altitudo aqua incumbentis & egressum orificio tubi proxime urgentis major est, adeoque motus aqua magis acceleratur.*

THEOREMA 9.

41. *Si duo tubi* AB *&* CD *fuerint ejusdem altitudinis & lumina* E *atque* F *æqulia habuerint; tempora, quibus deplentur, sunt in ratione basium.* Tab. I. Fig. 5.

DEMONSTRATIO.

Sit basis tubi CD dupla basis tubi AB. Quoniam altitudines æquales sunt *per hypoth.* quantitates aquarum in tubis contentæ basium rationem habent (§. 573 *Geom.*), adeoque ex hypothesi aqua in tubo CD dupla est aquæ in tubo AB. Concipiatur altitudo utriusque tubi in partes infinite parvas divisa, erit cylindrulus ejusmodi altitudinis in tubo majore CD duplus cylindruli in tubo minore AB. Uterque autem in utroque tubo eadem celeritate per lumen ejicitur (§. 36) & quia lumina æqualia sunt *per hypoth.* eædem quantitates aquæ eodem instanti fluunt per utrumque lumen. Ergo eodem tempore, quo cylindrulus HI effluit, nonnisi dimidium alterius LK ejicitur: ut adeo alterum dimidium expellatur opus est instanti altero. Tempuscula itaque, quibus cylindruli HI & LK effluunt, sunt in ratione subdupla, nempe ut

(d) Traité du mouvement des eaux part. 3. disc. 6. p. 269. & seqq.

ut bases tuborum AB & CD. Idem (cum de ceteris eodem modo demonstretur, patet tempora, quibus integri tubi evacuantur, esse in ratione basium (§.187. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

42. *Vasa cylindrica & prismatica* ABCD *ita deplentur, ut quantitates aquarum temporibus æqualibus effluentium decrescant secundum numeros impares ordine retrogrado sumtos.*

DEMONSTRATIO.

Velocitas nempe libellæ FG descendentis continuo decrescit in ratione subduplicata altitudinum decrescentium (§. 38). Velocitas gravis descendentis crescit in ratione subduplicata altitudinum crescentium (§. 87. *Mechan.*). Talis igitur est motus libellæ FG ex G in B descendentis, ac si inversa ratione ex B in G descenderet. Sed si ex B in G descenderet, æqualibus temporibus spatia crescerent secundum numerorum imparium progressionem (§.86 *Mech.*). Ergo secundum eandem progressionem inverse sumtam altitudines libellæ FG æqualibus temporibus decrescunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

43. Libella igitur aquæ FG eadem lege descendit, qua vi impressa per altitudinem ipsi GB æqualem ascenderet (§. 329. *Mechan.*)

SCHOLION.

44. *Ex hoc principio multa alia de motu fluidorum demonstrari possunt, quæ nunc brevitatis gratia omittimus.*

PROBLEMA 6.

45. *Vas quodcunque cylindricum dividere in partes singulis temporibus vacuandas, dato tempore, quo depletur totum, itemque tempore, quo depletur pars una.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. Vas cylindricum, cujus omnis aqua intra 12 horas effluit, dividendum in partes singulis horis evacuandas.

1. Fiat ut pars temporis 1 ad tempus integrum 12 ita idem tempus 12 ad numerum quartum proportionalem 144.
2. Dividatur altitudo vasis in partes 144 æquales. Dico ultimam cedere horæ ultimæ, tres proxime superiores horæ penultimæ, quinque ulteriores horæ decimæ &c. 23 denique postremas horæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tempora crescant in serie numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. 5. &c. altitudines vero, si numeratio ordine retrogrado fiat ab hora duodecima, crescant in serie numerorum imparium 1. 3. 5. 7. 9 &c. (§. 42); erunt altiitudnes ab hora undecima computatæ ut quadrata temporum 1. 4. 9. 16. 25. &c. (§. 33. *Analys. finit.*). Quadratum ergo temporis integri 144. complectitur omnes altitudinis vasis evacuandi partes. Sed numerus tertius proportionalis ad 1 & 12 est quadratum ipsius 12 (§. 246. *Arithm.*), consequenter numerus partium æqualium, in quas altitudo dividenda, secundum seriem numerorum imparium per horarum intervalla æqualia distribuendus (§. 42). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

46. Cum partibus ejusdem vasis substituere liceat vasa minora ipsis æqualia; data altitudine vasis intra datum temporis spatium deplendi, inveniri potest altitudo vasis alterius intra tempus datum aliud evacuandi, faciendo nempe altitudines ut temporum quadrata.

SCHOLION.

47. *Patet ergo methodus clepsydras construendi, quibus veteres usos esse constat.*

THEOREMA 11.

48. *Aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium.*

DEMONSTRATIO.

Si aqua per foramen vasis vi solius gravitatis absolutæ exiret, foret celeritas ejus ad eam, qua egreditur ab aqua supra orificium consistente pressa, in ratione subduplicata altitudinis istius aquæ tempusculo infinite parvo per foramen exeuntis, seu, quod perinde est, altitudinis foraminis, & altitudinis aquæ supra orificium (§. 37). Enimvero si aqua eadem gravitate naturali caderet per altitudinem altitudini aquæ supra orificium æqualem, celeritas cadendo acquisita foret itidem ad eam, qua vi gravitatis ejusdem per foramen exiret, in ratione subduplicata altitudinis aquæ supra orificium ad altitudinem foraminis (§. 87. *Mechan.*). Aqua igitur per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam cadendo ex altitudine aquæ supra orificium acquireret (§. 177. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

49. *Si aqua per tubum* KE *descendens per lumen* G, *cujus directio verticalis, prosiliat, ad eam* Tab. I. Fig. 9.

alti-

altitudinem GI *ascendit, ad quam libella aquæ* LM *in vase* ABCD *consistit.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen G, vi gravitatis columnæ EN impellitur; ea ipsius celeritas est, quam cadendo per altitudinem EN acquirit (§. 48) consequenter ea ipsi vis est, qua ad altitudinem ipsi EN æqualem ascendere valet (§. 322. *Mechan.*). Quare cum directio luminis sit verticalis *per hypoth.* adeoque aquæ per lumen G prorumpentis directio itidem verticalis existat, nec quicqnam sit, quod eandem mutet extra tubum; aqua sursum feratur necesse est ad eam altitudinem GI ad quam libella aquæ LM in vase consistit. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

50. *Experientia constat, aquam per lumen* G *prosilientem elevari ad altitudinem ipsa* GI *minorem. Constant præterea, lumen* G *eo minus esse debere, quo minor est altitudo libellæ* LM *in vase* ABCD. *Immo propriis experimentis didici, minus esse debere lumen, si mercurius salire debet, quam ut aqua saliat, consequenter si fluidum majore vi urgetur, quam si minore: Inde vero non concluditur theorematis falsitas; sed tantum colligitur, subesse impedimenta quædam, quæ ascensui resistant. In ea igitur inquirendum.*

SCHOLION 2.

51. *Plerique præcipuam resistentiæ causam aerem allegare solent, per quem aqua saliens ascendit. Enimvero quamvis non negem, aeris resistentiæ inter impedimenta locum aliquem esse concedendum, quæ obstant, quo minus ad eam præcise altitudinem ascendat, unde decidit; causis tamen aliis majorem resistentiæ totalis partem tribuendam esse, mihi quidem satis probabile videtur. Aquas enim in vase ab aere evacuato* (§. 40. Aerom.) *salientes non ulteriorem terminum attingere quam in libero aere, ubi altitudo ascensus unius circiter pedis sit, vel etiam minor, iterato experimento didici: utut in hoc aqua saliens* FI *longe infra libellam ascensum sisteret. Illud autem observare licuit, aquam in vacuo minime in tot guttulas ramulosque dividi, in quot in aere dispergitur; sed fere unitam versus eam plagam defluere, versus quam lumen* G *parumper inclinatur. Unde apparet, figuram aquæ verticaliter salientis magis ab aere resistente immutari, quam celeritatem minui. In majoribus tamen saltibus, circa quos experimenta in vacuo capere non licet, aeris resistentiam sensibiliorem esse puto. Ipsa enim aquæ in guttulas ramulosque divisio fieri nequit, nisi aliqua celeritatis parte imminuta, quemadmodum ex regulis motus abunde constat.*

SCHOLION 3.

52. *Cæterum hinc mirum non est, quod regula* Mariotti *defectum altitudinis* GI *a perpendiculo aquæ computandi, quam resistentia aeris potissimum super-*

 stru-

struxit (c), *& qua defectus isti in ratione duplicata altitudinum esse perhibentur, non satis exacte experientia respondeat. Quoniam tamen ejus aliquis esse potest usus; ideo non piget tabulam hic apponere, in qua altitudinibus aquarum salientium altitudines tuborum, per quos delabuntur, juxta illam assignantur, in pedibus quidem Parisinis & ejus digitis seu partibus duodecimis.*

Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.		Altitudo aquarum salientium.	Altitudo tuborum.	
5′	5′	1″	55	55′	121″
10	10	4	60	60	144
15	15	9	65	65	169
20	20	16	70	70	196
25	25	25	75	75	225
30	30	36	80	80	256
35	35	49	85	85	289
40	40	64	90	90	324
45	45	81	95	95	361
50	50	100	100	100	400

53. *Ego quidem multum tribuo gravitati aquæ ascendentis, quia observavi quod argentum vivum ad minorem altitudinem elevatur, quam aqua. Nimirum guttarum anteriorum motus si languescit, posteriores in eas incurrentes retardantur: id quod ipsismet oculis suis videre poterit, qui aquas salientes attentius contemplare voluerit. Atque inde est, quod, si lumen* G *angulo quantolibet exiguo inclinetur, ut aqua saliens a perpendiculo non admodum declinare videatur, saltus altitudo statim major evadat. Huc pertinet, quod* Torricellius (f) *a se observatum annotavit. „Quando inquit, opposita manu foramen* G *penitus occluditur, deinde retracta quam citissime manu repente aperitur: videbantur primæ & praeuntes guttæ altius pervenire, quam sit deinceps culmen* I, *postquam aqua deorsum fluere cœperit. Adde quod dispersionem in guttulas ipsa gravitas aquæ juvet.* Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION 5.

54. *Maximum autem impedimentum in affrictu positum est: unde lumen seu orificium* G *optime levigatum requiritur.*

SCHOLION 6.

55. *Quamvis autem lumen non nimis ingens esse debeat, ut sufficiens aquæ copia constanter affluere possit, cum alias sal-*

(c) Traité du mouvement des eaux part. 4. disc. 1. p. 304. & seqq.
(f) De motu projectorum lib. 2. Oper. Geometr. p. 192.

saltus non modo minuatur, sed prorsus impediatur; idem tamen nec nimis exiguum sit necesse est. Experimur enim, aquæ salientis altitudinem majorem esse, si lumen majus, quam ubi minus fuerit. Certe Mariottus (g) *observavit aquam salientem per lumina in eadem linea horizontali sita & in eodem tubo facta, quorum diametri erant unius, 4, 6, 10, 12 &c. linearum, notavitque altius ascendere eam, qua per majora egreditur, quam qua per minora ejicitur.*

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 10. 56. *Aqua per tubum inclinatum* AB *vel per tubum quomodocunque inflexum* CD *descendens per lumen* G *ad eam altitudinem in* L *vel* M *ascendit, ad quam aqua in vase* HK *subsistit.*

DEMONSTRATIO.

Aqua ad lumen G in tubo inclinato AB, vel inflexo CD eadem vi impellitur, qua impellitur ad lumen G in tubo NO (§. 34. *Hydrost.*). Sed vi impressa per lumen istud ascendit ad altitudinem altitudini libellæ ML æqualem (§. 49). Ergo etiam per lumen tuborum reliquorum saliens ad eandem altitudinem ascendere debet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

57. *Veritatem theorematis experimento confirmaturus fieri curavi ex lamina ferrea stanno obducta vas* HK *figuram parallelepipedi habens. Ad fundum afferruminari jussi quatuor tubos, quorum duo* NO *&* ST *sunt ad fundum perpendiculares, sed inæqualium diametrorum, tertius* AB *est inclinatus, quartus vero* CD *ex pluribus partibus diversimode inclinatis compositus; omnes una ad fundum pelvis* RZ *aquam salientem excipientis afferruminati. Denique in* M & L *ad vas aptati sunt tubuli inclinati, ut, si per canalem* ab *plus aquæ affluat, quam per lumina tuborum* G *salit, superflua per eos effluat: quo artificio quoque utendum, si experiri volueris, quæ in antecedentibus de motu aquarum in tubis constanter plenis demonstrata sunt. Quamdiu igitur aqua eandem libellam* ML *tuebatur, altitudo salientium per omnes tubos erat eadem, neque augebatur, unius, duorum vel trium luminibus obturatis. Quodsi vero libella* ML *vel descenderet, vel obturatis tubulis in* M & L *ascenderet; salientium quoque altitudines omnes æqualiter decrescebant, vel augebantur.* Tab. I. Fig. 10.

THEOREMA 14.

58. *Aquarum per lumen horizontale vel ad horizontem inclinatum* D *salientium longitudines* DE & DF, *vel* IH & IG, *sunt in ratione subduplicata altitudinum in vase vel tubo* AB & AC. Tab. I. Fig. 11.

Iii 3 DE-

(g) Traité du mouvement des eaux part. 4. disc. I. p. 303.

DEMONSTRATIO.

Quoniam aqua per lumen D ejecta vi impressa per lineam horizontalem DF progredi nititur (§. 71. *Mechan.*), vi gravitatis autem deorsum tendit per rectas ad eam perpendiculares (§. 215. *Mechan.*), nec vis una alteram impedire potest, quia directiones non sunt contrariæ; aqua a premente AB impulsa eodem tempore pervenit ad rectam IG ipsi DF parallelam, quo aqua a premente AC impulsa eandem attingit, suntque rectæ IH & IG spatia, quæ interea vi impetus impressi descripsissent eædem aquæ. Sunt vero spatia IH & IG, quia motus per DF est uniformis (§. 490. *Mechan.*), ut celeritates (§. 33. *Mechan.*); celeritates in ratione subduplicata altitudinum AB & AC (§. 38): ergo longitudines quoque aquarum per lumina horizontalia vel inclinata salientium sunt in ratione subduplicata altitudinum (§. 167. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

59. Cum in medio non resistente omne corpus vel horizontaliter, vel oblique projectum parabolam describat (§. 480. 482. *Mechan.*); aqua etiam per lumen horizontale, vel ad horizontem inclinatum saliens parabolam describit.

COROLLARIUM 2.

60. Aqua igitur per plures tubos inclinatos, in eadem recta collocatos, saliens arcuatum opus efficit, sub quo citra periculum madescendi deambulare licet, impetu, quo abripiuntur guttæ descensum impediente.

SCHOLION 1.

61. *Jucundum admodum spectaculum prabent ejusmodi arcus aquei, dum radiis solaribus illustrati iridis coloribus superbiunt.*

SCHOLION 2.

62. *Equidem tum aeris resistentia, tum aquæ facilis divisio impediunt, quo minus arcus sint exacte parabolici; sed qui spectaculo ad oblectandum in hortis deambulantes utuntur, parum curant, quamnam figuram opus arcuatum referat.*

CAPUT

CAPUT II.

DE MOTU FLUIDORUM VI AERIS CONTIGUI PRODUCENDO.

PROBLEMA 7.

63. *Construere vos ad hortos irrigandos idoneum.*

RESOLUTIO.

ab. 1. Fiat vas cylindricum ABCD, exiguo orificio E instructum, ut digito apposito claudi possit.
g. 1.

2. Fundus vasis CD constet ex lamina exiguis foraminulis pertusa.

Vel.

ab. Fiat vas sphæricum HB collo tenui HE instructum, & herisphærium DCB sit ut ante foraminulis pertusum.
ig. 3.

Dico, si utrumque vas in aquam demergas, eam per foraminula fuudi intrare: si digito ad orificium E applicato vas extrahas, nihil aquæ effluere: si tandem digitum iterum removeas, aquam per foraminula instar roris stillare, adeoque ad hortos irrigandos adhiberi posse.

DEMONSTRATIO.

Si vas in aquam demergas, ut orificium E ultra libellam ejus extet, eo usque per foraminula fundi implebitur, donec aqua in vase cum ambiente in eadem libella existat (§. 34. *Hydrost.*). Ast si digito ad lumen E applicato idem extrahas, cum altitudo ejus unius alteriusve pedis longitudinem non excedat, & foraminula fundi adeo exigua sint, ut juxta aquam effluentem aeri in vas aditus denegetur; aer ambiens impediet, quo minus quid piam aquæ effluere possit (§. 95. *Aerom.*). Si digitum removeas, aeris integra columna ab orificio E usque ad extremitatem atmosphæræ extensa in aquam in vase contentam & una cum aqua in aerem ad fundum AB gravitat. Quare cum pressio aeris per orificium in aquam æqualis sit resistentiæ aeris ad fundum (§. 34. *Hydrost.*); aquæ pondus hanc supera-

perabit, adeoque ea per fundum vasis rorabit. *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

64. *Siphonem construere, hoc est, instrumentum, cujus ope liquor ex vase hauriri potest.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 14. Construatur vas FE, cujus pars media ABCD figuram cylindri, extremæ autem AFB & CED figuram conorum truncatorum habeant: sintque orificia F & E utrinque aperta, nec majora, quam quæ digito apposito commode claudi possunt.

Dico, si vas in liquorem demergas, fore ut eodem repleatur, etsi superius orificium F exstet: si digito ad F applicato extrahatur, fore ut per lumen E nihil effluat: si denique digitum removeas, fore ut totus effluat.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

Aliter.

Tab. I. Fig. 15. Cum globo AB connectantur duo tubuli graciles CD & EF arbitrariæ longitudinis, quorum lumina D & F sint aperta.

Dico, si tubuli EF extremum liquori immergas & aerem ex vase per tubulum CD exsugas, liquorem in globum AB ascensurum. Quodsi jam digito ad lumen D applicato siphonem extrahas, fore ut nihil effluat: ast si digitum removeas, fore ut totus liquor per tubulum EF rursus exeat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aerem exsugis, perinde est, ac si vasis ab aere evacuati orificium F in liquorem demergas, adeoque liquor in globi AB cavitatem ascendere debet (§. 101. *Aerom.*). Quodsi digito ad orificium D applicato siphonem extrahas, liquor ex eo per lumen F effluere nequit (§. 95. *Aerom.*) Quamprimum vero digitum ab orificio D removes, cum in F tantum resistat pondus atmosphæricum, liquor autem præter vim gravitatis ab eodem pondere atmosphærico per tubulum DC impellatur; resistentia a vi majore utique vincetur adeoque liquor per F effluet. *Q. e. d.*

SCHOLION.

65. Siphone secundo commode utimur ad fluida specifice leviora a gravioribus, quibus innatant, separanda: unde Chymicis subinde non contemnendum præbet usum.

PROBLEMA 9.

66. *Siphonem construere, cujus ope*

ope totus liquor ex vase quolibet in aliud quodcunque educi potest.

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 16. Fiat tubus recurvus ABC, ita ut orificio A in plano horizontali posito altitudo minoris DB 31. pedes nunqnam excedat. Ad communes usus altitudo dimidii, aut unius vel alterius pedis sufficit. Quodsi brachium minus AB liquori immergatur & per lumen C aer exsugatur, liquor ex vase tam diu per tubum BC effluet, quamdiu lumen A sub liquore constituitur.

DEMONSTRATIO.

Quando aerem ex siphone ABC exugimus, in eo residuus dilatatur (§. 37. *Aerom.*), adeoque elater ejus debilior evadit (§. 79. *Aerom.*). Quare cum antea ponderi atmosphærico æquaretur (§. 33. *Aerom.*); nunc eodem minor est. Aqua igitur in tubum AB impellitur, donec elater aeris inclusi cum fluidi ascendentis gravitate pondus atmosphæræ iterum adæquet (§. 93. *Aerom.*). Quodsi ergo non tanta fuerit altitudo BD, ut aqua intra tubum AB contenta vi gravitatis respectivæ, qua in atmosphæram aquæ superficiei extra tubum incumbentem gravitat (§. 28. *Aerom.* & §. 34. *Hydrost.*), defectum elateris suppleat; in tubum BC descendet. Si jam orificium C infra libellam aquæ, cui alterum A immersum est, subsistit; gravitas aquæ respectiva in crure BC est ad gravitatem respectivam aquæ in crure AB ut altitudo BE ad altitudinem BD (§. 34. *Hydrost.*). Quoniam itaque nisus aeris in superficiem aquæ circa orificium A gravitantis & aquam ad ascensum urgentis continuatur per aquam in tubo BC contentam, utpote quæ ad descensum isto aeris nisu urgetur; aer ad orificium C resistens urgetur vi ponderis atmosphærici & gravitate respectiva aquæ, quæ est ut altitudo BC. Et eodem modo patet aeris nisui prope orificium A resisti vi ponderis atmosphærici (quod ob exiguam siphonis altitudinem BE pro eodem habere licet) & gravitate respectiva aquæ in tubo BA, quæ est ut altitudo BD. Cum igitur aeri ad orificium A minus resistatur, quam ad orificium C; nisus illius ibidem prævalet, atque adeo aqua continuo per AB ascendit & per alterum BC descendit, quamdiu orificium A sub fluido demersum & alterum C sub libella constituitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

67. Quoniam vi ponderis atmosphærici

rici aquam nonnisi ad altitudinem 32. pedum Rhenanorum elevari potest (§. 27 *Aerom.*); altitudo cruris AB, nempe BD, minor esse debet 32. pedibus Rhenanis, ut aqua per siphonem fluat.

SCHOLION 1.

68. *Evidens adeo est, recte rejici artificium* Heronis *ope siphonis per montium vertices in oppositam planitiem aquas deducendi. Jubet enim* Heron, *ut extremitatibus siphonis applicentur epistomia & ad nexum crurum infundibulum, per quod aqua infundi possit, utrique siphonis cruri implendo sufficiens. Quoniam itaque aeris auxilio non modo est opus ad primum aquæ in crus minus ascensum, verum etiam ad continuationem motus; fieri non potest, ut aqua altius attollatur, quam a pondere atmosphærico elevari solet. Suffragatur experientia: notum enim nobis est artificium* Heronis *irrito successu fuisse tentatum, ubi altitudo major fuerat 32. pedibus Rhenanis.*

SCHOLION 2.

Tab. II. Fig. 17. 18. 19. 69. *Illud quoque notatu dignum est, figuram siphonis ad arbitrium variari posse, modo orificium* C *sit infra libellam fluidi exhauriendi. Quanto autem longiori intervallo ab ea removetur, tanto celeriore motu fluidum fertur. Et, si ex fluido extrahitur orificium* A, *fluidum omne per lumen inferius* C *egreditur &, quod in minore crure* AB *continetur, secum veluti trahit. Quodsi sipho plenus ita constituatur, ut lumen utrumque* A & C *sit in eadem linea horizontali, fluidum in utroque crure pendulum hærebit. Videntur adeo fluida in siphonibus unum veluti continuum formare, ita ut pars præponderans descendens instar catenæ secum trahat leviorem.*

SCHOLION 3.

70. *Si vas quodpiam æquabiliter exhaurire volueris, tabulæ ligneæ* AB *infige alterum siphonis orificium* C, *quæ aquæ innatans & cum imminuta descendens id constanter ad eandem profunditatem demerget.* Tab. II. Fig. 10.

SCHOLION 4.

71. *Denique notandum, fluere aquam per siphonem etiam interruptum, si nempe crura* AD & EC *conjungantur mediante tubo capaciore* DE, *aere pleno.* Tab. II. Fig. 11.

PROBLEMA 10.

72. *Diabetem construere, hoc est, vas, quod plenum liquorem omnem effundit, non plenum vero retinet.*

RESOLUTIO.

Fundo vasis AFGB afferruminetur sipho inversus CDE ea lege, ut crus longius DE ultra basin vasis exporrigatur, aut minimum ejus orificium sit in basi vasis: crus vero minus CD eandem non prorsus attingat: altitudo denique siphonis minor sit altitudine vasis AG. Tab. II. Fig. 21.

Aliter.

Fundo vasis AFBG afferruminetur Tab. II. Fig. 22.

netur tubus DE, qui cruris majoris vicem sustinet: loco autem crucis minoris imponatur tubus alius capacior DC in C apertus.

Dico, si vas AFBG aqua vel alio liquore impleas, quamdiu non fuerit plenum, nihil inde effundi; quamprimum vero plenum extiterit, liquorem omnem effluere.

DEMONSTRATIO.

Tab. II. Fig. 21. 22. Dum enim aqua infunditur, in tubo DC seu crure minore siphonis ad eandem altitudinem ascendit, ad quam in vase consistit (§. 34. *Hydrost.*). Quamdiu igitur vas non fuerit plenum, aqua infra orificium D tubi DE seu cruris longioris subsistit, consequenter per hoc nihil ejus effluere potest. Quamprimum vero plenum extiterit, ultra orificium D substitit, adeoque vi gravitatis propriæ per tubum DE descendit, dumque semel fluit per siphonem CDE, tamdiu fluere debet, quamdiu lumen cruris minoris C fuerit aquæ immersum (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

73. Quodsi vas non fuerit plenum, ad orificium E ore applicato aerem ex siphone CDE exsugas; liquor itidem omnis ex vase effluet (§ 66).

COROLLARIUM 2.

74. Hinc construi potest poculum KL, quo bibenti illuditur. Si nempe tu bibis, postquam sufficienter vinum hausisti, per tubum HI ulterius fluxurum flatu oris repelle & paulisper expecta, donec nihil amplius effluere sentis. Tum poculum KL alteri porrige & jube, ut ore ad orificium I applicato liquorem exsugat. Ubi igitur haustu absoluto poculum ab ore removerit, vinum adhuc fluens vestem madidabit. Tab. II. Fig. 23.

SCHOLION 1.

75. *Si tubus* CD *vitreus fuerit, aerem in suprema ejus parte residuum una cum aqua fluente per tubum* DE *successive abripi observabis. Jucundum inprimis spectaculum, ubi aerem per tubulum vitreum fundo vasis in* E *infixum magna celeritate cum aqua defluentem conspicies. Hoc phænomenon primus observavit* R. P. de la Roche (h), *cumque experimentum repeterem, varias adhuc circumstantias annotavi, unde usus in praxin redundat* (i). *Expertus inter alia sum, quod, cum diameter orificii* D *esset 6 linearum seu digiti dimidii, diameter vero inferioris* E *unius saltem lineæ, aer tubum* DE *per superius* D *ingressus per inferius egredi non potuerit & aquæ fluxum impediverit. Hinc vero jam constat ratio, cur in diabetis istiusmodi aquæ fluxus interdum sistatur, antequam omnis effluxerit, continuandus tamen ali-* Tab. II. Fig. 22.

(h) Vid. Diarium Trevoltiense A. 1709. art. 86. p. 1709.
(i) in actis Erudit. A. 1711. p. 13.

aliquantisper, si tubus DC *elevetur, atque hinc manifestum mihi videtur, quod luminis tam superioris* D, *quam inferioris* E *diameter eadem esse debeat, nec ipse tubus luminibus capacior.*

SCHOLION 2.

76. *Quodsi altitudo tubuli* DE *major fuerit altitudine vasis* AG, *hoc non obstante, aqua per eum fluit. Ut vero fluxus initium fiat, digito ad* E *apposito, tubus* DC *attollatur, ita enim aer in tubo* DE *contentus dilatabitur ac elatere ejus imminuto* (§. 71. Aerom.), *aqua intra tubum* DC *altius assurgens in tubum* DE *sese præcipitem dabit. Quodsi itaque poculi* KL *operculo* K *intus afferruminetur, ubi ebibere volueris, non opus est, ut sugas; sed operculum attolli sufficit.*

PROBLEMA II.

77. *Aquam per siphonem interruptum elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 24.

1. Duo vasa æqualia AB & IK in eadem planitie collocentur, quorum unum AB sit apertum, alterum vero clausum; utrumque aqua plenum.
2. Ex vase tertio QR undique clauso & ab aqua vacuo tendant duo tubi DC & SH, (quorum longitudo minor quidem, sed non major quam 31 pedum esse potest) in vasa AB & IK, quorum prior fundum vasis AB fere attingit, alter SH operculo vasis IK afferruminatur.
3. Denique vasi IK afferruminetur tubus alius LN epistomio M instructus & tubo DC longior.

Dico, dum aqua per tubum LN descendit, epistomio M aperto, aliam ex vase AB in vas QR per tubum DC ascendere debere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim gravitas aeris in tubo SH contenti respectu gravitatis aquæ tubum LN implentis fere nulla sit, motum vero aquæ continuum per tubos LN & DC non impediat; perinde est ac si tubus DC conjungeretur cum tubo LN. Sed in hoc casu, ubi tubus DC alteri LN immediate jungitur, aqua per tubum LN descendit, per alterum DC ascendit (§. 66). Ergo etiam in altero casu, ubi tubus LN alteri DC mediante tubo SH & vase QR jungitur, aqua per DC asendere debet, dum per LN descendit. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

78. *Poterat idem eodem modo demonstrari, quo ascensum & descensum aquæ continuum in cruribus siphonis communis supra evicimus.*

CO-

COROLLARIUM.

Tab. II. Fig. 25. 79. Data igitur qualibet exigua caducitate, aqua ad maximam altitudinem elevabitur, si in eadem altitudine collocentur plura vasa A, B, C, D &c. & in locis editioribus alia E, F, G &c. vasaque G & D, F & C, E & B tubis Pa, Mb, lc, vasa vero G & F, F & E, E & A tubis GN, FK, EL conjungantur, tandemque vasis D, C & B tubi R, S, T cum epistomiis V afferruminentur, qui tubis GN, FK, FL longiores sint. Epistomiis enim apertis, aqua fluens per tubum T elevabit aquam ex A in E; fluens per tubum S eandem attrahet ex E in F; fluens denique per tubum R eam ex F in G attollit, atque ita porro.

SCHOLION.

80. *Aut magnum requiritur præcipitii perpendiculum, aut ingens vasorum apparatus, si ad notabilem altitudinem aqua evehenda. Equidem si in vasa* B, C, D, *Mercurius infunderetur, tubus* BT 27 *digitorum responderet tubo* AE 31. *pedum* (§ 29. Aerom.); *sed hac ratione elevatio aquæ nimis sumtuosa foret. Praxi adeo in altitudinibus majoribus hic aquam elevandi modus parum respondet.*

THEOREMA 15.

Tab. I. Fig. 16. 81. *Fluidum per siphonem* ABC *eodem modo acceleratur, quo acceleratur fluidum per foramen vasis effluens a fluido intra vas ad altitudinem profunditati orificii* C *cruris longioris* BC *infra libellam fluidi* AD, *cui crus siphonis minus* BA *immersum, æqualem consistente.*

DEMONSTRATIO.

Patet ex demonstratione problematis 9 (§. 66), vim, qua fluidum per siphonem urgetur, esse ut gravitatem fluidi absolutam in ea cruris longioris parte contenti, qua excedit longitudinem cruris minoris supra libellam fluidi, cui immersum, consequenter ut altitudinem DE (§. 34. *Hydrost.*), quæ est excessus istius profunditas infra libellam. Eodem igitur modo motus fluidi per siphonem accelerari debet, quo acceleratur fluidum per vasis foramen effluens, si intra ipsum ad altitudinem DE consistat. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

82. Quoniam aqua per foramen vasis ea celeritate erumpit, quam acquireret cadendo ex altitudine aquæ supra orificium (§. 48); celeritas, qua eadem per siphonem fertur, eadem est, quam acquireret cadendo per profunditatem orificii extra aquam infra ipsius libellam DE.

COROLLARIUM 2.

83. Et quoniam aquarum per foramina ex diversis vasis erumpentium celeritates sunt in ratione subduplicata altitudinum earum super foraminibus (§. 38); celeritates aquarum per diversos siphones fluentium erunt in ratione sub-

duplicata profunditatum orificiorum, per quæ effluunt, infra libellam aquarum, quibus crura minora siphonum immersa.

COROLLARIUM 3.

Tab. II. Fig. 24. 84. Eodem modo patet, in siphone interrupto CDSN celeritatem aquæ per orificium N effluentis eam esse, quam acquireret cadendo per altitudinem, quæ est æqualis differentiæ tubi LN & partis tubi DC ultra libellam aquæ in vase conentæ (§. 77).

COROLLARIUM 4.

85. Similiter patet, per diversos siphones interruptos aquam fluere in ratione subduplicata earundem differentiarum tuborum LN & DC, longitudine hujus a libella aquæ in vase AB computata.

SCHOLION.

86. Hinc prono alveo fluunt alia in theoria & praxi siphonum utilia, quæ antecedentium gnarus sua sponte inde inferet.

PROBLEMA 12.

Tab. II. Fig. 26. 87. ***Aquam vi elastica aeris compressi movere.***

RESOLUTIO.

Sit vas quodcunque ABCD, e cujus medio assurgat tubus EF fundum non prorsus contingens, sitque apertura aliqua in G epistomio ad arbitrium obturanda. Quodsi jam per aperturam G sive ope follis, sive syringis, sive antliæ pneumaticæ, sive flatu oris vehementiore aerem intruseris in vas CD ad medietatem AB aqua repletum, aer comprimetur in parte vasis reliqua (§. 17. *Aerom.*) adeoque elater ejus intendetur (§. 78. *Aerom.*). Cum adeo elater externi ambientis minor sit, si clauso epistomio G epistomium F aperias: aqua ex vase AD per tubum EF ab aere sese expandente expelletur.

SCHOLION.

88. Si aer ope antliæ comprimitur, non opus est epistomio G, sed sufficit cochlea muniri aperturam. Tubus vero FE in cochleam desinit, ut adantliam firmari possit.

PROBLEMA 13.

89. Vi aeris loco suo expulsi aquam movere. Tab. II. Fig. 27.

RESOLUTIO.

1. Sit vas quodcunque PQ per diaphragma EH in duo receptacula distinctum.
2. In superiori sit catinus DB foramine in K pertusus, quod cochlea obturari possit.
3. Per ejus medium transeat tubus AC diaphragma CE non prorsus attingens & epistomio I munitus.
4. Fundo catini conferruminetur tubus

tubus DEL ultra diaphragma ad fundum fere vasis inferioris HQ protensus, tuboque AC longior.

5. Denique diaphragmati conferruminetur alius tubus GF in vas inferius HQ hians & ad catinum fere assurgens.

Dico, si receptaculum superius PR aqua repleas per foramen K & illo obturato aquam etiam catino infundas, fore ut omnis ex receptaculo superiore PR ejiciatur & per tubulum DL in inferiu descendat.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubum DL defluit, aer in receptaculo inferiore comprimitur (§. 17. *Aerom.*), adeoque elater ejus intenditur (§. 78. *Aerom.*). Quodsi ergo epistomium I aperias elater aeris inclusi fortior magis premit aquam in vase PR, quam externus ad A resistit. Aquam igitur ex vase PR per tubum AC expellit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

90. *Quodsi tubulus* AB *exiguo lumine fuerit instructus, ut aqua ex eo saliat; ingeniosa hæc machina ab inventore* Herone *Alexandrino* Fons Heronis *appellatur. Patet ex demonstratione aquam hic urgeri ad saltum vi elastica aeris compressi, quemadmodum in problemate præcedente, consequenter fontem Heronis pendere a modo ingenioso aerem intra vas vi structuræ fontis comprimendi.*

PROBLEMA 14.

91. *Aquam per rarefactionem aeris expellere.*

RESOLUTIO.

1. Sint duo vasa ABCD & CDEF per diaphragma CD a se invicem separata habeatque superius ABCD catinum AGHB conferruminatum ejusdem cum ipso capacitatis. Tab. II. Fig. 23.
2. Ex diaphragmate CD ascendat tubulus IK fundum catini non prorsus attingens.
3. Per fundum catini exsurgat alius tubulus LM, cujus lumen L a diaphragmate exiguo intervallo distet.

Dico, si vas CF prunis imponatur, aut faces ardentes fundo ejus EF supponantur, fore ut aqua ex vase AD per tubulum LM ejiciatur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aer in vase CEFD incalescit, rarefit (§. 23. *Aerom.*) ejusque elater intenditur (§. 146. *Aerom.*). Elater igitur aeris inclusi fortius premit aquam in vase AD contentam, quam externus ad M resistit, consequenter aqua

qua per tubulum LM ejicitur. *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

91. *Si aqua vi aeris compressi per tubum ejicitur, motus eodem modo acceleratur, quo acceleraretur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem primitivi, seu ejus, qui ad orificium tubi resistit.*

DEMONSTRATIO.

Si enim aqua vi aeris compressi per tubum ejicitur, vis, quæ impenditur ad eam ejiciendam, est excessus vis elasticæ aeris compressi supra vim elasticam aeris ad orificium tubi resistentis, reliqua ad vincendam resistentiam imsumta. Quoniam igitur perinde est, sive aqua ejicienda urgeatur vi elastica aeris, sive vi gravitatis aquæ eidem æqualis; motus ejus eodem modo accelerari debet, quo acceleratur pressione aquæ ad tantam altitudinem consistentis, quanta sufficit ad æquilibrium cum excessu elateris aeris compresi supra elatrem ejus, qui ad orificium tubi resistit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

93. Ea igitur celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo per altitudinem, ad quam constituta aqua æquilibrium cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis servat (§. 48).

COROLLARIUM 2.

94. Et si diversimode compressus aer ejicit aquam, celeritates, quibus ejicitur, sunt in ratione subduplicata altitudinum, ad quas constituta aqua cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis æquilibrium servat (§. 38).

COROLLARIUM 3.

95. Quoniam elater aeris magis compressi est ad elaterem minus compressi ut massa aeris magis compressi ad massam aeris minus compressi sub eodem volumine (§. 80. *Aerom.*); si aer primitivus in vase, antequam comprimitur, fuerit idem cum exteriore ad orificium tubi, per quem aqua ejicitur, resistente, vis qua aqua ejicitur est ut differentia massarum aeris compressi & primitivi.

THEOREMA 17.

96. *Si aqua vi aeris compressi salit, ad eam altitudinem ascendit, ad quam constituta aqua æquilibrium servat cum excessu elateris aeris compressi supra resistentiam aeris ad orificium tubi.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim aqua vi aeris compressi saliens ea celeritate ejicitur, quam acquireret cadendo

per

per altitudinem ad quam constituitur aqua æquilibrium servans cum excessu elateris aeris compressi supra elaterem ad orificium resistentis (§. 92); dum vi aeris compressi urgetur, perinde est ac si per illam altitudinem descendisset. Enimvero si per eam ascendisset, ad altitudinem saliret, isti æqualem (§. 322. *Mechan.*) Ad tantam igitur etiam salire debet, dum vi aeris compressi impellitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 27. 97. Quia in fonte *Heronis* vis elastica aeris in vase PR compressi æquilibratur columnæ aquæ in tubo DL contentæ (§. 89); aqua ex eodem salit ad altitudinem æqualem altitudini orificii D a libella aquæ in vase HQ.

COROLLARIUM 2.

98. Quoniam tantundem aquæ per tubum DL descendit, quantum per orificium A ejicitur, adeoque altitudo orificii D supra libellam aquæ in vase HQ continuo decrescit; altitudo quoque saltus continuo decrescit.

COROLLARIUM 3.

Tab. II. Fig. 26. 99. Et cum in vase AD aer continuo magis magisque dilatatur, dum aqua per tubum EF salit (§. 36. *Aerom.*), ac præterea aquæ libella in eodem vase AD continuo descendente, resistentia aquæ in tubo EF crescat (§. 34. *Hydrost.*); altitudo quoque aquæ salientis continuo decrescere debet (§. 95).

SCHOLION.

100. *Nimirum gravitas aquæ in tubo* EF *ultra libellam in vase* AD *consistentis superaccedit resistentiæ aeris ad orificium* F *& cum eadem unita agit, ita ut resistentia totalis, quam experitur vis elastica aeris compressi aquam in vase ad ascensum per tubum urgens compenatur ex elatere aeris ad orificium* F *resistentis & gravitate aquæ in tubo* FE *ultra libellam in vase consistentis elevatæ. Sed quoniam aqua in aere salientæ resistentia ista æquatur columnæ aquæ 32 pedes Rhenanos alta (§. 28.* Aerom.), *tubus vero* EF *vix dimidii vel unius pedis in vase vacuo existit; resistentia aquæ in tubo vulgo non attenditur.*

PROBLEMA 15.

101. *Data ratione aeris primitivi ad compressum, invenire altitudinem saltus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam aer comprimitur in ratione ponderum (§. 73. *Aerom.*), vis autem elastica aeris primitivi æquilibratur columnæ aquæ 31. pedum Rhenanorum (§. 28. *Aerom.*); ex data ratione aeris primitivi ad compressum inveniri potest altitudo aquæ cum compresso æquilibrium servantis in vacuo (§. 302. *Arithm.*).
2. Quodsi ergo aqua in aere libe-

ro ſalit, cum reſiſtentia aeris prope orificium æquetur columnæ aquæ 31. pedum Rhenanorum (§. 28. *Aerom.*); altitudo inventa mulctanda eſt 31. pedibus Rhenanis, ut relinquatur altitudo ſaltus.

E. gr. Sit aer compresſius duplus aeris primitivi, adeoque ratio primitivi ad compresſum ut 1 ad 2; reperietur columna aquæ compresſo æquilibratæ 62 pedum Rhenanorum. Quodſi ergo aqua in aere libero ſalit, reſiſtentia eſt 31. pedum, adeoque altitudo ſaltus itidem 31. pedum. Eodem modo patet, ſi aer compresſus ſit triplus vel quadruplus primitivi; fore altitudinem ſaltus in caſu priore 61. in poſteriore 93. pedum & ita porro.

COROLLARIUM.

102. Quoniam data ratione voluminis aeris rarefacti ad volumen condenſati ſeu primiti datur ratio elateris, quo rareſiens expanditur, ad elaterem primitivi (§. 148. *Aerom.*); eodem modo inveniri poteſt altitudo ſaltus, ſi conſtet quantum eo gradu caloris, qui aeri incluſo ineſt, idem dilatari posſit.

SCHOLION.

103. *Ex his principiis alia bene multa deducere licet: ſed nobis dicta ſufficiant.*

CAPUT III.

DE MACHINIS QUIBUS AQUA ELEVATUR.

DEFINITIO 5.

104. *Valvula* ſeu *asſarium* eſt obturaculum vaſis vel tubi, quod introrſum aperiri poteſt; aſt quo magis contra fundum ſeu diaphragma comprimitur, eo exactius foramen claudit.

COROLLARIUM.

104. Valvula igitur fluidum in vas vel tubum admittit, regresſum vero impedit.

PROBLEMA 16.

106. *Valvulam ſeu asſariam conſtruere.*

RESOLUTIO.

Valvulæ ſimplicisſimæ C conficiuntur ex corio, habentque figuram circularem & anſula D clavis affigitur fundo vaſis aut diaphragmati, ubi ad obturandum foramen aptantur. Tab. II. Fig. 3.

Fieri

Tab. II. Fig. 30. Fieri etiam possunt ex aliquot orbibus coriaceis intra duos orichalceos firmiter compressis AB & foraminibus circum circa pertusis, quæ alio orbiculo orichalceo CD sursum deorsumque mobili teguntur.

Tab. II. Fig. 31. Parantur porro ex lamina cuprea E, & corio tenui obducuntur, circa cardinem in H mobiles. Ut autem certius relabantur, elatere G instruuntur.

Quemadmodum vero hactenus descriptæ valvulæ embolis potissimum conveniunt, ita in fundo vasorum vel tuborum sequente utendum:

Tab. II. Fig. 32. 1. Foramen A torno excavetur, tantisper in conum desinens.

2. Eidem immittatur corpus conicum orichalceum B torno itidem elaboratum & clavo aut tigillo transverso D impediatur, ne inverti possit.

Vel foramen hemisphæricum excavetur eique globus orichalceus immittatur.

PROBLEMA 17.

107. *Syringem, hoc est, machinam construere, ex qua aqua attracta violenter expelli potest.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. 1. Construatur cylindrus ABCD ex materia solida, intus cavus, inferius tubulo EF instructus.

2. Immittatur embolus K ex corio vel alia materia, quæ humorem facile imbibit, confectus; qui cavitatem cylindri exacte repleat, ita ut inter ipsum & cylindrum aeri vel aquæ nullus concedatur transitus.

Quodsi tubulo F aquæ immisso embolum K extrahas, in cavitatem ab aere vacuam ea ascendet (§. 101. *Aerom.*). Embolo igitur intruso, per tubulum EF violenter expelletur.

COROLLARIUM 1.

108. Impetus aquæ eo major ipsaque aqua per longius spatium propellitur, quo major fuerit vis embolum detrudens.

COROLLARIUM 2.

109. Quare cum vis major celerius intrudat embolum, quam minor; quo celerius embolus intruditur, eo majore impetu eoque per longius spatium aqua propellitur.

PROBLEMA 18.

110. *Construere antliam attractivam, cujus ope aqua ex loco profundo in altum evehi potest.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus cavus ex materia solida in aqua verticaliter Tab. III. Fig. 34.

ter erigendus, cujus inferior basis I valvula introrsum hiante instruatur (§. 105).

2. Immittatur embolus EK valvula sursum hiante in L instructus.

3. Pro ejus faciliori extractione & depressione vectis FG applicetur.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus EK attollitur, aqua valvulam L elevat & in cavitatem cylindri seu tubi AD ruit (§. 101. *Aerom.*). Quodsi ergo idem rursus deprimatur, valvula L aquæ exitum negante (§. 104), valvula I aperitur & aqua ultra embolum ascendit, repetita emboli agitatione per tubum MH effluxura. *Q. e. d.*

PROBLEMA 19.

111. *Construere antliam, quæ per meram expulsionem aquam elevat.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 35. 1. Cylindrus AB diaphragmate CD, ad quod valvula E aptata est, divisus in aqua collocetur.

2. Embolus F valvula G instructus ita immittatur & regulæ ferreæ IH circa cardinem H mobili affigatur, ut manu in K applicata commode attolli ac deprimi possit.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim F depresso valvula G aperitur (§. 104) & aqua in cavitatem cylindri BC ascendit (§. 34. *Hydrost.*). Sed dum rursus elevatur, valvula G clauditur, ut per embolum nullus ei exitus concedatur: aperitur vero valvula E (§. 105. 106), & sic aqua vi emboli, agitatione sæpius repetita, per tubum M expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si quod vitium contrahit hoc antliarum genus, non commode id corrigere licet. Unde non libenter eodem utuntur, utut ad quamlibet altitudinem datam aquam elevet, si vis sufficiens in* K *applicetur: ea enim attolli aquam palam est.*

PROBLEMA 20.

113. *Construere antliam, quæ aquam attractam violenter aliorsum expellit.*

RESOLUTIO.

1. Paretur cylindrus ex orichalco ABCD in L valvula instructus & in aqua collocetur. Tab. III. Fig. 36.

2. Immittatur embolus K sine valvula ex ligno viridi, quod humore imbibito non amplius intumescit, tornatus & corio vel stupa vestitus.

3. In H afferruminetur tubus alius NH

NH cum valvula sursum hiante I.

DEMONSTRATIO.

Dum enim embolus K attollitur, aqua valvulam L aperit (§. 105) & in cavitatem cylindri ascendit (§. 34. *Hydrost.*). Sed cum rursus deprimitur, valvula I aperitur (§. 105) & per tubum HN aqua expellitur. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

114. *Ingeniosæ hujus machinæ inventor fuit* Ctesibius, *qui primus de aqua antliarum ope elevanda cogitavit, plurimis inventis mechanicis & hydraulicis suo ævo celebris*, Vitruvio *autore* (k). *Ab eo antliæ dicuntur* machinæ Ctesibianæ.

SCHOLION 2.

115. *Ejus vires, sublato affrictu, multiplicare studuit diu multumque in theoria & praxi aquarum elevandarum versatus* Morlandus (l). *Virga nimirum ferrea* D *inter trochleas*, B & C *evitandi affrictus gratia sursum deorsum movetur* (§. 956 Mechan.) *& ponderibus* E, F, G, H *oneratur, ut aquam fortius per tubum plumbeum* TV *expellat embolus* LM *ex orichalco tornatus & intra exiguum circulum coriaceum ad basin superiorem* NO *cylindri orichalcei* RN *dextre aptatum sine omni fere frictione mobilis, ad quam tollendam & duodecim annorum studium, & multum argenti se impendisse fatetur laudatus inventor.* Tab. I. Fig. 7.

PROBLEMA 21.

116. *Aquam ope catenarum situlis instructarum elevare.*

RESOLUTIO.

1. Intra aquam horizontaliter collocetur cylindrus aut prisma sexangulare MN circa axiculum ferreum mobile. Tab. III. Fig. 38.
2. Eo in loco, quo aqua elevari debet, constituatur cylindrus aut prisma simile OP alteri parallelum & circa axiculum ferreum itidem mobile.
3. Situlæ S catenis connectantur, quæ utrumque cylindrum vel prisma ambiant. Alii situlas coriaceas funibus connexas præferunt, tum ne facile diffringantur, tum ne hieme (quod sæpius accidit) catenis dissilientibus fundum aquæ petant.

Quodsi cylindrum superiorem OP convertas, inferior similiter convolvitur & situlæ per aquam trajectæ aquam hauriunt superius in T effundendam.

SCHOLION.

117. *Quoniam situla utrinque vacua in*

(k) lib. 10. c. 12. conf. lib. 9. c. 9.
(l) Elevation des Eaux c. 4. art. 1. p. 35. & seqq.

in æquilibrio sunt; pondus elevandum est aqua in situlis ex altera parte contenta, ubi ab affrictu discesseris, quæ in his machinis non exigua est.

PROBLEMA 22.

118. *Rosarium construere ad elevandam aquam.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 39.

1. Tubus ligneus AB in aqua constituatur tantæ altitudinis, ad quam aqua elevanda.
2. Tum sub aqua, tum in superiori loco, quo aqua elevanda, collocentur ut in problemate præcedente duo cylindri GH & ED circa axiculos ferreos mobiles.
3. Ad funem, cujus extremitates inter se connexæ, circa cylindros GH & ED circumductum aptentur globi ex corio aliaque materia molli compacti, aut (ut minor sit frictio) hemisphæria circulo coriaceo tecta, qui cavitatem tubi exacte replet.

Dum enim cylindris circumvolutis globi aut hemisphæria per tubum AB trahuntur, aquam binis interjectam una attollunt, in L effluentem.

SCHOLION.

119. *Alii utuntur prismatibus quadratis loco tuberum & tabulis ligneis quadratis loco globulorum. Immo & in tubis nonnulli orbiculos ligneos catena connexos globulis substituunt. Ceterum hæc machina usum quoque habet in fossis & fluminibus a fæcibus purgandis. Ingens tamen affrictus esse solet, quem parum curare solent, ubi virium ad aquam elevandam compendium quæri necessitas nulla jubet: id quod & de aliis machinis, in quibus ingens affrictus est, monendum.* Tab. III. Fig. 40.

PROBLEMA 23.

120. *Aquam tympano vel rota situlis instructa elevare.*

RESOLUTIO.

Structura admodum variari solet pro diversitate quantitatis aquarum elevandarum & altitudinis, ad quam evehenda.

Si magna aquæ quantitas ad exiguam altitudinem elevari debet; tympanum construitur AB in 8 cavitates divisum, quæ aperturas habent tum in peripheria tympani C ad hauriendum aquam, tum ad tubum DE, qui axis vices sustinet, ut aqua per ejus foramina E in cistam G effundi possit. Tab. IV. Fig. 41.

Si minor aquæ quantitas ad majorem altitudinem elevanda, situlæ ligneæ pice obductæ A ad peripheriam rotæ aptantur, quæ aquam hauriunt, dum per eam trajiciuntur, rota circumacta, & superius in B effundunt. Tab. IV. Fig. 42.

Quod-

Tab. IV. Fig. 43. Quodsi rotæ palmulas non in fronte gerant, spatium binis interjectum hinc inde clauditur, nonnisi foramine in palmula superiori A relicto, per quod aqua hauritur, & apertura B ad latus facta, per quam rursus effunditur.

Tab. IV. Fig. 44. Sunt qui situlas congiales A vel (quod præstat, ne scilicet tantum aquæ perdatur) capsas quadratas unico foramine instructas B ad latus rotæ aptant: sunt & qui heli-
Fig. 45. cibus CD a peripheria ad centrum fere tendentibus instruunt. Alios modos silentio præterimus.

SCHOLION.

121. Rotæ istiusmodi structura plurimum inter se variant; non tamen omnes ejusdem notæ. Sunt enim, quæ multum aquæ inutiliter dissipant, antequam in receptaculum commune effundatur. In praxi tamen ejus non semper habetur ratio, modo aqua sufficiens copia elevari possit.

PROBLEMA 24.

122. *Cochlea* Archimedis *aquam elevare.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 46. 1. Circa cylindrum AB circumvolvitur tubus plumbeus ea lege, qua helicem in cochlea designare solemus (§. 854. *Mech.*).

2. Cylindrus inclinetur ad horizontem sub angulo 45. circiter graduum, sitque orificium tubi B sub aqua demersum.

Qudsi cochleam ita circumagas, ut orificium B contra aquam volvatur, aqua per helicem ascendet tandemque in A effundetur.

Aliter.

1. Basis cylindri tam superior, quam inferior dividitur in 4. vel 8. partes æquales & puncta divisionum D & E, F & G, B & L &c. connectuntur rectis DE, FG, BL &c. in superficie cylindri descriptis, in quas transfertur ex F in O, ex O in M &c. dimidium latus quadrati FN. Intervalla FO, MO &c. dividuntur in tot partes æquales, quot sunt lineæ verticales DE, FG, BL &c. & in primam DE transferatur pars una, in HE partes duæ, in CK tres &c transferantur, ut adeo tota cylindri superficies in areas quadratas sit divisa. Tab. IV. Fig. 47.

2. Anguli diagonaliter oppositi connectantur lineis, quæ filo ab uno angulo usque ad alterum extenso facile designantur, & juxta harum ductum helice sulcetur cylindrus.

Ad helicem firmentur asserculi ad- Tab. IV. Fig. 48.

admodum tenues, quorum longitudo 8 circiter digitorum, & pice oblinantur.

4. Basibus denique circum circa affigantur asseres tenues & annulis ferreis minuantur, totaque superficies exterior pice vel bitumine oblinatur.

SCHOLION 1.

123. *Peripheria basium cylindri dividi potest in quotcunque partes aequales & in lineas verticales puncta divisionum conjungentes transfertur distantia helicum. quoties fieri potest, in tot partes aequales subdividenda, quot sunt lineae verticales, ut inde divisiones earum determinentur, quemadmodum in resolutione problematis praecepimus. Si diameter totius cochleae 18 digitorum, diameter axis 6 vel 4, distantia helicum 9 digitorum esse solet.*

SCHOLION 2.

124. *Hac machina exigua vi multum aquae attolli posse, experientia dudum docuit: unde ad exhauriendos lacus eadem utuntur.*

COROLLARIUM.

125. Si ad ingentem altitudinem aqua elevanda, una cochlea non sufficit; sed quae ab una effunditur, haurienda est ab altera & ita porro.

PROBLEMA 25.

126. *Aquam ex loco humiliore in excelsiorem deducere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur turris, aut aliud aedificium, prout elevatio locorum ultra libellam aquarum eo derivandarum requisiverit.
2. Intra turrim seu aedificium aqua elevetur vel ope rotae ingentis situlis instructae (§. 121), vel situlatum catenis connexarum (§. 116), vel rosarii (§. 118), vel cochlearum Archimedearum (§. 122.), vel antiliarum (§. 110. 112), viribus vel animatis, vel inanimatis legitime applicatis juxta regulas c. 17. Mechanicae (§. 876. & seqq.). traditas.
3. Aqua effusa in aheno cupreo colligitur, ad cujus fundum aptati sint tubi, per quos iterum descendet.
4. Ne aqua ultra latera aheni unquam assurgat, unus alterve ad summitatem fere protendatur tubus, per quem nimia in fluvium refluat, unde hauritur.
5. Hi tubi verticales connectantur cum aliis horizontalibus vel inclinatis intra terram defossis & ad eum usque locum protensis (§. 14), in quem aqua deducenda.
6. Iis denique in locis, in quae aqua deducitur, erigantur tubi verticales quantaelibet amplitudinis in

in quos hient lumina horizontalium epistomio munita, quod ope virgæ ferreæ aperire ac claudere licet, ut aqua ad arbitrium admitti possit (§. 5).

Aperto enim epistomio aqua in tubo verticali ascendet (§. 34. *Hydrost.*).

SCHOLION.

127. *Antliarum emboli agitantur ope axis curvati duplicis, ita ut unus deprimatur, dum alter attollitur. Inseritur autem axis curvatus axi rotæ aquariæ. Cochleæ* Archimedis *ac cylindri superiores rosariorum & catenarum fistulis instructarum instruuntur rotis radiatis, quibus aliæ dentatæ occurrunt. E.g. Ponamus rosarium calcando moveri debere. Construendum igitur erit tympanum ingens* (§. 886. Mechan.), *cujus axi una infigenda rota stellata, occurrens radiata, de qua ante diximus. Jungitur autem rota radiata verticularis ad conservandum impetum. Quodsi equus eandem machinam movere deberet, axi verticali temone instructo* (§. 888. Mechan.) *infigi deberet rota dentes in plano habens, reliquis manentibus ut ante. Quodsi homo partim trahendo, partim deprimendo aquam ope rosarii elevare teneretur, tympano substitueretur axis cum scytalis & rota verticulari* (§. 882. Mech.). *Si vero motus partim trahendo, partim protrudendo fieri debeat, axi curvato ope vectis homodromi versando* (§. 884. Mech.) *infigenda rota radiata, quæ circumagat stellatam, cui communis cum alia radiata axis, alii dentata dentes in plano, axem cum cylindro rosarii communem habenti occurrente. Unde facile intelligitur, quid in aliis casibus fieri debeat, modo problemata mechanica de potentiarum ad machinas applicatione fuerint perspecta.*

CAPUT IV.
DE
FONTIBUS SALIENTIBUS.

PROBLEMA 26.

128. *Construere fontes salientes.*

RESOLUTIO.

1. Elevetur aqua ex loco humiliore in altiorem (§. 110. & seqq.) & intra vas satis capax colligatur, ex quo per tubos applicatos rursus descendat.
2. Cum tubis hisce connectantur alii horizontales sub terra defossi, per quos aqua usque ad originem fontium salientium deducatur.

3. Denique tubis horizontalibus jungantur alii verticales, quorum tamen altitudo sit multo minor altitudine tuborum, per quos aqua in horizontales defluit.

Aqua per hos in altum prosiliet, quomodocunque fuerint inflexi (§. 56).

SCHOLION 1.

129. *Quodsi aqua saliens ad altitudinem datam ascendere debet, quæsito satisfieri potest per schol.* 3. *theor.* 22. (§. 52).

SCHOLION 2.

130. *Quodsi desideretur, ut tubi dato tempore datam aquæ quantitatem effundant, vel plures tubi ejusdem fontis in data ratione aquas emittant; id obtinere licebit per ther.* 3. *Cor.* 1. (§. 23) *& per theor.* 5. (§. 27).

SCHOLION 3.

131. *Si denique aquarum ex diversis unius fontis tubis salientium altitudines inæquales requirantur; quæsito potiemur per theor.* 12. (§. 49) *& theor.* 13. (§. 56): *ubi & observasse juvabit quæ superius in scholiis theor.* 12. (§. 50. & seqq.) *monuimus.*

PROBLEMA 27.

132. *Fontem construere, ex quo aqua erumpens pilam æneam projiciat, descensumque parantem continuo repellat.*

RESOLUTIO.

1. Fiat globus æneus intus cavus A ex lamina tenui, ne gravitate sua impetum impressum eludat. Tab. V. Fig. 45.

2. Tubus, per quem aqua salit, BC sit ad horizontem exacte perpendicularis.

3. Aquæ sufficiens copia ex insigni altitudine in tubum BC deducatur.

Dico, aquam ex tubo erumpentem globum projicere in altum & descendentem constanter in altum repellere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim tubus sit ad horizontem exacte perpendicularis, *per hypoth.* aqua per eum prorumpens perpendiculariter ascendit. Quoniam vero ex insigni altitudine delapsa, *per hypoth.* & ex tubo ea celeritate erumpit, quam cadendo per istam altitudinem acquireret (§. 48), magna quoque celeritate movetur (§. 91. 473. *Mechan.*), adeoque globo impetum imprimit in linea ad horizontem perpendiculari ascendendi (§. 534. *Mechan.*). Sed dum ad eam altitudinem pervenit, ad quam vi impressa ascendere licet (§. 317. *Mech.*); vi gravitatis suæ juxta eandem perpendicularem relabitur (§. 215. *Mechan.*). In descensu igitur aqua eidem occurrit novoque impetu impresso ut

ut ante, aſcendere cogit. Quamobrem globus in aere pendulus ſurſum deorſum feretur, quamdiu aqua ex tubo ſaliens ſatis impetus ad globum repellendum habet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

133. Cum ad globi aſcenſum deſcenſumque reciprocum figura nil conferat; corpus quodcunque alterum non nimis grave eidem ſubſtituere licet, e. gr' avem cum alis expanſis.

SCHOLION.

134. *Quoniam globus, ut ex alto rurſus deſcendens in aquam ſalientem incurrat, in eadem conſtanter linea perpendiculari aſcenſus deſcenſusque reciprocos continuare debet; hoc fontium genus amat loca ventorum libidini minime expoſita.*

PROBLEMA 28.

135. *Conſtruere fontem, quæ aquam verſus diverſas plagas projiciat.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 50. Sit tubus AB aquam advehens verticalis & ipſi infixi ſint alii horizontales DE & GH, alii ad horizontem verſus diverſas plagas inclinati OP & MN, alii denique infra horizontem verſus plagas illis intermedias reclinati, ut FL.

Quoniam aqua directionem luminis, per quod prorumpit, retinet; per lumen A ſaliens perpendiculariter aſcendet, per lumina vero L, H, N, P, E prorumpens arcus diverſæ amplitudinis (§. 59) & ad diverſas plagas tendentes deſcribet. Fons igitur aquam verſus diverſas plagas ejicit.

Aliter.

Tubus AB, per quem aqua ſalire debet, ſit ſuperius clauſus in A, & luminis loco vel undiquaque, vel in dimidia ſuperficiei parte foraminulis exiguis pertuſus. Tab. IV. Fig. 51.

Quodſi tubus fuerit ad horizontem perpendicularis, aqua verſus omnes plagas per foraminula ſaliet, eruntque jactus horizontales pro altitudine lapſus (§. 58) ſatis ampli.

COROLLARIUM.

136. Quodſi ergo tubum AB ad altitudinem hominis fere aſsurgentem epiſtomio C inſtruas; eo aperto, ſpectatores veluti ab imbre improviſo madidati recedent.

SCHOLION.

137. *Probe autem tenendum eſt, luminum, per quæ aqua egreditur, diametros ipſorum tuborum aquam advehentium diametris minores fieri debere, ne aeris reſiſtentia aliaque impedimenta* (§. 50. & ſeqq.) *impetum aquæ ſtatim eludant. Ipſi quoque fontes ſufficientem aquæ copiam ſuppeditare; aquæ impetu ſufficiente gaudere debent.*

PROBLEMA 29.

138. *Fontem construere, ex quo aqua instar pluviæ prosiliat.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 52. Tubo, ex quo aqua salire debet, afferruminetur globus, vel corpus lenticulare ex duobus segmentis sphæricis compositum AB, ex lamina metallica confectum, cujus superior superficies minimis foraminulis pertundatur.

Ita enim futurum, ut aqua cum impetu versus superiorem laminam AB propulsa sub forma tenuissimorum filamentorum in varias guttulas mox dispergendorum prosiliat.

PROBLEMA 30.

139. *Fontem construere, ex quo aqua prosiliens ad modum lintei expanditur.*

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 53. Tubo AB afferruminentur duo segmenta sphærica C & D, quæ fere se invicem tangant & mediante cochlea E ad eum situm facile reducuntur, ut crena ambobus interjecta vel arctior, vel latior fiat, prout usus postulaverit.

Alii vel in tubis lumine destitutis, vel in corporibus sphæricis aut lenticularibus tubo afferruminatis crenam efficiunt bene politam.

Aqua per crenam saliens ad modum lintei expanditur, si impetus fuerit sufficiens.

PROBLEMA 31.

140. *Fontem construere, quæ aquam spumescentem jucundo spectaculo ejiciat.*

RESOLUTIO.

Sit tubus AB & paulo infra lumen in ejus medio matrix DE, ut ope cochleæ globus C ita ad lumen B firmari possit, quo omnis fere exitus aquæ denegetur. Tab. V. Fig. 54.

Aqua intra contactum globi & tubi prorumpens spumescet ac fere nivis aerem opplentis floccos æmulabitur.

PROBLEMA 32.

141. *Fontem construere, ubi e variis animantium vel hominum figuris aqua erumpit.*

RESOLUTIO.

Cum aqua per tubos quomodocunque sitos derivari possit & directionem luminis retineat; non alia re opus est, quam ut intra hominum animantiumque figuras tubi abscondantur, quorum orificia hient per eas partes, unde aqua prosilire debet.

SCHOLION.

142. *Ex traditis hactenus principiis haud*

haud difficulter eruitur, quicquid de fontium ornatu, quo aquæ salienti figuras varias conciliare licet, concipi potest. Omnia nimirum a luminum magnitudine, figura & directione pendent.

PROBLEMA 33.

143. *Construere fonticulum salientem, qui ubi salire desiit, clepsydræ instar inverti potest.*

RESOLUTIO.

1. Fiant duo vasa LM & NO tanto quidem majora, quanto plus temporis aqua saliens consumere debet, tantoque majori intervallo PN a se invicem remota, quanto major aquæ salientis altitudo desideratur (§. 49).
2. Sit BAC tubus recurvus in C epistomio instructus & DEF tubus alius itidem recurvus in D epistomio munitus.
3. In I & K sint tubuli alii utrinque aperti & fundos vasorum NO & LM fere attingentes: quousque similiter tubi QR & ST pertingunt.

Quodsi jam vas LM fuerit aqua plenum, aperto epistomio C, ea prosiliet fere ad K, & delapsa per tubulum I apertum in vas NO ruet aeremque contentum per tubum QR expellet. Ubi vero aqua omnis ex vase LM effluxerit, machina inversa, delapsa ex vase NO salientem efficiet.

COROLLARIUM.

144. Si vasæ LM & NO tantam aquæ copiam contineant, quæ intra horæ spatium tota effluat; Clepsydram habebimus salientem in suas graduationes (§. 45) legitime dividendam.

PROBLEMA 34.

145. *Construere malluvium cum fonticulo saliente.*

RESOLUTIO.

1. Sit ABCD receptaculum vasis, cui aqua infunditur. Tab. V.
2. Ex vase descendat tubus ab L usque ad M, ubi versus I inflectitur. Fig. 56.
3. In K applicetur epistomium, quo aperto aqua prosiliet fere ad L usque (§. 49).
4. FG sit catinus aquam excipiens, mox per foramina P & Q in vas quodpiam defluentem.

SCHOLION.

146. *Me non monente apparet, si aquæ salienti varias figuras inducere volueris, id fieri per artificia superius exposita* (§. 135. & seqq.).

PROBLEMA 35.

147. *Flatu oris aquam salientem efficere.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 56. 1. Sit AB ſphæra vitrea vel metallica &

2. in ea firmetur tubulus CD exiguo orificio in C inſtructus & in D infimum ſphæræ punctum fere attingens.

Dico, ſi aerem per tubulum CD exſugas & orificium C in frigidam ſtatim demergas, fore ut aqua per tubulum eundem in ſphæram aſcendat Quodſi iteratis ſuctionibus ultra medietatem fuerit repleta & ore in C applicato aerem per tubulum infles; remoto ore aqua proſiliet.

DEMONSTRATIO.

Si enim aerem exſugis, in ſphæra AB incluſis rarior evadit externo, adeoque orificio C in aquam immerſo tantum fere aquæ aſcendere debet, quantum aeris fuerit eductum (§. 95. *Aerom.*). Quodſi vero per tubulum CD aerem infles, is per aquam ſpecifice graviorem (§. 57. *Aerom.*) aſcendet (§. 99. *Hydroſt.*), conſequenter aer incluſus comprimitur (§. 5. *Aerom.*). Saliet ergo aqua per tubulum CD (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

148. Quodſi hanc ſphæram aquæ ebullienti immittas; aer rareſiet (§. 23. *Aerom.*), adeoque denuo aqua per tubulum CD ſalire debet.

SCHOLION.

149. *Fonticulus hic ab inventore* Herone *nomen* Pilæ Heronis *ſortitus eſt.*

PROBLEMA 36.

150. *Fonticulum conſtruere accenſis candelis ſalientem.*

RESOLUTIO.

1. Ex lamina metallica fiant duo vaſa cylindrica AB & CD. Tab. V.

2. Jungantur tubis utrinque apertis KL, ut aer ex ſuperiore in inferius deſcendere poſſit. Fig. 58.

3. Tubis afferruminentur candelabra H.

4. Operculo vero baſis inferioris CF in formam catini efformato tubus FE epiſtomio G inſtructus & ad fundum fere vaſis protenſus.

5. In Q ſit foramen cochlea munitum, ut aqua in vas CD infundi poſſit.

Dico, candelis in H accenſis, aquam per tubum EF ſalire debere.

DEMONSTRATIO.

Eadem eſt, quæ problematis 14. (§. 91).

SCHOLION.

151. *Hoc eodem artificio efficiet ſtatuam ad præſentiam ſolis, vel candelis accenſis,*

censis, lachrymas effundentem. Neque enim alia re opus est, quam ut ex cavitate, in qua aer rarefit, tubulos ducas ad quasdam alias cavitates oculis vicinas & aqua repletas.

PROBLEMA 37.

Tab. V. Fig. 59. 152. *Fontem intermittentem construere.*

RESOLUTIO.

1. Per axem vasis AB ascendat tubus EF utrinque apertus, foramine in E exciso.
2. Tubus hic afferruminetur tam vasi superiori in H, quam inferiuri in E.
3. Vas superius in L habeat foramen cochlea munitum, per quod aqua infundi possit; in basi autem inferiore multa foraminula, per quæ destillare queat.
4. In vase inferiore sit foramen G ita aptatum, ut aqua per eam non defluat, nisi ad altitudinem EM constituta.

Dico, aquam ex hoc fonte per intervalla fluere.

DEMONSTRATIO.

Cum enim foramine E aperto aeri externo per tubum EF in vas superius AB aditus pateat; aeris inclusi elater æqualis est ponderi atmospherico (§.33. *Aerom.*). Gravitas igitur aquæ in eodem vase contentæ ipsi juncta pressionem majorem efficit, quam resistentia ponderis atmosphærici ad foraminula, adeoque aqua destillare debet. Quam primum vero aqua delapsa foramen E occludit, ut nullus amplius aer in locum aquæ delapsæ succedere possit; perinde est, ac si vas quoddam exiguo orificio instructum inverteres, adeoque fluxus aquæ per foraminula sistetur (§.95. *Aerom.*). Sed dum aqua ad altitudinem EM usque assurgit, per foramen G in cavitatem vasis CD descendit. Ea igitur defluente, foramen E rursus aperitur aerique aditus in vas superius AB denuo conceditur. Unde patet, aquam denuo per foraminula ejusdem effluere debere. Habemus adeo fontem intermittentem. *Q.e.d.*

Aliter.

Quodsi fonticulum per intervalla salientem desideres, fiant omnia ut ante, nisi quod loco foraminulorum aptandi sint tubi recurvi PQT & RSV. Tab. V. Fig. 60.

Aliter.

1. Sit tubus EF aquam advehens in cavitatem vasis AB. Tab. V. Fig. 61.
2. Ex hoc vase descendat sipho GHI in minus CD lumine

mine conveniente in L instructus.

Quamprimum aqua ultra siphonem AB descenderit, per siphonem fluet, donec vas exhauriatur, (§. 72) adeoque tamdiu per lumen L saliet. Quodsi igitur efficias, ut plus aquæ per lumen L saliat, quam per tubum EF advehitur; fontem habebis intermittentem.

SCHOLION 1.

153. *Hoc posteriori artificio haud difficulter efficies, ut statua aquas evomant ex improviso in adstantes.*

SCHOLION 2.

154. *Priori autem superstructa est lampas, quam in gratiam amici inventam publici deinde juris feci* (a) *& in sequenti problemate denuo exhibeo.*

PROBLEMA 38.

155. *Lampadem construere, quæ eandem quantitatem olei ellychnio constanter affundit, & in qua largius pabulum flammam nunquam extinguit, multo minus receptaculum ellychnii egreditur, maximo licet calore urgente.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 62. 1. Fiat vasculum cylindricum AC BD, cui oleum infundi possit & ipsi afferruminetur aliud minus formam parallelepipedi habens FED & rostro FH instructum, pro recipiendo ellychnio.

2. Illud diaphragmate KL dividatur fundo DB multo propiore, quam fornici AC.

3. Tubulus PO in P & O utrinque apertus interiori vasculi AB parieti adhæreat, quem *tracheam* appello. Ejus osculum superius P fornicem AC propemodum attingit; inferius vero O superficiem olei ad libellam HI constituti lambit.

4. Diaphragmati afferruminetur tubulus alius MN, utrinque similiter apertus & ad eandem olei libellam HI protensus.

5. Fundo vasis DB afferruminetur tubulus QR, cujus osculum superius Q ultra libellam olei tantilo emineat & transeat per matricem cochleæ V, qua vas AB CD ad pedamentum VTX firmatur.

6. Intra hoc fiat vasculum cavum *ab* & in G foramen exiguum, per quod aeri externo in civitatem DKLB pateat aditus.

7. Denique in fornice fiat foramen cochlea S munitum, ut lampas

(a) in Actis Erudit. A. 1711. p. 30. & seqq.

pas (si quando opus fuerit) a sordibus purgari queat.

Dico, si lampas a pedamento avulsa invertitur & digito ad foramen G applicato oleum per tubulum QR altero MN paulo ampliorem infunditur, fore ut oleum cavitatem GB ingressum per tubulum NM, vase in latus DC inclinato, in proprium receptaculum AK delabatur, & lampas repleta & ad pedamentum VT rursus firmata munere suo, ut decet, fungatur.

DEMONSTRATIO.

Quamdiu enim oleum ad libellam HI consistit, ne guttula quidem una per MN effluere potest, vi eorum, quæ ad problema præcedens demonstrata sunt (§. 152). Insensibili autem ejus quantitate absumta, aer per tracheam OP ingreditur & oleum per MN destillat. Eandem itaque quantitatem olei lampas constanter ellychnio affundit. *Quod erat unum.*

Quodsi lampas in locum calidum deferatur, aer supra oleum rarefit (§. 23. *Aerom.*), adeoque oleum per tubulum MN expellitur (§. 91): quod cum ultra libellam HI assurgat, per tubulum QR in vasculum *ab* defluit, consequenter nec flammam extinguere, nec extra receptaculum ellychnii egredi potest. *Quod erat secundum & tertium.*

SCHOLION.

156. *Ut demonstratio ocularis evaderet, vas* ABCD *ex vitro fieri curavimus observavimusque, tracheam* PO *non nimis arctam esse debere, si desideres, ut olei vel minima quantitas absumta statim refundatur. Etenim gutta olei aeri in tubulum nimis arctum aditum non concedit, nisi ejus vi per totam tubuli longitudinem in vas* ACLK *abripiatur. Unde simul colligitur, operam dandam esse ut orificium tracheæ sit bene politum.*

PROBLEMA 39.

157. *Construere fonticulum salientem, in quo avicula tantum aquæ sorbeat, quantum ex illo profluit.*

RESOLUTIO.

1. Fiat vas BF per diaphragma ED in duas cavitates divisum, quarum superior AEPD in duas alias AC & CB per diaphragma CN subdividitur. Tab. VI. Fig. 63.
2. In Q, R & S fiant foramina cochleis munienda ut aqua infundi & effundi possit, prout usus postulaverit.
3. Ex vase AB in vas EF descendat tubus GH fundo illius afferruminatus, fundum

vero hujus non prorſus contingens atque clavicula p inſtructus.

4. Ex vaſe DF asſurgat tubus KI baſi illius ſuperiori afferruminatus, hujus vero baſin ſuperiorem non prorſus attingens.

5. A fundo fere vaſis CB aſcendat alius tubus LM tranſiens per fundum phialæ O aquam ſalientem excipientis, epiſtomio T inſtructus.

6. Denique per roſtrum, corpus & pedes aviculæ vaſi AB inſiſtentis ducatur ſiphon inflexus ZV.

Dico, ſi epiſtomia p & T aperias, vaſis A & B aqua repletis & roſtro aviculæ aquæ immerſo, fore ut aqua per tubulum LM ſaliat & avicula eam ſorbeat.

DEMONSTRATIO.

Dum epiſtomio p aperto aqua per tubulum GH, ex vaſe AC in vas DF deſcendit; aqua ex phiala per roſtrum avis aſcendere debet (§. 77). Dum vero per ſiphonem ZV ſemel fluit, motus continuatur, donec aqua omnis ex phiala fuerit exhauſta (§. 66). Enimvero quamdiu aqua per tubum GH deſcendit, aqua ex cavitate CB per tubum LM ſalire debet (§. 89). Habemus ergo fonticulum ſalientem & aviculam tantum aquæ ſorbentem, quantum ex illo profluit. *Q. e. d.*

SCHOLION.

158. *Eadem prorſus ſtructura eſt fontis* Kircheriani, *in quo avis tantum aquæ ſorbet, quantum a ſerpente in poculum exſpuitur. Abſconde enim tubum* LM *intra corpus ſerpentis & eum inflecte, ut lumen* M *per os hiet: nec difficulter forma fontis in Kircherianum mutabitur.*

PROBLEMA 40.

159. *Fontem conſtruere in vaſe vitreo clauſo ſalientem.*

RESOLUTIO.

1. Sit ſphæra vitrea A, cujus orificium cochlea BE munitum. Tab. VI.

2. Per cochleam tranſeat tubulus DC, exiguo lumine in C, ſed ampliore in D inſtructus, cujus pars major ſit extra vitrum. Fig. 64.

3. Eidem cochleæ afferruminetur tubulus admodum gracilis, ſed altero CD multo longior EF.

4. Sint duo vaſa IK & LM mediante tubo HN inter ſe connexa & baſi ſuperioris IK afferruminetur tubulus GH,

5. per quem ad vas inferius demittatur tubus EF.

Dico, ſi vas IK & aliquam ſphæræ A partem aqua repleas, aquam ex ſphæ-

ſphæra per tubulum EF in vas LM deſcenſuram & per tubulum DC in ſphæram aſcenſuram, per lumen exiguum C ſaliendo.

DEMONSTRATIO.

Dum enim aqua per tubulum EF deſcendit, aer in ſphæra dilatatur (§. 36. *Aerom.*), adeoque elater ejus minuitur (§. 78. *Aerom.*). Quare cum incluſus ante dilatationem ponderi atmoſphærico æqualis exiſteret (§. 33. *Aerom.*), quo aqua in vaſe IK premitur (§. 21. *Aerom.*); incluſus poſt dilationem ad lumen C minus reſiſtit, quam externus aquam in vaſe IK premit. Aqua igitur per tubulum DC aſcendere & quia lumen C exiguum *per hypoth.*, ſalire debet (§. 55). *Quod erat unum.*

Cum vero fonticulus hic ſaliens ſit ſipho interruptus, cujus crus minus BD, majus EF; motus aquæ ſalientis continuatio intelligitur per ea, quæ de continuatione motus fluidorum in ſiphonibus demonſtrata ſunt (§. 66). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

160. *Ex demonſtratione apparet, aquam per tubulum* DC *ſalire debere, modo orificium* D *in aquam immergatur, orificio* F *extra eam conſtituto. Unde ſtructura fontis multis modis variari poteſt.*

CAPUT V.

DE

VARIIS MACHINAMENTIS HYDRAULICIS.

PROBLEMA 41.

161. *Fores conſtruere, quibus apertis aqua conſpergatur ingrediens.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 65.

1. Ad latera valvarum juxta ſuperliminare collocentur vaſa AB & CD aqua plena, quibus
2. Tubus recurvus EFGH ita adaptetur, ut pars FG ſub limine lateat tubulis I, K, L per foramina liminis hiantibus.
3. In M & N tubo FG applicentur epiſtomia cum valvis P & Q ita con-

connexa, ut iis apertis & ipsa aperiantur.

Quo facto, aqua per tubulos I, K & L prosiliet & ingredientem madidabit (§. 49).

SCHOLION.

162. *Eodem artificio riscum construes, quo aperto, facies aperientis aqua conspergatur.*

PROBLEMA 42.

163. *Efficere, ut in horto vel crypta deambulans subito aquis ex terra prosilientibus conspergatur.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 66.

1. Sub terra ita abscondatur antlia AB, ut virga ferrea GE, qua depressa embolus movetur, paulo ultra ipsius superficiem promineat.
2. Embolus F sit valvula instructus & ita aptetur, ut a pede calcantis depressus a lamina elastica H rursus attollatur.
3. Sit CD tubus aquam in cylindrum AB advehens, contra pulverem terræ ac arenæ granula probe muniendum.
4. Fundo antliæ afferruminetur tubus ILM, cujus orificium M ultra superficiem terræ paulo promineat.

Dico, aquam per M prosilire debere, si pede in G insistas.

DEMONSTRATIO.

Aqua nimirum per tubum CD in superiorem antliæ AB partem delapsa urget valvulam E, quæ cum in partem inferiorem hiet, aperitur & aquæ illuc transitum concedit, in tubo LM usque ad N ascensuræ (§. 34. *Hydrost.*). Quodsi jam pede calcantis embolus F deprimatur, valvula E clausa aquæ regressum in superiorem antliæ partem impedit (§. 104): quare per tubum LM cum impetu ejicitur. Remoto autem pede ab embolo GF, pistillum situi suo restituitur ope elateris H. Saliet itaque aqua ex M, quoties pes calcantis admovetur embolo G. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

164. *Cum aqua ex altitudine quadam delapsa, ad eam fere rursus ascendat (§. 49); qua tubo CD advehitur, ex vase intra terram defosso & in planitie replendo illuc derivari debet.*

SCHOLION 2.

165. *Quodsi vero aqua per tubum CD advecta ex altitudine quadam fuerit delapsa; in I aptanda valvula, cui deprimendæ solum aquæ pondus non sufficiat: vel totum machinamentum alia ratione construi deberet.*

PROBLEMA 43.

166. *Construere machinam, quæ aquam insigni cum impetu elevet.*

RE-

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 67.

1. Construatur antlia compressiva AB (§. 113).
2. Ex ea transeat tubulus CD in vas cylindricum HI, cujus ex orichalco paratæ altitudo sit 2 pedum, diameter octo digitorum.
3. Tubus CD sit valvula in D instructus, quæ in cavitatem vasis HI hiet.
4. Denique in K afferruminetur tubus recurvus KL, mediante epistomio O pro arbitrio claudendus & aperiendus.

Dico, hanc machinam aquam ad insignem altitudinem elevaturam.

DEMONSTRATIO.

Embolo enim EF elevato, valvula G aperitur & aqua in antliam AB ascendit (§. 36. *Aerom.*): quo rursus depresso, illa clauditur & valvula D aperta aqua per tubum CD in vas HI ejicitur (§. 105). Quo facto, cum epistomium O sit clausum, aer in cavitate vasis HI comprimitur (§. 17. *Aerom.*). Quodsi itaque sufficienter fuerit compressus; aperto epistomio, aqua insigni cum impetu per tubum KL prorumpet (§. 87). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

167. Quoniam agitatione emboli continuata, aër in eodem compressionis gradu conservari potest; hæc machina aquam continuo ejicit.

PROBLEMA 44.

168. *Hydracontisterium, hoc est, machinam construere, quæ aquam ad incendia restinguenda ad datam alitudinem & in datum locum evomat.*

RESOLUTIO.

1. Fiat cista AB figuram parallelepipedi habens & rotis C instructa, ut commode ad locum incendii advehi possit. Sunt & qui cistam trahæ imponunt, firmitatis gratia, quia non tam facile damnum patitur, quam rota. Tab. VII. Fig. 68.
2. Intra cistam firmetur machina Ctesibiana cum gemino cylindro (§. 113).
3. Ad agitandos embolos applicentur vectes DE cum axe curvato, ita ut embolus alter deprimatur, dum unus attollitur.
4. Tubus, per quem aqua ejaculatur, immittatur alteri mobili GH, qui ad locum desideratum commode dirigi potest.

Si enim continuo aqua in cistam AB infundatur & emboli nunc e-

leventur, nunc deprimantur; aqua per tubum GH ad locum desideratum ejaculabitur (§. *cit.*). Machina igitur ad restinguenda incendia commode utimur.

SCHOLION 1.

169. *Belgæ aliique ipsorum exemplo excitati tubo mobili* GH *substituunt tubum longum, flexilem, ex materia velorum vel corio factum, qui manu arreptus ad quævis loca incendio infestata trahitur ab homine ex conclavi uno in alterum libere deambulante, prout necessitas postulaverit. (Vocatur tubus istiusmodi Germanis* ein Schlauch). *Unde apparet, hac ratione hydraconisteriis esse locum, etiamsi flamma in conclavibus ædificii tantum sæviat, nec per tectum ac fenestras foras erumpat.*

SCHOLION 2.

170. *Non inutiliter machinæ Ctesibianæ substituere licet alteram* in probl. 43. (§. 166) *descriptam, quia aquam non per intervalla, sed continuo ejaculatur.*

PROBLEMA 45.

171. *Efficere, ut ad speculum aut objectum aliud accedens aqua ex improviso conspergatur.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 69.

1. Sit AB cista aqua plena, cujus fundo afferruminetur tubus recurvus CDEF.
2. Pars tubi intra cistam AB paulo infra embolum elevatum foraminibus nonnullis pertundatur.
3. Denique embolus G ita immittatur, ut cessante vi deprimente, per elaterium rursus attollatur.

DEMONSTRATIO.

Aqua enim per foraminula in tubum CD defluet ac in tubo EF eousque ascendet, donec in eadem altitudine subsistat, ad quam aqua intra cistam AB constituitur (§. 34. *Hydrost.*). Quodsi vero embolum in H pede deprimas, aquam per F ejiciet, adeoque eadem ex improviso conspergeris. *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Quodsi aqua ex alto delabatur, sufficit, ut pede deprimatur valvula, quæ aquæ aditum in tubum* EF *concedat* (§. 85).

PROBLEMA 46.

173. *Construere speculam, in qua speculator constitutus sonum ingentem cornu edat.*

RESOLUTIO.

1. In superiore loco speculæ constituatur vas aqua plenum AB & in inferiore aliud aere plenum CD, contra omnem vero aeris accessum optime munitum. Tab. VI. Fig. 70.

2. Ex

2. Ex vase superiori AB in inferius CD transeat tubus EF epistomio L instructus.
3. Ex vase inferiori CD ascendat tubus HG per vas, pedem, corpus & os speculatoris, cui cornu K sit afferruminatum.

Etenim laxato existomio L, aqua ex vase AB per tubum EF descendit & ingenti celeritate aerem ex vase CD per tubum HG expellit, qui dum per cornu egreditur eundem sonum parit, qui aere in cornu inflato audiretur.

SCHOLION 1.

174. *Simili artificio sonos alios produces.* Kircherus (b) *cantum singularum fere avicularum notis musicis exprimere & in cylindrum phonotacticum aquis per tubos delabentibus facile convertendum transferre docuit: unde multa excerpsit* Schottus (c), *quæ ad hoc argumentum hydraulicum perficiendum tendunt.*

SCHOLION 2.

175. *Huc referenda quoque sunt organa hydraulica jam veteribus nota & a* Vitruvio (d) *descripta, a* Perraltio *in notis schematismo nitido egregie illustrata: de quibus, cum non amplius in usu sint, hic dicere non attinet.*

PROBLEMA 47.

176. *Ventum excitare ad flammam conservandam aptum.*

RESOLUTIO.

1. Ad basin dolii superiorem AB aptetur tubus CE, cujus altitudo 5 minimum aut sex pedum, amplitudo ea, ut tota aqua continuo affluente repleatur. Tab. VII. Fig. 71.
2. Tubus EC hinc inde instruendus est tubulis F aut, si mavis, foraminulis, ut ab aqua descendente aer una in dolium abripiatur.
3. In basi inferiori CG e regione luminis E sita sit tabula marmorea aut lapidea alia polita, in quam aqua perpendiculariter incidat.
4. In G aptetur tubus I angustior eo, per quem aqua delabitur, ut delapsa ex dolio iterum effluat.
5. Denique in H sit tubus ad eum locum protensus, quo ventus spirare debet.

Dum enim aqua cum impetu in tabulam lapideam M incidit ac dispergitur, aer ingenti impetu per tubum

(b) Musurgiæ lib. 9. part. 5.
(c) in Magia Universali Naturæ & Artis part. 2. lib. 6.
(d) lib. 10. c. 13. f. m. 325.

tubum H expellitur. Habes ergo ventum valide ſpirantem (§. 166. *Aerom.*).

SCHOLION 1.

177. Franciſcus Tertius de Lanis (c) *autor eſt, ſe vidiſſe, hoc artificio ventum majorem fuiſſe excitatum, quam qui follibus decem aut duodecim pedibus longis efficiebatur. Hinc in fornacibus majoribus ad liquandum ferrum aliaque metalla eodem utuntur.*

SCHOLION 2.

178. *Enimvero opus non eſt, ut tubus* CE *ſit rotundus & vas* ABCD *figuram dolii habeat. Utriusque figura ad arbitrium variari, e. gr. quadrata fieri poteſt. Unde quidam loco dolii cameram ex lateribus conſtruunt. Opera tantummodo danda, ne aer ex vaſe* ABCD *ullibi, quam per tubum H erumpere poſſit.*

SCHOLION 3.

Tab. VII. Fig. 72. 179. *Succedit etiam artificium, ſi nullum adſit dolium; ſed aqua per tubum quadratum* AB *nullis ſpiraculis inſtructum tantum delabatur, ad quem aptatus ſit tubus* GH, *unde ventus ſpirat. Quodſi uſus poſtulaverit, ut ventus interrumpatur, obturato orificio* H, *aperiatur aliud* I, *vento exitum concedens.*

PROBLEMA 48.

180. *Duo vaſa conſtruere, quorum unum utut plenum vino, nihil tamen ejus effundit, niſi alterum fuerit aqua plenum eamque effundat: quæ* Vaſa concordiæ *vocantur.*

RESOLUTIO.

1. Sint AB & CD duo vaſa, quæ mediante tubo recurvo EFGH inter ſe communicent.
2. In utroque vaſe aptetur ad fundum diabetes (§. 72), ita ut orificium tubi minoris I ſit infra orificia E & H tubi recurvi EF GH.

Quodſi vas AB vino repleatur, donec lumen I ſit in libella ejus; nihil effluet (§. 72). Sed ſi vas alterum CD aqua adimpleas totum; per tubum EFGH vas alterum AB ingreditur (§. 34. *Hydroſt.*) & quantitatem liquoris ibidem auget. Quare cum jam utrinque liquor ultra orificium I aſcendat; per M omnis aqua ex vaſe CD, per L vero vinum omne ex vaſe AB effluet (§. 72). *Q. e. d.*

PROBLEMA 49.

181. *Vas conſtruere, quod tantum vini effundit, quantum aquæ infuderis.*

RE-

(c) in Magiſterio Naturæ ac Artis lib. 5. c. 3. artif. 25. f. 197.

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 74. 1. Fiat vas ADBC in duas cavitates per diaphragma GF divisum & undiquaque contra accessum aëris probe munitum.

2. Operculo AD afferruminetur tubulus HI per cavitatem unam GB ad fundum fere vasis CB pertingens.

3. Cavitates duæ inter se communicent tubo recurvo LK.

4. Denique cavitati alteri immittatur tubulus M & utraque cavitas instruatur foramine cochlea munito, ut, si opus fuerit, liquor infundi & rursus effundi possit.

Quodsi enim cavitatem AF vino repleas, nihil infusi per MN effluet (§. 34 *Hydrost.*). Enimvero si per tubulum HI aquam cavitati alteri affundas; aer per tubum KL in cavitatem alteram propellitur adeoque vinum per tubum MN expellit.

PROBLEMA 50.

182. *Vas construere, quod liquorem excipit, donec fuerit plenum, si constanter eum affuderis; sed ne guttam amplius admittit, ubi semel cessaveris.*

RESOLUTIO.

1. Vas AB per diaphragma CD in duas cavitates ACD & CDB dividatur, quarum superior aperta esse potest.

2. Ad diaphragma in cavitate superiore AD aptetur diabetes GF: sub diaphragmate autem in cavitatem inferiorem hiet tubulus H. Tab. VII. Fig. 75.

Quodsi aquam constanter affundas, ea per diabetem GF defluet in cavitatem inferiorem CD aeremque per tubulum H expellet (§. 72). Sed si aliquamdiu desistas, aer tubum longiorem diabetæ replebit, excepta parte FE aquæ immersa. Nihil ergo amplius per tubum istum in cavitatem BC defluet.

PROBLEMA 51.

183. *Vas construere, ex quo per idem orificium vel aqua, vel vinum fluit, prout desideraveris, vel etiam mixtum ex aqua & vino.*

RESOLUTIO.

1. Sit vas AB per diaphragma CD in duas cavitates divisum. Tab. VII. Fig. 76.

2. In operculo vasis AE fiant duo foramina F & G, per quæ aeri in utramque cavitatem aditus patet.

3. In fundo fiant duo alia L & D, per quæ liquores in cavitatem IHB descendere possunt.

4. Ex terria hac cavitate procedat tubulus M.

Quodsi foramen G obtures, per tubum M effluet vinum ex cavitate CI. Si foramen F obtures, fluxus vini cessabit, fluetque aqua ex cavitate CB per eundem tubulum M. Quodsi denique utrumque foramen F & G fuerit apertum; aqua & vinum una per tubulum M effluent.

SCHOLION.

184. *Ex his principiis innumera alia derivare licet.*

CAPUT VI.

DE

CURSU FLUMINUM.

DEFINITIO 6.

185. *Alveus fluminis* est cavitas in superficie Telluris effecta, intra quam aqua continuo decurrit.

DEFINITIO 7.

186. *Alveus naturalis est*, qui a natura effectus est. *Alveus* vero *artificialis* vocatur, qui arte effectus fuit.

SCHOLION.

187. *Istiusmodi alveos artificiales parant molitores ad aquas in rotas molares derivandas* (§. 915. Mech.). *Germanico idiomate alveus naturalis* der wilde Bach, *alveus autem artificialis* der Mühlgraben *appellatur.*

DEFINITIO 8.

188. *Sectio alvei* est planum ad fundum perpendiculare, cujus termini aquam per alveum decurrentem non egrediuntur.

SCHOLION.

189. *Ponamus aquam intra alveum totam subito abire in glaciem & secari plano ad fundum alvei perpendiculari Qua hinc prodit sectio, erit ea, quae nobis hic sectio alvei vocatur.*

DEFINITIO 9.

190. *Sectio naturalis* est sectio alvei naturalis: *Sectio vero artificialis* sectio alvei artificialis.

SCHOLION.

191. *Definitio adeo sectionis fluminis, quam dedimus, cum de molendinis ageremus* (§. 914. Mech.), *est sectionis artificialis, quoniam ibi cum alveo artificiali, per quem aqua ad rotas molares deducitur, nobis fuit negotium.*

COROL-

COROLLARIUM 1.

192. Quoniam constat alveos naturales figuram habere prorsus irregularem, quæ ad aliquam geometricam commode reduci nequit; sectio naturalis figura plana irregularis est.

COROLLARIUM 2.

193. Quia vero alvei artificiales figuram parallelepipedi habent; sectio artificialis est rectangulum parallelogrammum (§. 462. *Geom.*).

SCHOLION.

194. *Qualis figura sit sectio artificialis jam ostendimus alibi,* (§. 915. Mech.). *Potest vero figura quæcunque irregularis ad parallelogrammum reduci, cujus basis latitudini fluminis æqualis. Unde in sequentibus per sectionem intelligemus rectangulum, cujus latitudo eadem cum latitudine fluminis, nisi res ipsa loquatur posse quamcunque sectionem supponi.*

DEFINITIO 10.

195. *Sectiones* dicuntur *æquiveloces*, per quas aqua eadem celeritate media fluit. Quid vero sit velocitas seu celeritas media, commodius docebitur deinceps.

DEFINITIO 11.

196. *Sectio velocior* est, per quam aqua celerior fluit; *Sectio tardior*, per quam fluit tardior.

DEFINITIO 12.

197. *Flumina in statu manente* sunt, si superficies aquæ intra alveum nullibi nec attollitur, nec deprimitur, sed eadem manet in eodem loco profunditas.

SCHOLION.

198. *Neque enim repugnat, ut propter alvei irregularitatem flumen alibi sit profundius, alibi minus profundum.*

DEFINITIO 13.

199. *Flumen intumescit*, si superficies aquæ intra alveum attollitur; *detumescit*, si eadem deprimitur.

THEOREMA 28.

200. *Aquæ libere fluentis in alveo declivi cursus acceleratur propter declivitatem fundi; in horizontali propter pressionem, quam inferior sustinet a superiori.*

DEMONSTRATIO.

Aqua enim fluidum grave est & quidem gravitatis eximiæ (§. 64. *Hydrost.*). Sed gravia per declivia seu ad horizontem inclinata motu accelerato deorsum ruunt (§. 384. *Mech.*). Ergo etiam aqua per alveum declivem motu accelerato ruere debet, atque adeo cursus fluminis acceleratur per fundi declivitatem. *Quod erat unum.*

Cum aqua in alveo horizontali ad aliquam a fundo altitudinem assurgit; inferiori incumbit superior.

Enimvero motus aquæ ob pressionem, quam a superiore sustinet. perinde ac cadendo per aliquam altitudinem, acceleratur (§. 48). Ergo cursus fluminis acceleratur quoque per pressionem, quam aqua inferior a superiore sustinet. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

201. Quo declivior adeo fundus alvei est, eo celerius aqua per eundem decurrit.

COROLLARIUM 2.

202. Quo profundior aquæ in alveo horizontali altitudo est, ad quam intra alveum assurgit, eo celerior cursus fluminis.

COROLLARIUM 3.

203. Quoniam aqua fundo propior magis premitur, quam ab eo remotior; quo fundo propior eo cursus ejus magis acceleratur.

COROLLARIUM 4.

Tab. I. Fig. 7. 204. Quoniam celeritas per planum inclinatum AB a gravi in B acquisita est ut radix altitudinis AD (§. 288. *Mechan.*); aqua etiam si libere fluit per canalem declivem AB in B eandem celeritatem acquirere debet, quæ est ut radix altitudinis AD.

COROLLARIUM 5.

205. Quodsi aqua per foramen B egrederetur ex vase, in quo ad altitudinem BF ipsi AD æqualem consisteret; ejus quoque celeritas esset ut radix altitudinis BF sive AD (§. 48). Aqua igitur per canalis inclinati sectionem eadem velocitate movetur, ac si flueret ex vase per lumen sectioni congruens a superficie aquæ tantundem remotum, quantum sectio ab horizontali per initium canalis ducta distat.

THEOREMA 29.

206. *In qualibet sectione canalis inclinati celeritas aquæ libere fluentis major est in fundo, quam in superficie.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur per originem canalis A linea horizontalis AE, sitque sectio, per quam aqua fluit BC, quæ est ad fundum AB perpendicularis (§. 188). Demittantur ex B & C perpendiculares ad AE, ducaturque HC ipsi DB parallela: erit GF perpendicularis ad HC (§. 230. *Geom.*) & FG = EC (§. 326. *Geom.*), consequenter FB > FG vel EC. Enimvero aquæ in C celeritas ea est, quam cadendo per altitudinem EC acquivisivisset, aquæ autem in B ea, quam cadendo per FB haberet (§. 287. *Mechan.*). Major igitur celeritas in B quam in C (§. *cit.*). *Q. e. d.*

SHHO-

SHOLION.

207. *Sequitur ex iis, quæ demonstrata sunt, fluminis cursum continuo celeriorem fieri debere, quo longius juxta fluvium progrederis: id quod tamen experientia parum convenire videtur. Tenendum itaque & ripas, & fundi inæqualitates causari resistentias, per quas celeritas continuo imminuitur, immo modo acquisita rursus extinguitur. Sed de his impedimentis accidentalibus nostrum jam non est dicere. Id tantummodo inculcandum esse censemus, cum declivitas fundi exigua sit, gravitatem quoque acceleratricem exiguam esse, cum maxima pars ad actionem in fundum, minima autem ad descensum impendatur* (§. 161. Mech.).

DEFINITIO 14.

208. Per *celeritatem* seu *velocitatem mediam* intelligo eam, qua si aqua flueret omnis per sectionem, tantundem eodem tempore per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur.

SCHOLION.

209. *Hinc intelligitur, cur sectiones æqueveloces definiverimus per eas, per quas aqua eadem celeritate media fluit* (§. 195). *Quoniam enim aqua inferior celerior fluit superiori ob diversam presfionem & fundi declivitas diversa diversæ quoque celeritatis causa est; per sectiones eadem celeritate variabili non fluit aqua, nisi eadem & æquales, & similes fuerint, adeoque theoremata de sectionibus æquevelocibus non eam acciperent latitudinem, quam habere possunt, nisi variabilis celeritas ad mediam quandam constantem reduceretur.*

THEOREMA 30.

210. *Per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt.*

DEMONSTRATIO.

Per sectiones enim æqueveloces aqua fluit eadem celeritate media (§. 195.) Quare cum vi celeritatis mediæ tantundem aquæ per sectionem fluat, quantum celeritate variabili eodem tempore per eandem fluit (§. 208) & sectiones æquales sint *per hypoth.* eodem tempore per sectiones æquales & æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fluunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

211. Quodsi ergo sectiones æqueveloces fuerint inæquales, cum minor parti majoris æquetur (§. 20. *Arithm.*); per partem majoris tantundem aquæ eodem tempore fluit, quantum per minorem, consequenter per majorem totam plus fluit.

COROLLARIUM 2.

212. Et quoniam per sectionem æquevelocem duplam dupla, per triplam tripla, per quadruplum quadrupla aquæ quan-

quantitas fluere debet, ac ita porro in quacunque ratione inæqualitatis (§. 210); Quantitates aquarum per æqueveloces sectiones fluentes eodem tempore sunt inter se ut sectiones.

THEOREMA 31.

213. *Per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ.*

DEMONSTRATIO.

Sint duæ sectiones æquales A & B, & aqua fluat per B dupla celeritate, qua fluit per A. Concipiatur sectio infinite parvæ crassitiei & huic respondens aqua transeat tempusculo infinite parvo per sectionem A. Quoniam celeritas media in sectione B dupla est *per hypoth.* dum aqua a sectione A distat intevallo crassitiei isti respondente, altera a B duplo istiusmodi intervallo distare debet (§. 33. *Mechan.*). Dupla igitur quantitas aquæ tempusculo infinite parvo eodem fluit per sectionem B. Jam cum tempus quodcunque in istiusmodi tempuscula æqualia resolvi possit, & singulis per B dupla fluat aquæ quantitas *per demonstrata;* evidens est quod omnibus istis tempusculis simul sumtis, hoc est dato quocunque tempore aquæ per sectionem B dupla quantitas fluere debeat: quod cum eodem modo fieri intelligatur in ratione celeritatum quacunque; per sectiones æquales eodem tempore fluentes aquæ sunt ut velocitates mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 32.

214. *Si sectiones fuerint inæquales, nec æqueveloces; quantitates aquarum per eas eodem tempore fluentes sunt in ratione composita sectionum & celeritatum mediarum.*

DEMONSTRATIO.

Fluat dato tempore per sectionem S celeritate media C quantitas aquæ Q & eodem vel æquali tempore per aliam quamcunque sectionem *s* alia quacunque celeritate *c* quantitas aquæ *q*. Fluat vero eodem tempore per sectionem S celeritate *c* quantitas aquæ *m*. Quoniam aquæ quantitates *q* & *m* per sectiones inæquales *s* & S eadem celeritate media fluunt; erunt eædem in ratione sectionum (§. 212). Et quia quantitates Q & *m* per æquales sectiones S diversa celeritate C & *c* fluunt; erunt eædem in ratione celeritatum C & *c* (§. 213). Habemus adeo $Qm : mq = SC : sc$ (§. 213. *Arith.*), & hinc $Q : q = SC : sc$ (§. 181. *Arithm.*) con-

consequenter quantitates aquarum Q & q per sectiones inæquales, nec æquevelocès fluentes sunt in ratione composita sectionum S & s atque celeritatum mediarum C & c (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

215. Si $Q = q$, erit $SC = sc$, adeoque $S : s = c : C$ (299. *Arithm.*), hoc est, si eodem tempore quantitates aquarum per inæquales sectiones diversa celeritate media fluunt, erunt sectiones in ratione celeritatum mediarum reciproca.

COROLLARIUM 2.

216. Quodsi præterea fuerit $S = s$, erit etiam $C = c$, adeoque si quantitates aquarum eædem per æquales sectiones fluunt; celeritas media eadem est, consequenter sectiones æqueveloces sunt (§. 195).

COROLLARIUM 3.

217. Quodsi ponatur $C = c$; erit etiam $S = s$, adeoque si celeritas media eadem & quantitates aquarum eodem tempore per utramque sectionem fluentes æquales, consequenter si sectiones æqueveloces eodem tempore æquales aquarum quantitates fundunt (§. 195); æquales sunt.

COROLLARIUM 4.

218. Quoniam $Q : q = SC : sc$ (§. 214); erit $qSC = Qsc$ (§. 297. *Arithm.*) & hinc $C : c = Qs : qS$ (§. 299. *Arithm.*), hoc est, celeritates mediæ sunt in ratione composita ex reciproca sectionum & directa quantitatum aquarum, quas eodem tempore fundunt.

THEOREMA 33.

219. *Si fluvius fuerit in statu manente, per omnes sectiones quomodocunque inæquales* AB, CD, EF, GH *aquæ eadem quantitas eodem tempore fluit.* Tab. VIII. Fig. 78.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim per sectionem CD eodem tempore minorem quantitatem aquæ fluere quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD aquæ quantitas continuo major fieri debet, adeoque fluvius in alvei ABDC parte continuo intumescit (§. 199): quod idem cum eodem modo pateat de sectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in statu manente (§. 197). Hoc cum sit contra hypothesin, aquæ per sectionem aliquam inferiorem minor quantitas fluere nequit, quam per superiorem quamcunque.

Ponamus ex adverso per sectionem CD aquæ majorem quantitatem eodem tempore fluere, quam per sectionem AB: inter sectiones AB & CD quantitas aquæ continuo minor fieri debet, adeoque fluvius in parte alvei ABCD continuo detumescit (§. 199):

199): quod idem cum eodem modo pateat de ſectione quacunque inferiore EF, GH &c. fluvius non erit in ſtatu manente (§. 197) *contra hypotheſin.* Aquæ igitur per ſectionem aliquam inferiorem major quantitas fluere nequit, quam per ſuperiorem quamcunque.

Quoniam itaque per ſectionem inferiorem aliquam nec minor, nec major quantitas fluere poteſt, quam per ſuperiorem quamcunque; per omnes omnino ſectiones quomodocunque inæquales eodem tempore eadem fluere debet. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

220. Quoniam Sectiones AB, CD, EF, GH inæquales ſunt, eodem tamen tempore æquales aquæ quantitates per ſingulas fluunt; aqua per ſectiones minores celerius fluere debet, quam per majores.

COROLLARIUM 2.

221. Flumen igitur coarctando aquæ celeritas augetur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aqua ibidem altius aſſurgere (§. 206), adeoque fluvius intumeſcere debet (§. 199).

COROLLARIUM 3.

222. Ex adverſo flumen dilatando aquæ celeritas imminuitur, conſequenter cum declivitas fundi non mutetur *per hypoth.* aquæ ibidem altitudo imminui (§. 206), adeoque fluvius detumeſcere debet (§. 199).

COROLLARIUM 4.

223. Quoniam in quibuscunque fluvii ſectionibus æquali tempore æquales aquæ quantitates fluunt (§. 219), ſectiones vero inæquales ſunt *per hypoth.* celeritates mediæ in duabus quibuscunque fluminis ſectionibus ſunt ut ſectiones reciproce (§. 215).

SCHOLION.

224. *Quæ corollariis tribus prioribus continentur, experientiæ conſona ſunt. Videmus enim aquam ibidem celerius fluere & profundiorem eſſe, ubi minor eſt fluvii latitudo; ibi autem fluere tardius & minus profundam deprehendi, ubi major ejus latitudo, niſi forſan ex accidente adſit quædam vorago. Uſu quoque in praxi receptum eſt, ut ad accelerandum motum fluminis alveus coarctetur.*

THEOREMA 34.

225. *Si fluvius intumeſcit, aqua fluens per quamlibet ſectionem dato quodam tempore eſt ad aquam, quæ ante intumeſcentiam ibidem fluxerat in ratione compoſita ſectionis ac celeritatis mediæ auctæ ad ſectionem & celeritatem mediam priſtinam.*

DEMONSTRATIO.

Dum enim fluvius intumeſcit, aqua intra alveum fit altior, conſequenter non modo ſectio, verum

rum etiam celeritas media (§.199. 206) augetur. Nova igitur sectio majorem quantitatem aquæ eodem tempore fundit quam pristina. Quoniam vero sectio major jam facta & pristina spectari possunt instar sectionum duorum fluminum, per quas aqua diversa celeritate fluit, cum fluvius intumescens a seipso differat, quemadmodum a fluvio altero profundiori, sed ejusdem declivitatis, quæ tamen hic attendenda non venit; aqua fluens per sectionem auctam celeritate media aucta erit ad aquam fluentem æquali tempore per sectionem pristinam celeritate pristina in ratione composita sectionis auctæ ad sectionem pristinam & celeritatis mediæ auctæ ad celeritatem mediam pristinam. (§.214.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

226. Erit adeo augmentum aquæ fluentis ad aquam pristinam æquali tempore fluentem ut differentia factorum ex velocitatibus mediis in sectiones ad factum ex sectione pristina in celeritatem (§. 193. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

227. Quodsi sectio in eodem alvei naturalis loco ad parallelogrammum propius accedit, cum parallelogramma ejusdem basis altitudinum rationem habeant (§ 389. *Geom.*), augmentum aquæ fluentis post intumescentiam erit ad aquam fluentem ante eandem ut differentia factorum ex altitudine aquæ aucta in celeritatem mediam auctam & ex altitudine pristina in celeritatem pristinam ad factum posterius: id quod in alveo artificiali semper locum habet (§. 193).

SCHOLION.

228. *Quando de altitudinibus sectionum vel aqua in alveo fuerit sermo, per eam intelligitur ea perpendiculi a superficie aquæ in fundum demissi pars, per quam aqua continuo fluit, ita ut, si fluxus omnis protinus cessare ponatur, nulla aqua in defluentis locum succedente, nihil prorsus aquæ in ea remanere intelligatur. Etenim aqua in cavitatibus fundi stagnantis nulla in fluxu habenda ratio est, cum perinde sit ac si prorsus abesset fundo plano existente. Vulgo autores, qui de aquis currentibus scripsere, perpendiculum istud, per quod aqua fluit,* altitudinem vivam *vocare solent, quod sit altitudo aquæ vivæ: aqua enim currens ad differentiam stagnantis viva appellari solet* (§. 10. Mech.).

THEOREMA 35.

229. *Si fuerit* AB *canalis declivis* Tab. & Bc *altitudo sectionis continuetur,* VIII. *donec lineæ horizontali* AL *per ini-* Fig. *tium ejus* A *ductæ, ubi superficies* 79. *aquæ canalem secat, in* L *occurrat & circa axem* LB *describatur parabola quæcunque* LGH; *semiordinata* CG *exponet celeritatem aquæ in* C, BH *celeritatem fundo proximam & semiordinatæ intermediæ inter* CG *&* BH *celeritates* quas-

quascunque in perpendiculari BC *inter* C *&* B *intermedias.*

DEMONSTRATIO.

Celeritates enim aquarum in C & B ſunt in ratione ſubduplicata rectarum EC & FB (*§.* 204). Et quoniam CE & BF perpendiculares ad AL *per hypoth.* erit CE ipſi BF parallela (*§.* 296. *Geom.*). Quamobrem cum ſit LC : LB = CE : BF (§. 268. *Geom.*); celeritas in C & B etiam in ratione ſubduplicata rectarum CL & LB exiſtunt (§. 124. *Analyſ. fin.* & *§.* 156. *Arithm.*). Enimvero ſemiordinatæ parabolæ CG & BH ſunt itidem in ratione ſubduplicata rectarum CL & BL (§. 412. *Analyſ. fin.*). Ergo etiam celeritates in C & B ſunt ut ſemiordinatæ CG & BH (§. 156. *Arithm.*), adeoque ſemiordinatæ CG & BH celeritates in C & B exponunt. Et quoniam de ſingulis ſemiordinatis intermediis idem eodem modo conſtat; ſemiordinatæ quoque intermeditæ celeritates intermedias exponunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

230. Si ergo BC fuerit perpendiculum ſectionis fluminis; ſpatium parabolicum CGHB eſt complexus omnium velocitatum iſtius ſectionis.

COROLLARIUM 2.

231. Quoniam $CG^2 : BH^2 = BL : CL$ (§. 412. *Anal. fin.*) adeoque $BH^2 - BG^2 : BH^2 = BC : BL$ (§. 193. *Arithm.*); ſint vero celeritates aquæ in B & C ut BH ad CG perpendiculari ſectionis exiſtente CB (§. 229); datis celeritatum in C & B ratione ac altitudine ſectionis BC, inveniri poteſt axis parabolæ B L.

COROLLARIUM 3.

232. Cum ducta IG ipſi BC parallela ſit CG = BI (*§.* 238. *Geom.*), adeoque IH differentia ſemiordinatarum CG & BH, conſequenter ut BC ad HI ita CG + BH ad parametrum (*§.* 404 *Anal. fin.*); datis CG & BH in eadem menſura, qua datur perpendiculum ſectionis BC, in eandem quoque menſura reperietur parameter parabolæ me[...]rantis celeritates & amplitudo ejus erit definita.

PROBLEMA 52.

233. *Dato angulo inclinationis alvei ſeu canalis* ABK *una cum altitudine ſeu perpendiculo ſectionis* BC *&* *celeritatum in* C *&* B *ratione, invenire diſtantiam fundi ab horizontali* AL *per initium alvei ducta atque diſtantiam* AF *ab initio alvei una cum hujus longitudine* BA. Tab. VIII. Fig. 79.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam BK parallela ipſi AL

per

per hypoth. angulus BAL angulo inclinationis ABK æqualis eſt (*§.233. Geom.*). Et quoniam rectus ABL recto KBA æqualis; demto communi ABF; erit FBL angulo inclinationis ABK æqualis (*§. 91. Arithm.*). Dantur itaque in triangulo BFL præter rectum ad F anguli obliqui FBL & FLB, itemque in triangulo ABF præter rectum ad F obliqui BAF & FBA.

2. Ex datis CG & BH una cum BC inveniatur axis ſeu altitudo parabolæ BL (*§.231*). Unde porro

3. Calculo trigonometrico definietur recta BF (*§.36. Trigon.*) & hinc tandem

4. recta AF, atque AB (*§. cit. Trigon.*).

THEOREMA 36.

234. *Si ſemiordinatæ parabolæ menſurantis celeritates aquæ intra minutum ſecundum ſeu tempus quodcunque datum per perpendiculum ſectionis fluentis* CB *&* GH *ſint æquales ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis* BC *fluens dato tempore deſcribit, & in partibus hujus aſſignentur; ſpatium parbolicum* BCGH *definiet quantitatem aquæ per ſectionis perpendiculum* BC *tempore iſto fluentem.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur perpendiculum ſectionis BC diviſum in particulas infinite parvas, quæ deſignabunt aquæ particulas eodem tempore in perpendiculo BC conſtitutas. Quoniam vero ſemiordinatæ ad BC applicatæ ſunt æquales ſpatiis intra tempus datum veluti minutum ſecundum deſcriptis ab iisdem particulis aquæ; arcus parabolicus GH terminabit omnem aquam, quæ initio hujus temporis in BC conſtituebatur, conſequenter ſpatium BCGH definit quantitatem aquæ per perpendiculum BC intervallo unius minuti ſecundi fluentis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

235. Quoniam ſpatium parabolicum GCL $= \frac{2}{3}$ LC. CG & BLH $= \frac{2}{3}$ BL. BH (§. 104. *Anal. infin.*), BCGH vero illorum ſpatiorum differentia; ſi ex datis ſpatiis, quæ aqua per extrema perpendiculi ſectionis fluens intra tempus datum deſcribit, quæratur axis parabolæ (§. 231;) quantitas aquæ intra tempus datum per perpendiculum fluens determinari poteſt.

COROLLARIUM 2.

236. Quoniam in ſectione artificiali perpendicula omnia æqualia ſunt (§. 193); aqua

aqua fluens per totam sectionem reperitur, si quantitas fluentis per perpendiculum ducatur in latitudinem alvei. Quamobrem cum hæc inveniri possit (§. 235); etiam quantitas per totam sectionem artificialem fluens definiri potest.

DEFINITIO 15.

Tab. VIII. Fig. 79. 237. Velocitates aquæ transeuntis per extrema C & B perpendiculi sectionis dico brevitatis gratia *celeritates terminales*. Dantur autem celeritates terminales per spatia CG & BH, quæ intra tempus datum aqua fluens per B & C describit.

PROBLEMA 37.

238. ***Datis celeritatibus terminalibus una cum perpendiculo sectionis invenire celeritatem mediam.***

RESOLUTIO.

1. Ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis investigetur quantitas aquæ per perpendiculum istud tempore dato fluens (§. 235).
2. Quantitas hæc inventa dividatur per perpendiculum sectionis: dico quotum definire celeritatem mediam in partibus perpendiculi sectionis. *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si ex datis celeritatibus terminalibus & perpendiculo sectionis investigetur quantitas aquæ dato tempore per perpendiculum istud BC fluens, spatium parabolicum BCGH prodit (§. 234). Quoniam vero celeritate media eadem quantitas aquæ per BC fluit eodem tempore, quæ variabili fluit (§. 280); & ob celeritatem eandem in singulis perpendiculi partibus, etiam infinite parvis (§. *cit.*), per parallelogrammum rectangulum exprimitur, cujus altitudo perpendiculum sectionis BC; area rectanguli, cujus altitudo BC, celeritas media basis, æquatur spatio parabolico BCGH. Quamobrem si area spatii hujus parabolici dividatur per perpendiculum sectionis BC; prodibit celeritas media quæsita (§. 375. *Geom.*). *Q. e. d.* Tab. VIII. Fig. 79.

PROBLEMA 38.

239. ***Datis celeritatibus terminalibus* CG *&* BH *una cum sectionis perpendiculo* BC, *punctum* K *in eodem definire, per quod aqua celeritate media fluit.***

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quæratur celeritas media (§. 238) &
2. ex semiordinata Parabolæ veloci-

cita-

citates exhibentis BH, quæ maximam celeritatem repræsentat, resecetur recta BM eidem æqualis.

3. In M erigatur perpendicularis MO secans parabolam in O.

4. Denique ex puncto O demittatur perpendicularis ad axem parabolæ OK, quæ erit semiordinata puncto O respondens (§. 370. *Anal. fin.*) atque adeo BK est distantia puncti perpendiculi a fundo, in quo aqua celeritate media movetur.

5. Hinc porro calculo definitur profunditas puncti K, in quo aqua movetur celeritate media inferendo (§. 404. *Anal. fin.*): ut parameter quam ex datis reperire licet (§. 232) ad aggregatum ex celeritate minima CG & media KO ita harum celeritatum differentia MH ad profunditatem quæsitam KC.

PROBLEMA 39.

Tab. VIII. Fig. 79. 240. *Data longitudine canalis inclinati* AB *una cum angulo inclinationis* BAF *& perpendiculo sectionis* BC *invenire celeritates terminales, atque mediam una cum axe parabolæ celeritates mensurantis* BL *& verticis* L *ab initio canalis* A *distantia.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Ex data longitudine canalis inclinati AB & angulo inclinationis BAF invenitur in triangulo ABF distantia fundi ab horizontali BF & in triangulo ABL ad B rectangulo (§. 188) distantia verticis parabolæ ab initio canalis AL, una cum axe parabolæ BL (§. 36. *Trigon.*).

2. Subducta altitudine sectionis BC ab axe parabolæ BL modo invento, relinquitur CL. Unde datis abscisis LC & LB reperitur semiordinatarum CG & BH ratio (§ 402. *Anal. fin.*); quæ cum celeritates terminales exprimant, tandem quoque

3. celeritatis mediæ ad illas ratio inveniri potest (§ 238.)

AXIOMA 1.

241. *Eadem vi uno eodemque momento duplex motus produci nequit.* Ponamus vim totam A impendi in accelerando motu corporis B, fieri non poterit, ut eodem tempore impendatur in accelerandum motum corporis C. Nempe si simul agat in B & C. pro parte una in B, pro altera autem in C agit. Alias effectus foret vi major: quod merito absurdum habetur.

SCHOLION.

242. *Veritas hujus axiomatis per experimenta hydrostatica confirmatur. Et-*

enim corpus grave in fluido specifice leviori descendit excessu ponderis sui supra pondus fluidi mole æqualis (§.88. Hydrost.); *quod vim gravitatis reliquam impendat in pressionem fluidi motui resistentis* (§.114. Hydrost.) *experimentorum consensu. Vis igitur, qua fluidum subjectum premitur, non simul impenditur in descensum; nec vis, qua motus descendentis acceleratur, una impenditur ad premendum aquam subjectam.*

THEOREMA 37.

243. *Aquæ per canalem declivem ruentis celeritas non augetur ob pressionem, quam inferior a superiori sustinet.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus celeritatem aquæ per canalem declivem ruentis augeri ob pressionem, quam inferior a superiori sustinet, ita ut inferior celerior moveatur, quam vi descensus per declive acquisivit (§. 284. *Mechan.*). Quoniam motus per declive descendentis acceleratur gravitate respectiva, pars vero reliqua in actionem in fundum impenditur declivem (§.261. *Mech.*), aut vis illa, qua agitur in planum inclinatum, simul impendi deberet ad descensum, aut vis, qua acceleratur motus descendentis simul impendenda esset pressioni aquæ subjectæ. Quicquid horum accidat, eadem vis eodem tempore in duplicem effectum impendi debet, seu duplex motus eadem vi eodem tempore producitur: id quod absurdum (§. 241). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

244. *Alii ita adstruunt veritatem propositionis præsentis. Si aqua in* B *omnem habet celeritatem, quam descensu per planum inclinatum* AB *acquisivit, ea est, quam cadendo perpendiculariter ab eodem termino* A *ad eandem horizontalem* KB, *nempe per altitudinem* AK *vel* BF *acquisivisset* (§.303. Mech. *Ponamus jam aqua* B *motum quoque accelerari ob altitudinem incumbentis superioris: erit ergo major celeritas, quam perpendiculariter cadendo acquirere poterat. Sed hoc absurdum existimant, cum fluxus aquæ sit effectus gravitatis, quæ in descensum perpendicularem tota insumitur. Sed evidentia hujus demonstrationis pendet ab axiomate nostro. Tacite enim supponitur in descensu perpendiculari nullum esse effectum aquæ superioris in inferiorem, sed quamlibet aquæ guttam ita accelerari, acsi sola descenderet in medio non resistente. Id vero recte supponi, ex eo intelligitur, quod vis, qua ad accelerandum motum guttæ superioris impenditur, non una impendi possit in pressionem, qua inferioris gutta acceleratur motus: quemadmodum fit, ubi aqua superior vel quiescit, vel lente admodum descendit inferioris motu per foramen accelerato. Hic enim vis, qua ad motum per pressionem acce-* Tab. VIII. Fig. 79.

cele-

celerandum impenditur, non una consumitur in descensu prementis.

SCHOLION 2.

245. *Hinc & aqua in fundo fluminum tardius moveri deprehenditur, quam in superficie, propterea quod motus ob declivitatem plerumque non differat in superficie & in fundo; major vero cum ibidem sit resistentia, quam prope superficiem, magis quoque retardetur.*

SCHOLION 3.

246. *Inprimis autem notandum est, quod* Mariottus (a) *annotavit aquam in alveo naturali fluminis ob eam, quam patitur, resistentiam* (§.207) *brevi temporis spatio acquirere celeritatem non augendam, quamdiu eadem manet declivitas. Unde porro infert, si declivitas alvei imminuatur, celeritatem denuo successive, sed brevi temporis spatio imminui, ut per istam alvei partem lentius fluat aqua, quam per anteriorem. Et eodem modo intelligitur, quomodo in eodem alveo naturali motus fluminis accelerari possit ut in sequente alvei parte aqua celerius fluit, quam in anteriore. Atque hinc porro intelligitur, cur in diversis alvei naturalis partibus diversa fit aquæ fluentis celeritas.*

SCHOLION 4.

247. *Nulla in hoc difficultas posita est, quod manente eadem declivitate fundi motus evadat celerior flumine coarctato, ut minor evadat ejus latitudo* (§. 221), *experientia suffragante* (§. 224). *Etenim tum initium canalis ob altitudinem aqua auctam cui pars alvei naturalis respondet, e longinquiori intervallo petendum. Initium canalis inclinati* A *ibi statuitur, ubi planum inclinatum ejusdem* BA *concurrit cum superficie aquæ* AC, *quemadmodum ex demonstrationibus anterioribus intelligitur, ut determinari possit descensus perpendicularis* EC *aquæ in superficie. Etenim aqua in* C *dici nequit descendisse intervallo* EC, *nisi aliquo tempore fuerit in* A. *Sed idem mox ostendemus apertius* (§. 249). Tab. VIII. Fig. 97.

SCHOLION 5.

248. *Ceterum hinc intelligitur in motu fluminum plerumque assumi posse aquam per perpendiculum sectionis eadem celeritate moveri; non tamen assumere licet, quod per totam sectionem eadem celeritate moveatur, propterea quod juxta ripas motus ob majorem resistentiam tardior esse soleat quam in medio. Quodsi istiusmodi canales inclinati, quales in theorematis antecedentibus supponimus, essent alvei naturales, eadem quoque ad hos alveos transferre liceret sine ulla immutatione.*

THEOREMA 38.

249. *Si in canale inclinato* AB *sectio* BC *obstruatur, ut aqua nonnisi per partem* BI *fluere possit, aqua intumescet & ad statum manentem reducta celerius fluet per sectionem* BI, *quam ante, initio canalis* G *ultra priorem* A *promoto.* Tab. VIII. Fig. 80.

DE-

(a) Trait. du Mouvement des Eaux part. 4. disc. 4. p. 430. Oper.

DEMONSTRATIO.

Etenim dum Sectio BC ex parte obstruitur, per partem residuam apertam BI pristina aquæ quantitas eadem celeritate fluere eodem tempore nequit, quo fluxerat per integram BC (§. 211). Quoniam tamen aquæ eadem quantitas affluit, quæ ad sectionem BC nondum obstructam ferebatur; necesse est aliquid ejus continuo remanere adeoque altitudinem fieri majorem, consequenter aqua intumescit (§. 199). *Quod erat primum.*

Enimvero quando ad statum manentem reducitur, non amplius intumescit (§. 197), adeoque per sectionem minorem BI eodem tempore eadem aquæ quantitas fluit, quæ ante fluxerat per totam BC. Necesse igitur est ut fluat celerius (§. 215). *Quod erat secundum.*

Jam dum aquæ superficies AC attollitur in OG *vi num. 1.* evidens est, quod ea canalem BA non amplius in A, sed in G secet. Initium adeo canalis G ultra terminum pristinum A promovetur. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

250. Quoniam ibi vertex parabolæ FBE, ubi sectionis perpendiculum BI productum horizontalem GF per initium canalis declivis AB secat, & semiordinatæ BE & IK exponentes celeritatem in punctis B & I majores sunt rectis BD & IL, quæ ante intumescentiam aquæ seu obstructionem sectionis easdem in iisdem punctis exponebant (§. 249); parabola FKE metitur celeritates in perpendiculo IB & majoris amplitudinis est, quam altera HLD quæ metitur velocitates in perpendiculo majoris sectionis BC.

COROLLARIUM 2.

251. Quodsi impedimentum, quo obstruitur sectio, fuerit minor CO, veluti IN; aqua ad O usque intumescere nequit, adeoque per NO supra impedimentum effluit.

COROLLARIUM 3.

252. Celeritas aucta aquæ per sectionem minorem fluentis BI in B ea est, quam cadendo per altitudinem BM acquirere poterat, & celeritas pristina in B ea erat, quam cadendo per altitudinem BN acquisivisset (§. 305. *Mech.*) Quare cum celeritates per BN & PM acquisitæ sint in ratione subduplicata rectarum BN & BM (§. 87. *Mech.*); erit celeritas aucta in B ad celeritatem pristinam ut radix rectæ BN ad radicem alterius BM.

THEOREMA 39.

253. *Aqua per sectionem canalis horizontalis eodem modo fluit, qua fluit ex vase pleno cujus eadem, quæ sectionis altitudo.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim in tubo horizontali, cum nulla ſit declivitas, aqua non fluit niſi quatenus ſuſtinet preſſionem inferior a ſuperiori. Ex vaſe aqua pleno per foramen ſimiliter fluit aqua vi preſſionis ejusdem: quod utrumque per ſe manifeſtum eſt. Quodſi ergo lumen vaſis ſit ſectioni canalis æquale ac ſimile; & altitudo fluidi utrobique eadem eſt, cum motus totus pendeat ab altitudine fluidi prementis, nulla adeſt diverſitatis ratio. Quamobrem aqua per ſectionem canalis horizontalis eodem modo fluere debet, quo fluit ex vaſe pleno, cujus eadem, quæ ſectionis altitudo. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

254. *Sane ſi canalem horinzontalem tegas quodam operimento, convenit is cum vaſe pleno, cujus eadem quæ ſectionis altitudo. Ecquis vero non videt operimentum nihil facere ad motum aquæ, cum eadem maneat fluidi altitudo, quæ ante, conſequenter preſſio ab eadem pendens nullo modo varietur.*

COROLLARIUM 1.

Tab. VIII. Fig. 81.

255. In ſectionis adeo perpendiculo BC canalis horizontalis AB quodlibet punctum, D, E, vel B eandem celeritatem habet, quam acquireret per altitudinem aquæ incumbentis, nimirum aqua in B habet celeritatem, quam acquiſiviſſet cadendo per altitudinem BC; aqua in E celeritatem habet quam cadendo per altitudinem EC acquiſiviſſet, & ſimiliter aqua in D celeritatem habet, quæ cadendo per altitudinem BD acquiritur.

COROLLARIUM 2.

256. Erunt igitur celeritatum in B, E & D quadrata ut rectæ BC, EC, DC (§. 86. *Mechan.*), ſeu celeritates ipſæ in ratione ſubduplicata earundem rectarum BC, EC, DC (§. 87. *Mechan.*).

COROLLARIUM 3.

257. Quare ſi circa altitudinem ſectionis BC deſcribatur parabola CFGH, exponens ſemiordinatæ BH, EG & DF celeritates aquæ per perpendiculum BC fluentis in punctis B, E, D, C (§. *præc.* & §. 402. *Anal. fin.*).

COROLLARIUM 4.

258. Quodſi ergo celeritas BH in partibus perpendiculi ſectionis BC determinetur; ſpatium parabolicum BCH quantitatem aquæ exhibet, quæ eodem tempore per ſectionem fluit, quo aqua per B fluens deſcribit ſpatium BH; id quod eodem modo patet, quo ſupra idem in canale inclinato evicimus (§. 234).

COROLLARIUM 5.

259. Quantitas igitur aquæ fluentis per perpendiculum BC eo tempore, quo aqua per B fluens ex B in H progreditur, eſt æqualis rectangulo ex BH in duas tertias partes altitudinis ſectionis BC vel ex BC in $\frac{2}{3}$ BH (§. 104. *Anal. in fin.*), conſequenter in ratione compoſita ex ratio-

ratione celeritatis maximæ & duarum altitudinis partium.

SHOLION 2.

260. *Hinc jam porro eodem, quo supra, modo determinantur alia fluxum aqua in canali horizontali concernentia.*

SCHOLION 3.

261. *Resistentias, quas patitur cursus fluminis, cum ab obstaculis accidentalibus pendeant, ad regulam quandam generalem revocare minime licuit.*

SCHOLION 4.

262. *Ceterum quæ de motu aquarum per canales horizontales dicta sunt ad fluxum quoque aquarum per lumina vasorum lateribus insculpta applicari possunt atque solent* (§. 48).

THEOREMA 40.

263. *Si aqua per canalem horizontalem fluit, celeritas media est ad maximam ut 2. ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 81. Aquæ enim quantitas est ut $\frac{2}{3}$ BH. BC (§.259). Quare cum rectangulum BCMI exprimat quantitatem aquæ per sectionis perpendiculum fluentis, si BI = $\frac{2}{3}$ BH (§. 375. *Geom.*); eadem adhuc aquæ quantitas per idem fluere debet, si per singula puncta eadem celeritate BI moveatur. Est igitur BI celeritas media (§. 208). Enimvero BI = $\frac{2}{3}$ BH *per demonstrata.* Ergo BI : BH = $\frac{2}{3}$: 1 = 2 : 3 (§. 178. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

264. Quoniam aucta altitudine sectionis BC, augetur celeritas maxima BH (§. 256); aucta altitudine sectionis augetur quoque celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 2.

265. Similiter quia imminuta altitudine sectionis BC, imminuitur celeritas maxima BH (§. 256); imminuta altitudine sectionis imminuitur celeritas media (§. 263).

COROLLARIUM 3.

266. Si ex semiordinata maxima parabolæ celeritates aquæ per sectionem canalis horizontalis fluentis BH resecetur BI = $\frac{2}{3}$ BH & super BI construatur rectangulum CBIM, cujus latus IM parabolam in K secat; demisso ex K in altitudinem BC perpendiculari KL; erit in L locus celeritatis mediæ.

COROLLARIUM 4.

267. Quodsi jam porro inferatur ut quadratum spatii PH, quod aqua celeritate maxima fluens, dato tempore emetitur ad quadratum spatii LK, quod celeritate media describit eodem tempore, ita altitudo sectionis BC ad numerum quartum proportionalem; exprimet is profunditatem CL puncti L, per quod aqua celeritate media fluit, infra superficiem aquæ LC (§. 402. *Anal. fin.*).

SCHO-

SCHOLION.

268. *Punctum istud a nonnullis* Centrum velocitatis *appellari solet, quia velocitas ipsi conveniens in locum omnium velocitatum inaequalium assumi potest.*

CAPUT VII.

DE

PERCUSIONE FLUIDORUM.

DEFINITIO 16.

269. *Percussio fluidi* est actio, qua fluidum aliquod in aliud corpus sive fluidum, sive solidum impingens in idem agit. Quando directe, quando indirecte impingat, dictum est alias (*§. 523. 526. Mechan.*).

COROLLARIUM 1.

270. Quoniam percussio dato aliquo tempore absolvitur, fluida vero impingentia in continuo motu sunt; tota illa quantitas impingit, adeoque corpus percutit (§. 270), quae tempore isto affluit, ac ideo percussio fluidorum successiva est.

SCHOLION.

271. *Fluida nempe consideranda veniunt instar multitudinis globulorum, quorum diversa series sibi mutuo succedentes in corpus, quod percutitur, impingunt. Ut adeo appareat pro diversa densitate variari globulorum simul incurrentium, pro diversa celeritate serierum sibi invicem succedentium numerum.*

COROLLARIUM 2.

272. Quoniam plus massae simul impingit, si fluidum fuerit densius, quam si fuerit rarius, plus autem massae in densiore sub eodem volumine continetur, quam in rariori (§. 8. 10. *Hydrost.*); in percussione fluidorum habenda est ratio densitatis fluidi, seu ceteris paribus major fit percussio a fluido densiori, quam a rariori.

COROLLARIUM 3.

273. Quoniam dato tempore, quo percussio successiva absolvitur, plus massae in corpus percussum incurrit, si fluidum aliquod celerius, quam si tardius moveatur; in determinanda massa percutientis non solum densitatis, (§. 273), verum etiam celeritatis ratio habenda, seu densitate existente eadem major est massa percutientis si fluidum celerius moveatur, quam si tardius; massae scilicet in ratione celeritatum sunt.

COROLLARIUM 4.

274. Quoniam vis, qua fluidum in aliud corpus incurrens idem urget, e genere mortuarum est, utpote cujus actio nonnisi in nisu quodam sese exerente consistit (§. 9. *Mechan.*), istiusmodi autem vires massa existente eadem in ratione celeritatum sunt (§. 250) in moleculis quoque simul incurrentibus major est vis percutiendi, si fluidum aliquod celerius movetur, quam si movetur tardius.

SCHOLION.

275. *Patet adeo celeritatem fluidi bis spectandam esse in percussione: nimirum primo in determinanda massa multitudine, qua agit in corpus percussum, & secundo in determinando gradu, quem vis a motu habet.*

DEFINITIO 17.

276. Si fluida in duo plana vel directe, vel sub eodem angulo obliquo incurrunt; *eodem modo incurrere* dicuntur.

SCHOLION.

277. *Non tamen ideo eodem quoque modo plana percutiunt, quia in percussione spectatur potissimum vis percutientis, qua non modo a directione impingentis, verum etiam a massa & celeritate pendet.*

AXIOMA 2.

278. *Si idem fluidum eadem celeritate eodem modo in plana æqualia incurrit, eadem vi eadem percutit.* Nulla enim adest diversitatis ratio.

SCHOLION.

279. *Vis percutientis pendet a celeritate, massa & directione percutientis, nec non a plani percussi magnitudine. In hypothesi adeo axiomatis omnia eadem præsupponuntur, a quibus quantitas vis pendet, qua fit percussio. Ex generalibus adeo principiis metaphysicis (§. 19 ... Ontol.) constat, vim percutiendi hoc in casu differre minime posse.*

THEOREMA 41.

280. *Si idem fluidum eadem celeritate latum in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione planorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus planum A esse duplum plani B: erit adeo pars dimidia illius huic toti æqualis (§. 142. *Arithm.*), sive $B = \frac{1}{2} A$. Quoniam itaque B & $\frac{1}{2}$ A eadem vi percutiuntur (278), atque eadem adeo vi utraque pars ipsius A percuti debet (§. 87. *Arithm.*); planum duplum A vi dupla percutitur, B vero simpla, hoc est, vires percutientes sunt in ratione dupla, consequenter in ratione planorum percussorum A & B. Idem cum eodem modo ostendatur, in quacunque alia planorum ratione; patet

in

in genere esse vires, quibus plana percutiuntur ab eodem fluido eodem modo & celeritate eadem incurrente, in ratione planorum percussorum. *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

281. *Si idem fluidum diversa celeritate, sed eodem modo in plana æqualia incurrit; vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia A & B, ac in A incurrat aqua dupla celeritate ejus, qua in B incurrit; in A & B autem directe, vel oblique sub eodem angulo incurrat. Dico vires, quibus percutiuntur plana A & B, esse ut quadrata celeritatum, seu vim, qua percutitur planum A esse quadruplo majorem ea, qua percutitur planum B. Quoniam enim fluidum diversa celeritate in plana A & B incurrit *per hypoth.* massa percutientis planum A est ad massam petcutientis planum B ut celeritas, qua movetur fluidum in planum A incurrens ad celeritatem, qua movetur quod fertur in B (*§.* 273). Quamobrem fluida percutientia spectari possunt tanquam corpora inæqualis massæ. Enimvero si massæ inæquales sunt, vires sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 523. *Mechan.*), adeoque in casu præsente, ubi massæ sunt ut celeritates *per demonstrata*, in ratione duplicata celeritatum, veluti in casu speciali vis, qua percutitur A quadruplo major est ea, qua percutitur planum B (*§.* 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 43.

282. *Si fluidum idem diversa celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrit, vires, quibus percutiuntur, sunt in ratione composita ex simplici planorum & duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrat fluidum quodcunque in plana quæcunque A & B celeritatibus quibuscunque C & c, dicanturque vires V & v. Incurrat idem fluidum in planum B celeritate c, dicaturque vis percutiens f. Quoniam fluidum in A & B eadem celeritate C incurrit; erit $V:f = A:B$ (§. 280). Et si idem fluidum in planum B diversa celeritate C & c incurrit: erit in diversis istis percussionibus $f : v = C^2 : c^2$ (*§.* 281). Habemus adeo $fV : fv = A.C^2 : B.c^2$ (§. 213. *Arithm.*), consequenter $V : v =$ A.C²:

A. C^2 : B. c^2 (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita ex simplici planorum A & B, atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

THEOREMA 44.

283. *Si fluida diversæ densitatis eadem celeritate in plana inæqualia eodem modo incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita densitatum fluidorum atque planorum.*

DEMONSTRATIO.

Incurrant duo fluida diversæ densitatis D & *d* in plana quæcunque A & B eadem celeritate dicanturque vires percutientes F & *v*: erit *f* : *v* = D : *d* (§. 272). Incurrat jam fluidum densitatis D in planum aliud A, quod alteri B inæquale sit, dicaturque vis percutiens V : erit V : *f* = A : B (§. 280). Erit itaque *f*V : *fv* = A. D : B. *d* (§. 213. *Arithm.*), consequenter V : *v* = A. D : B. *d* (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita planorum A & B atque densitatum fluidorum D. & *d*. *Q. e. d.*

THEOREMA 45.

284. *Si fluida diversæ densitatis diversa celeritate, sed eodem modo in plana inæqualia incurrant; vires percutientes sunt in ratione composita ex rationibus planorum percussorum & densitatum fluidorum simplicibus atque duplicata celeritatum.*

DEMONSTRATIO.

Sint duo plana æqualia B & B, in quæ incurrat fluidum idem seu ejusdem densitatis *d* diversis celeritatibus C & *c*, dicanturque vires F & *v*: erit F : *v* = C^2 : c^2 (§. 281). Incurrant jam fluida diversæ densitatis D & *d* eadem celeritate *c* in plana inæqualia A & B, dicanturque vires percutientes V & *f*; erit V : *f* = A. D : B. *d* (§. 283). Habemus itaque *f*V : *fv* = A. D. C^2 : B. *d*. c^2 (§. 213. *Arithm.*), consequenter V : *v* = A. D. C^2 : B. *d*. c^2 (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires percutientes fluidorum diversæ densitatis in plana utcunque inæqualia celeritatibus quibuscunque incurrentium sunt in ratione composita ex simplicibus planorum A & B, densitatum fluidorum D & *d* atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *Habemus adeo mensuram virium directe planum aliquod percutientium: etenim si indirecte impingit fluidum*

dum aliquod planum, tum variatio non una de causa accidit etsi theoremata in comparandis viribus sub eodem angulo impingentibus locum habeant.

THEOREMA 46.

286. *Si aqua per declive* AD *delapsa directe incurrit in palmulam rotæ circa centrum* C *convertibilis; erit vis percutiens ut palmula ducta in radium* EC, *densitatem aquæ & altitudinem lapsus* AB.

DEMONSTRATIO.

Etenim aquæ in palmulam irruentis vis percutiens absoluta est ut factum ex magnitudine palmulæ in densitatem aquæ & quadratum celeritatis, qua fluit (§. 284). Sed celeritas aquæ per declive AD delapsæ est in ratione subduplicata altitudinis lapsus AB (§. 204), adeoque quadratum ejusdem ut ipsa hæc altitudo. Quare vis percutiens absoluta erit ut factum ex magnitudine palmulæ in densitatem aquæ & in altitudinem lapsus AB. Enimvero quia palmula circa centrum C convertibilis *per hypoth.* illa jam consideranda venit tanquam potentia ad axem in peritrochio applicata, cujus centrum motus in C, atque tum vis respectiva erit ut absoluta ducta in radium (§. 792. 153. *Mechan.*). Est igitur vis palmulam percutiens ut palmula ducta in densitatem aquæ, altitudinem lapsus AB & radium rotæ EC. *Q. e. d.*

SCHOLION.

287. *Atque hinc patet modus ad mensuram revocandi vires percutientes aquarum rotas molares agitantium easque inter se conferendi: quod ut evidentius pateat, sequentia adjicere lubet corollaria.*

COROLLARIUM 1.

288. Sint radii rotarum R & r, palmulæ P & p, altitudines lapsus A & a; cum densitatis, quæ eadem hic supponitur, in comparandis viribus percutientibus non habenda sit ratio (§. 181. *Arithm.*); erunt vires percutientes V & v ut R. P. A : $r. p. a$ (§. 286).

COROLLARIUM 2.

289. Quodsi ponamus palmulas rotarum esse æquales, erit $P = p$, adeoque $V : v = R. A : r. a$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires percutientes æquales palmulas rotarum inæqualium sunt in ratione composita radiorum rotarum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 3.

290. Quodsi ulterius fuerit $R = r$, hoc est, si rotæ fuerint æquales; erit $V : v = A : a$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, vires aquarum rotas molares æquales percutientium sunt in ratione altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 4.

291. Si fuerit $R = r$, hoc est, si altitudi-

tudines rotarum fuerint æquales, palmulæ vero inæquales; erit $V:v = pA:p.a$, hoc est, vires, quibus palmulæ percutiuntur, sunt in ratione composita palmularum & altitudinum lapsus.

COROLLARIUM 5.

292. Quodsi fuerit $A = a$, hoc est, si aqua per æquales declivitates feratur in rotas inæquales; erit $V:v = R.P:r.p$, hoc est, vires percutientes sunt in ratione composita palmularum & radiorum rotarum.

COROLLARIUM 6.

293. Quodsi præterea $R = r$; erit $V:v = P:p$, hoc est, si rotæ fuerint æque altæ & aqua per eandem declivitatem in palmulas irruat; vires percutientes sunt in ratione palmularum.

COROLLARIUM 7.

294. Si vero fuerit præter $A = a$ etiam $P = p$; erit $V:v = R:r$, hoc est, si aqua per eandem declivitatem irruit in rotas, quæ palmulas æquales habent; erunt vires percutientes in ratione radiorum rotarum.

COROLLARIUM 8.

295. Si ponatur $V = v$, erit etiam $R.P.A = R.p.a$ (§. 288), adeoque $A:a = r.p:R.P$ (§. 299. *Arithm.*), hoc est, si altitudines lapsus aquarum in rotas irruentium fuerint in ratione composita reciproca palmularum & radiorum seu altitudinum rotarum; vires percutientes æquales sunt & contra.

COROLLARIUM 9.

296. Quodsi præterea fuerit $r = R$; erit: $A:a = p:P$ (§. 181. *Arithm.*), hoc est, si aqua incidit in rotas æque altas per declivitates, quarum altitudines rationem palmularum reciprocam habent; vires percutientes æquales sunt, & contra si rotæ æqualis altitudinis æqualiter percuti debent ab aquis directe impingentibus, aquæ delabi debent per altitudines palmulis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 10.

297. Si vero fuerit $B = p$; erit $A:a = r:R$, hoc est, si aqua directe impingens in palmulas æquales rotarum inæqualis altitudinis labatur per altitudines radiis rotarum reciproce proportionales; æquali vi percutiuntur, & contra si rotæ palmulas æquales habentes ab aqua æquali vi percuti debent, delabi debent per altitudines radiis reciproce proportionales.

COROLLARIUM 11.

298. Si denique fuerit $A = a$; erit $r.p = R.P$ (§. 293), adeoque $R:r = p:P$ (§. 299. *Arithm.*), hoc est, aqua per eandem declivitatem delapsa æquali vi percutit palmulas rotarum, quæ sunt in ratione reciproca radiorum seu altitudinum earundem.

COROLLARIUM 12.

299. Cum palmulæ figuram parallelogrammi habeant, adeoque si ejusdem fuerint latitudinis longitudinis rationem habeant (§. 389. *Geom.*); in eodem alveo declivi rotæ molares eadem vi agitantur, seu duæ rotæ sibi mutuo æquipolleant, si habeant longitudines palmularum radiis rotarum reciproce proportionales.

SCHOLION.

300. *Hinc videmus in fluminibus ad-*

modum latis construi rotas molares, quæ exiguæ sunt altitudinis, sed magnæ longitudinis, latitudine defectum altitudinis compensante.

THEOREMA 47.

301. *Si plana per fluida diversæ densitatis celeritatibus quibuscunque ferantur; resistentiæ, quas experiuntur, sunt in ratione composita ex rationibus planorum & densitatum fluidorum simpla & celeritatum duplicata.*

DEMONSTRATIO.

Etenim fluidum quiescens eadem vi resistit plano per ipsum lato, qua impingeret in idem planum, si ipsum quiesceret & fluidum moveretur ea celeritate, qua planum fertur, eadem in utroque casu supposita directione: id quod per se manifestum assumitur. Jam vero vires, quibus plana percutiuntur quiescentia a fluidis directe impingentibus, sunt in ratione composita densitatum & planorum simpla atque celeritatum duplicata (§. 284). Ergo etiam vires, quibus fluida directe resistunt planis per ea latis, sunt in ratione composita densitatum fluidorum ac ipsorummet planorum simpla & celeritatum quibus per eadem feruntur duplicata. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

302. Quodsi ergo plana ferantur per idem fluidum, veluti per aquam, densitate existente eadem, vires quibus ipsis resistitur, sunt in ratione simplici planorum & duplicata celeritatum, quibus ea per fluidum feruntur (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

303. Quodsi porro plana fuerint æqualia; resistentiæ, quas patiuntur, erunt ut quadrata celeritatum.

COROLLARIUM 3.

304. Si vero celeritates fuerint æquales, vires, quibus planis resistitur, erunt in ratione planorum.

DEFINITIO 18.

305. *Celeritatem absolutam* appellamus, qua fluidum fertur & directe impingit in planum; *Respectivam* vero, qua fluidum impingit in planum indirecte.

SCHOLION.

306. *Ponamus fluidum ferri celeritate ut* AC, *sed oblique incurrere in planum* AB *sub angulo incidentiæ* AC; *celeritas illa respectiva dicitur, quæ in impactu directo æquipollente eidem substituenda venit.* Tab. VIII. Fig. 85.

THEOREMA 48.

307. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* AC *&* BD; *celeritas absoluta est ad respectivam ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ.*

DEMONSTRATIO.

Exponat recta AC celeritatem

absolutam & ex C demittatur perpendicularis CF; celeritas per AC resolvitur in laterales CF & AF eidem simul æquipollentes (§. 245. *Mechan.*). Quoniam vero fluidum oblique impingens in AB in rectam hanc non agit secundum directionem AF, sed tantummodo secundum perpendicularem CF, juxta quam fluidi motui resistit; evidens est celeritatem respectivam exprimi per rectam CF (§. 305). Quodsi AC sumatur pro sinu toto, erit CF sinus anguli incidentiæ CAF (§. 2. *Trigon.*). Quare cum sit celeritas absoluta ad respectivam ut AC ad CF *per demonstrata*; erit illa quoque ad hanc ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

Tab. VIII. Fig. 83. 308. *Si fluidum indirecte impingit in rectam* AB *juxta lineas parallelas* CA *&* BD; *massa ejus, qua percussio indirecta fit, est ad massam, qua eadem linea directe ab eodem fluido eadem celeritate lato percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur BE ad AC perpendicularis: evidens est eodem tempore non majorem fluidi quantitatem deferri ad rectam AB, quam ad rectam BE, consequenter si BD exponat celeritatem fluidi, qua fertur, veluti spatium, quod decurrit fluidum isto tempusculo, quo absolvitur percussio; erit quantitas seu massa fluidi, quæ defertur ad AB juxta directiones obliquas ad massam, quæ ad eandem juxta directionem perpendicularem afflueret, ut BE. BD ad AB. BD, consequenter ut BE ad AB (§. 181. *Arithm.*). Jam si AB sumatur pro sinu toto, erit BE sinus anguli incidentiæ EAB (§. 2. *Trig.*). Est igitur BE ad AB, consequenter massa fluidi, qua percursio indirecta fit, ad massam, qua eadem linea AB ab eodem fluido directe percuteretur, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum totum (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 50.

309. *Si fluidum aliquod in rectam* AB *indirecte impingit, vis qua indirecte percutitur, est ad eam, qua eadem recta* AB *ab eodem fluido* CABD *juxta directiones parellelas* Ac *&* Bd *affluente percuteretur, in ratione duplicata sinus anguli incidentiæ ad sinum totum.* Tab. VIII. Fig. 83.

DEMONSTRATIO.

Etenim vires, quibus recta AB directe vel indirecte percutitur, sunt in ratione composita massarum & celeritatum (§. 278. *Mech.*), scilicet

vis

vis directa est ad indirectam ut massa, quæ in percussione directa ad rectam AB defertur, ad massam, quæ ad eandem in indirecta affluit, & ut celeritas absoluta ad respectivam. Enimvero & massa in percussione directa est ad massam in indirecta & celeritas absoluta ad respectivam ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ (§. 308. 209). Est igitur vis percutiens directa ad indirectam in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 51.

Tab. VIII. Fig. 83. 310. *Si fluidum oblique impingat in rectam* AB *juxta directiones parallelas* AC *&* BD *in ipsam delatum & ex* B *demittatur perpendicularis* BE *in* AC, *ex* E *vero denuo demittatur* EG *ad* AB *perpendicularis; vis, qua fluidum urget directe rectam* AB *est ad vim, qua eam urget indirecte, ut tota* AB *ad segmentum ejus* BG.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB:BE=BE:BG (§. 330. *Geom.*) & AB ad BE ut sinus totus ad sinum anguli incidentiæ BAC (§. 2. *Trigon.*) consequenter BG est tertia proportionalis ad sinum totum & sinum anguli incidentiæ. Habet igitur AB ad BG rationem duplicatam sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 216. *Arithm.*). Quare cum sit vis, qua percutitur recta AB directe, ad eam, qua indirecte percutitur, in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli incidentiæ (§. 309); erit etiam illa ad hanc ut tota recta AB ad segmentum ejus GB (§. 156. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

311. Quoniam GB > AB (§. 84. *Arithm.*); vis quoque, qua recta AB a fluido directe percutitur, est ea, qua indirecte percutitur, major.

COROLLARIUM 2.

312. Quodsi angulus incidentiæ fuerit IAB, rectæ AB segmentum vi indirectæ respondens erit BK (§. 310). Quare cum sit sub angulo incidentiæ CAB vis directa ad indirectam ut AB ad GB & sub angulo incidentiæ minore HAB ut AB ad KB (§ cit.); vis directa ad indirectam sub angulo incidentiæ majore minorem rationem habet quam sub minore (§. 205. *Arithm.*), consequenter vis indirecta sub angulo incidentiæ minore minor est quam sub majore (§. 206. *Arithm.*): unde decrescente angulo incidentiæ etiam vis percussionis decrescit, atque directione AC coincidente cum AB, hoc est, si fluidum juxta directionem AB movetur, percussio nulla est.

COROLLARIUM 3.

313. Quoniam vis directa sub angulo incidentiæ CAB est ad indirectam ut AB ad GB, sub angulo vero incidentiæ HAB ut AB ad KB (§. 310); vires indirectæ sub diversis, angulis incidentiæ eandem

rectam AB percutientes sunt inter se ut rectæ GB & KB (§. 196. *Arithm.*).

COROLLARIUM 4.

314. Quodsi fluidum feratur celeritate V, vis directa, qua percutitur recta AB, exponitur per $V^2.AB$ (§. 282). Quare cum sit vis directa ad indirectam ut AB ad GB, angulo incidentiæ existente CAB (§. 309); reperietur vis indirecta $\frac{V^2.AB.GB}{AB} = V^2.GB$, adeoque vis indirecta exponitur per $V^2.GB$ angulo incidentiæ existente CAB.

PROBLEMA 40.

Tab. VIII. Fig. 84. 315. *Determinare, vim quam ventus indirecte impingens in alas molendini exerit ad eas convertendas.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Repræsentet recta IQ axem atque planum ADCB alam, in quam ventus secundum directiones obliquas KA & HB agit. Ala axem, cui perpendiculariter insistit, secet ad angulum obliquum AEI (§. 929. *Mech.*). Quoniam itaque ventus secundum directionem obliquam IE in planum AC circa axem IE convertendum agit *per hypoth.* ideo investigada est vis, quam ventus ad planum ADCB circa axem IE convertendum adhibet dato angulo obliquitatis ACI, magnitudine alæ ADCB, ejus latitudine AB & celeritate, qua aer movetur.

1. Ducatur AG ad HB perpendicularis: cum aër secundum directiones parallelas KA & HB ad AB deferatur ad rectam AB, non plus aeris ferit planum obliquum ad axem ADCB, cujus latitudo AB, quam planum æque altum axem ad angulas rectos secans, cujus latitudo AG. Exponit igitur recta AG quantitatem aeris planum simul ferientis. Jam porro exponat EL celeritatem, qua movetur aer, cujus densitas sit $= d$; erit massa aeris, qua percussio absolvitur in puncto E, ut AG ducta in densitatem ac porro in LE.

2. Demittatur ex L recta LM ad AB perpendicularis: evidens est perpendicularem LM exponere celeritatem respectivam, qua ventus in planum secundum directionem obliquam in E incurrens agit (§. 245. *Mech.*).

3. Quoniam vero ventus planum ADBC movere nequit nisi circa axem IQ, circa quem conver-

vertendum; non omnem vim, quam habet a celeritate respectiva LM, in actionem suam impendit. Demittatur ergo perpendicularis MN ex puncto M in axem QI; evidens est celeritatem LM resolvi in duas alias LN & MN & eam, quæ est secundum directionem MN tantummodo proficere ad axem convertendum.

4. Denique cum in P sit centrum magnitudinis, idemque centrum gravitatis (§. 245. *Mechan.*), adeoque massæ totius plani ADCB; patet vim, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IQ convertendum, concipi posse tanquam applicatam ad punctum P & PE tanquam radium axis in peritrochio, cujus centrum E. Unde liquet vim, quam adhibet ventus, exprimi per *d*. AG. MN. EP (§. 153. *Mech.*). *Q. e. i.*

PROBLEMA 41.

316. *Determinare situm alarum molendini vi venti indirecte impingentis agitati, in quo ventus vim maximam adhibet ad eas convertendas, seu eas maxima celeritate convertit.*

RESOLUTIO.

1. Sint omnia ut in problemate præcedente, dicaturque AB = a, LE = b, EP = c, densitas aeris = m, GB = x; erit ob AE = EB = $\frac{1}{2}a$ *per hypoth.* & IE rectæ HB parallelam EO = $\frac{1}{2}$GB = $\frac{1}{2}x$ (§. 268. *Geom.*), & AG = $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417. *Geom.*). Tab. VIII. Fig. 84.

2. Quoniam in △△ AGB & LME anguli ad G & M recti *per constr.* & MEL = ABG (§. 255. *Geom.*); erit (§. 267. *Geom.*)

$$AB : AG = LE : LM$$
$$a : \sqrt{(a^2 - x^2)} = b : \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$$

3. Similiter quia in △△ AEO & LMN anguli ad O & N recti *per constr.* & ob rectum LME *per constr.* & obliquum L △△ LMN & LMN communem angulus LMN = AEO (§. 246. *Geom.*); erit (§. 267. *Geom.*)

$$AE : EO = LM : MN$$
$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}x = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a} : \frac{bx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2}$$

4. Quoniam vis, quam ventus adhibet ad planum ADCB circa axem IQ convertendum, est ut m. AG. LE. MN. EP (§. 315);

 erit

erit ea $= bmV(a^2-x^2)\ \frac{bcxV}{a^2}$

$(a^2-x^2) = b^2cmx - \frac{b^2cmx^2}{a^2}$

5. Habemus itaque (§. 63. *Anal. infin.*)

$b^2cmdx - \frac{3b^2cmxdx}{a^2} = 0$

$1 - \frac{3x}{a^2} = 0$

$a^2 = 3x$

$V\frac{1}{3}a^2 = x$

6. Quodsi jam a sumatur pro sinu toto, erit $V\frac{1}{3}a^2$ sinus anguli GAB (§. 2. *Trigon.*), cujus complementum ad rectum est angulus AEI, sub quo planum ADCB axem IQ secat. Sit itaque $a = 10000000$, erit $\frac{1}{3}a^2 = 33333333333333$, adeoque $x = 5773502$ cui in tabulis sinuum quam proxime respondent 35° 16′. Est itaque angulus GAB 35° 16, consequenter AEI, qui quæritur, 54° 44′.

SHOLION 1.

317. *Cum de constructione molendinorum vi venti agitandorum ageremus* (§. 929. Mechan.); *angulum* IEA 54° *graduum fieri præcepimus appendicem minutorum negligentes: in præsente nimirum negotio parum refert, sive is fiat* 54°, *sive* 55°. *Vulgo faciunt* 45°, *sed nulla theoria nixi.*

SCHOLION 2.

318. *Quoniam resistentia, quam patitur corpus intra fluidum motum, æquipollet percussioni eadem celeritate, qua ipsum movetur, a fluido factæ; non absimili modo determinari potest optimus situs gubernaculi, cujus ope naves in aqua convertuntur. Etenim hic quoque angulus obliquitatis idem deprehenditur, qui ante,* 54° 44′.

PROBLEMA 45.

319. *Datis radio basis majoris* AE *& altitudine segmenti conici* EF, *invenire altitudinem coni, cujus segmentum* ACDB *ita per fluidum motum, ut basis minor eidem occurrat & axis* EF *sit ad sectionem fluidi perpendicularis, seu horizonti parallelus, minimam patiatur resistentiam.* Tab. VIII. Fig. 81.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Quoniam perinde est, sive aqua in frustum conicum ACDB quiescens impingat, sive ipsum in fluido quiescente moveatur; ponamus aquam in quiescens impingere juxta rectas EG & IH. Impinget ergo in basin CD directe; in superficiem indire-

ćte

cte (§. 269), eodem semper manente angulo incidentiæ HCG vel ACI (§. 156. *Geom.*), quod directiones rectæ LH constanter parallelæ rectam AC in quocunque puncto sub eodem angulo secent (255. *Geom.*). Quodsi jam AC sumatur pro sinu toto, erit AI sinus anguli incidentiæ ACI (§. 2. *Trigon.*). Sit $EF = IC = a$, $AE = b$, $AI = x$; erit $AC = \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 417. *Geom.*). Enimvero cum sinus totus quantitas constans esse debeat; sumatur FE pro sinu toto: erit itaque ut AC ad AI ita IC ad sinum anguli incidentiæ, qui adeo reperitur $ax : \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

2. Porro patet in rectam AC non plus aquæ impingere, quam ad rectam CL ipsi AI æqualem defertur, adeoque ad totam superficiem non plus aquæ allabi, quam quæ annulum, cujus AI latitudo est, directe percuteret. Percusiones directæ in eodem fluido eadem celeritate lato sunt ut plana, quæ percutiuntur (§. 280) adeoque annulus exponit percussionem directam ipsius & circulus minor CD percussionem, quam ipse patitur, directam. Et quoniam hic tantummodo attenditur ratio percussionum, circuli autem sunt ut quadrata radiorum (§. 409. *Geom.*); resistentia directa, quam patitur circulus minor CD recte exponitur per CF^2 sive $IE^2 = b^2 - 2bx + x^2$ & resistentia annuli per $BE^2 - BI^2 = 2bx - x^2$.

3. Quodsi jam infertur: ut quadratum sinus totius a^2 ad quadratum sinus anguli incidentiæ $a^2x^2 : (a^2 + x^2)$, ita resistentia directa annuli $2bx - x^2$ ad resistentiam indirectam, quam patitur superficies frusti conici (§. 309); reperietur hæc $(2bx^3 - x^4) (a^2 + x^2)$.

4. Quodsi jam addatur resistentia directa basis minoris $b^2 - 2bx + x^2$ vi *num.* 2. prodibit integra resistentia frusti $b^2 - 2bx + x^2 + 2bx^3 - x^4 = \dfrac{a^2 b^2 -}{a^2 + x^2}$
$\dfrac{2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2.}{a^2 + x^2}$

5. Quoniam resistentia minima, quam istiusmodi frustum patitur, *per hypoth.* differentiale ejus nihilo æquale (§. 63. *Anal. infin.*), adeoque $(-2a^2bdx + 2a^2xdx + 2b^2xdx)(a^2 + x^2) - 2xdx (a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 + b^2x^2)$ per $(a^2 + x^2)^2$ div. $= o$, hoc est,

$2a^2b$

$$\frac{2a^2bx^2dx - 2a^4bdx + 2a^4xdx}{(a^2+x^2)^2}=0$$

$$bx^2 - a^2b + a^2x = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} = a^2$$

$$x^2 + \frac{a^2x}{b} + \frac{a^4}{4b^2} = a^2 + \frac{a^4}{4b^2}$$

$$x + \frac{a^2}{2b} = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2+a^2)}$$

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{(4b^2+a^2)} - \frac{a^2}{2b}$$

6. Jam ob IC rectæ EG parallelam *per hypoth.* erit (§. 268. *Geom.*).

$$AI : IC = AE : EG$$
$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Ergo $EG = \frac{2ab^2}{a\sqrt{(4b^2+a^2)} - a^2} = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a}$.

Enimvero $b^2 = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$ in $\sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$. Quare si hic valor substituatur; erit $EG = (\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}) + \frac{1}{2}a$.

7. Fiat itaque $EO = \frac{1}{2}a$; erit $AO = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)}$: cui si æqualis fiat OG, erit $EG = \sqrt{(b^2+\frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, atque adeo in G vertex coni, cujus frustum ACDB minimam patitur resistentiam, si ea conditione in fluido moveatur, quam fert hypothesis problematis.

FINIS Hydraulicæ & totius Tomi II, Elementorum Matheseos.

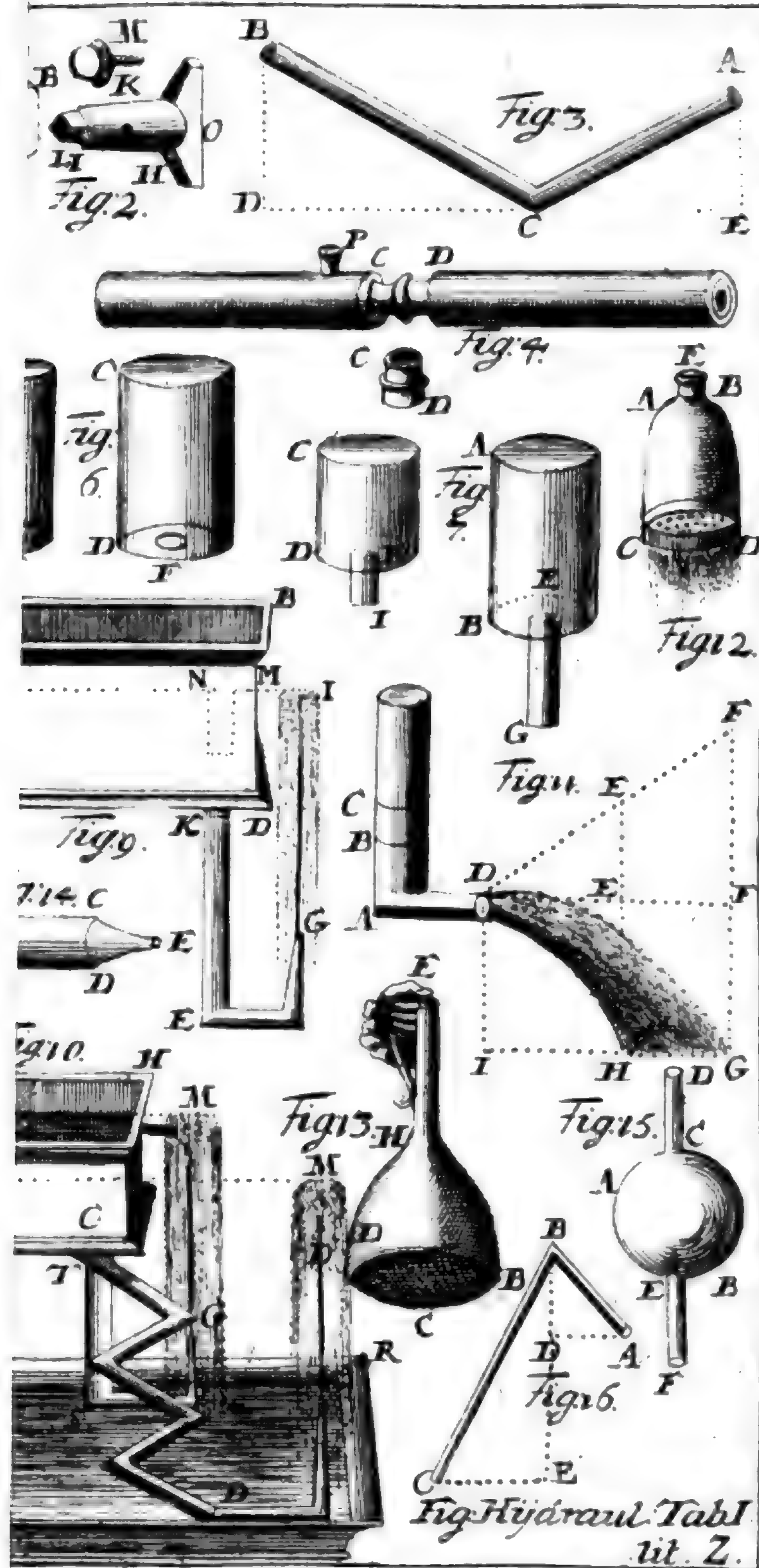


Fig.2.
Fig.3.
Fig.4.
fig. 6.
Fig. 8.
Fig.12.
Fig.11.
Fig.9.
Fig.10.
Fig.13.
Fig.15.
Fig.16.
Fig. Hydraul. Tab. I
lit. Z.

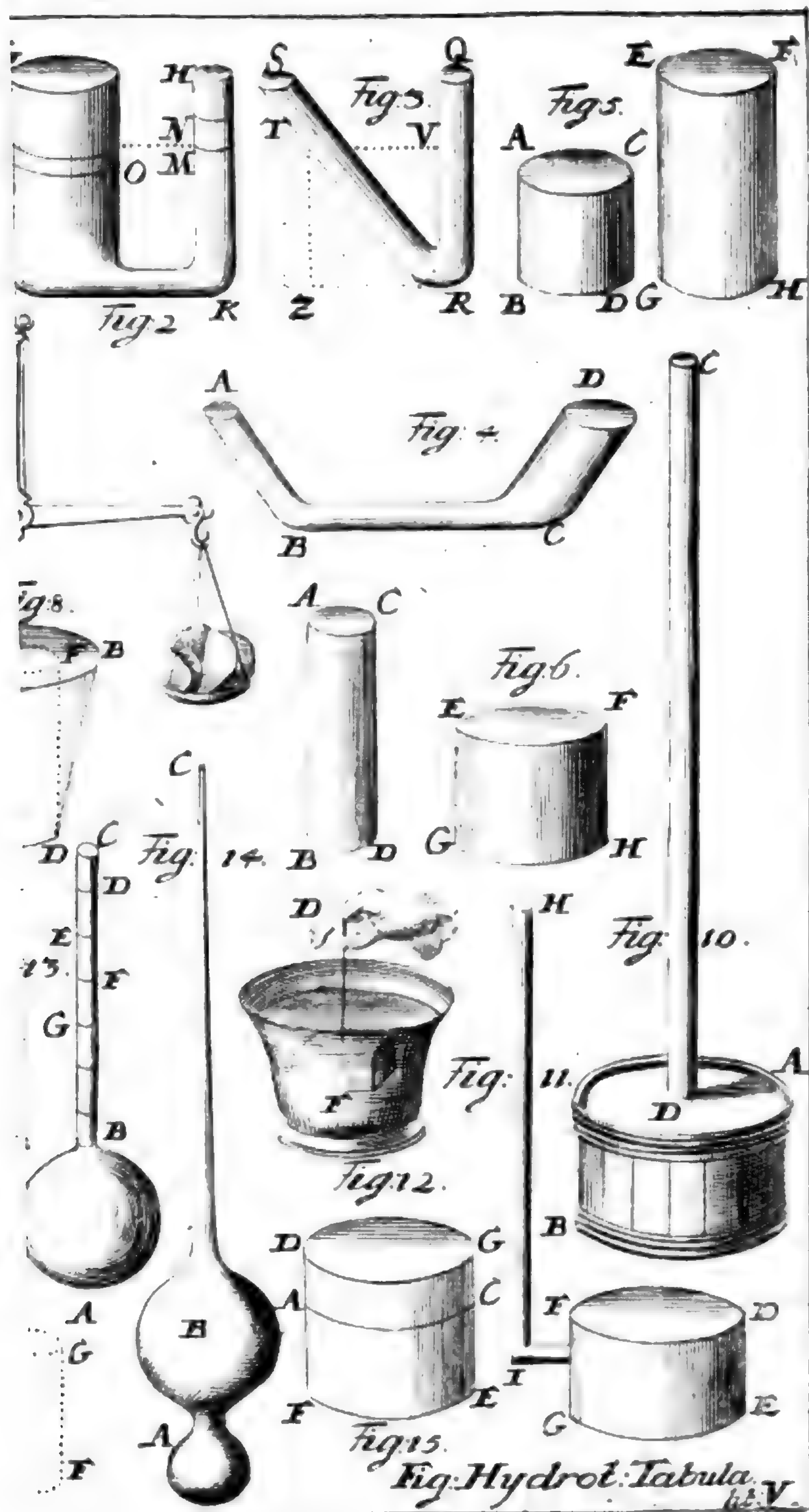


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 4
Fig. 8
Fig. 6
Fig. 14
Fig. 13
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 15
Fig: Hydrot: Tabula
lit. V.

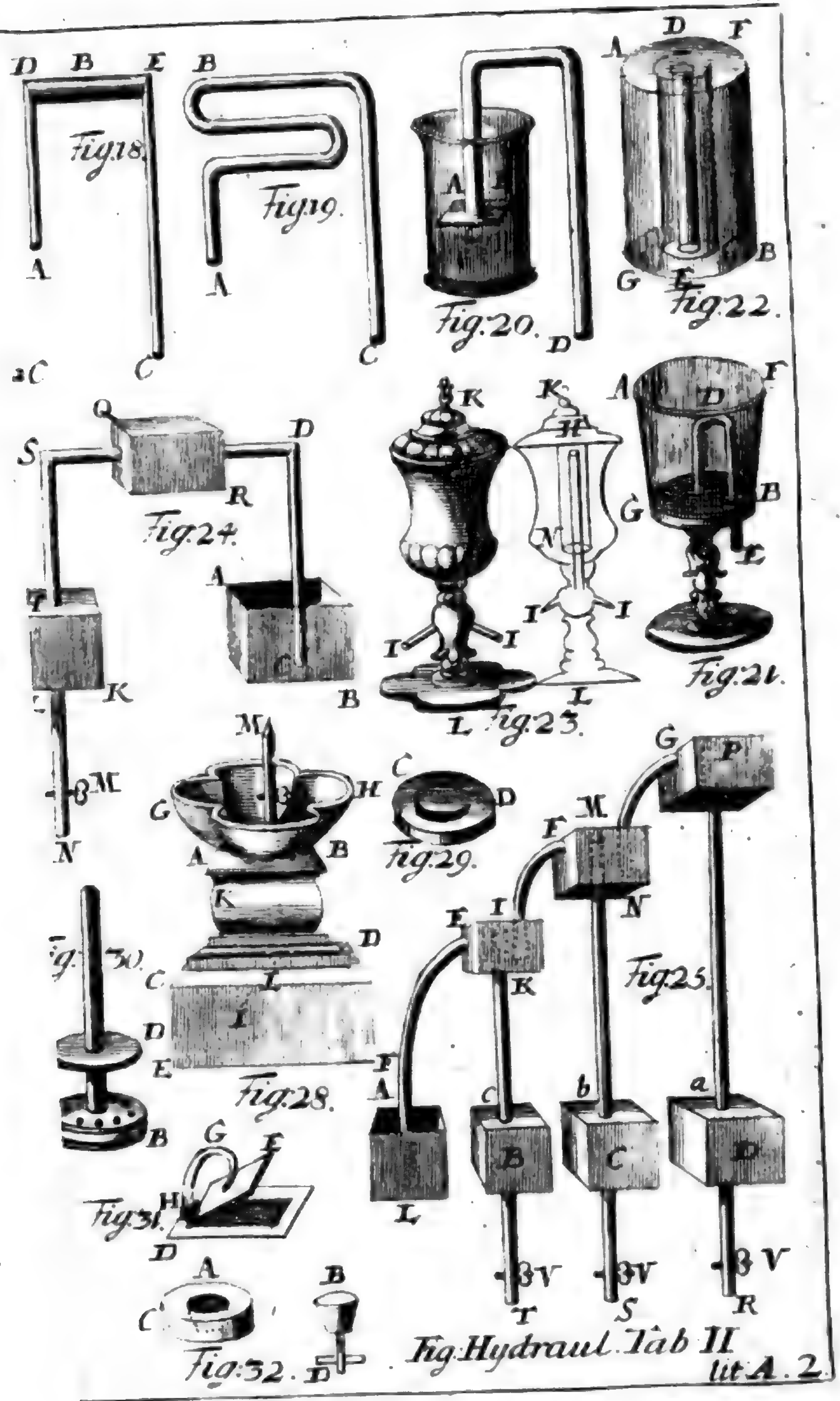


Fig.18.
Fig.19.
Fig.20.
Fig.22.
Fig.24.
Fig.23.
Fig.21.
Fig.29.
Fig.25.
Fig.28.
Fig.31.
Fig.32.
Fig.Hydraul.Tab II.
lit.A.2.

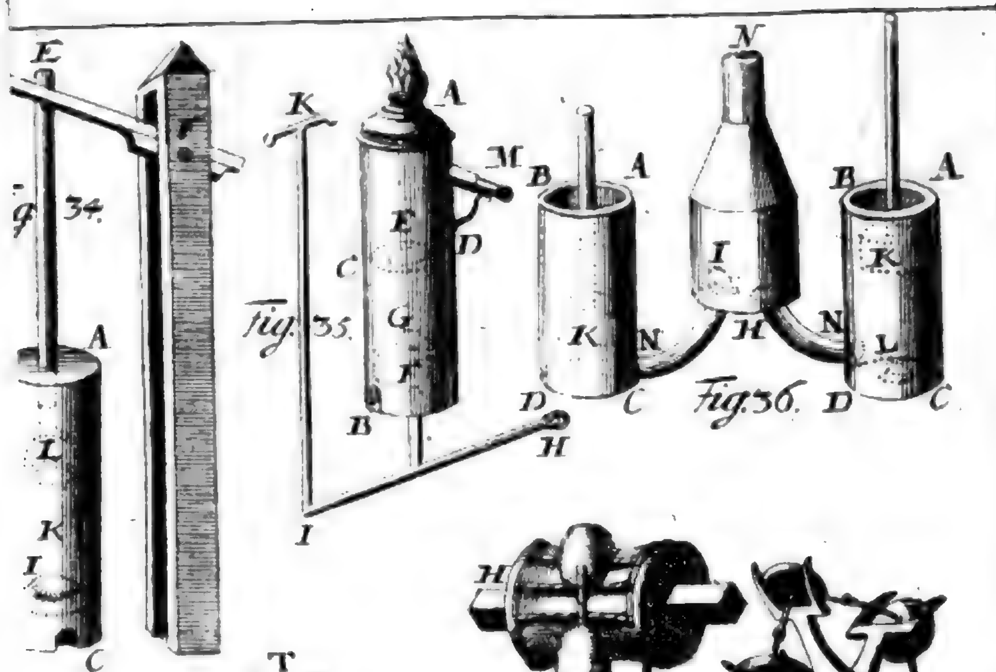


Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.

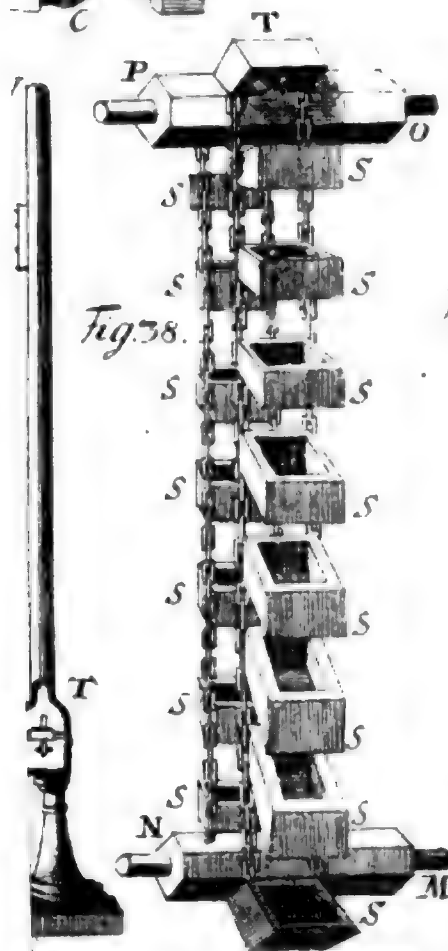


Fig. 38.

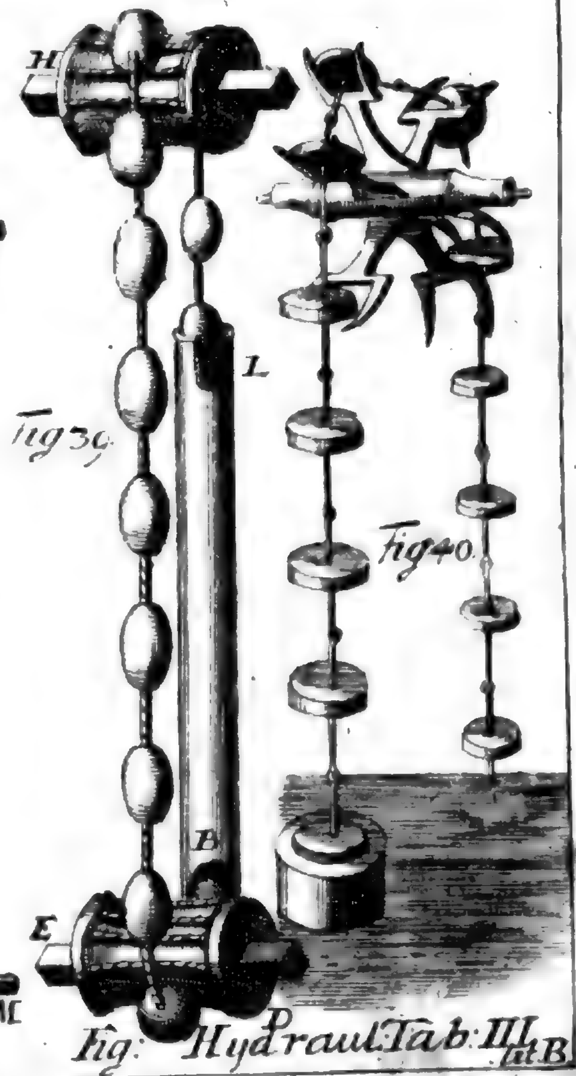
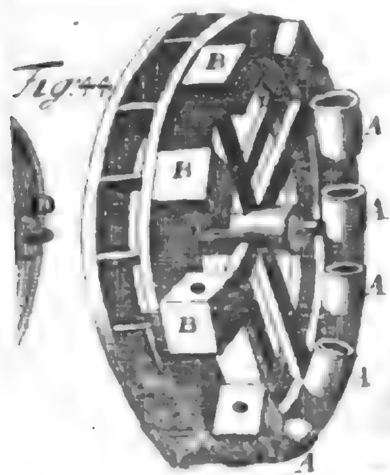
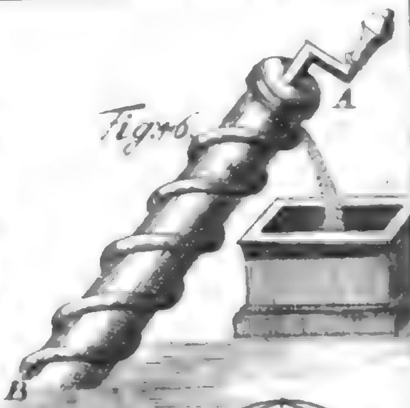
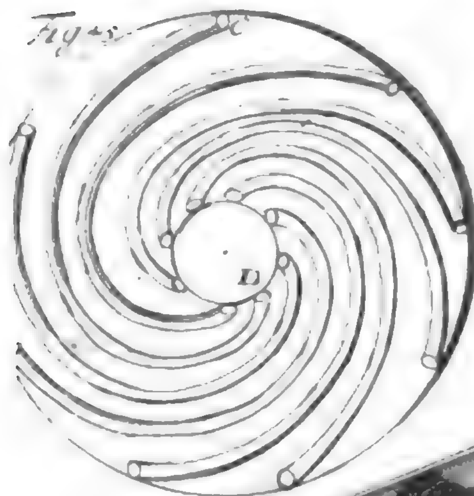
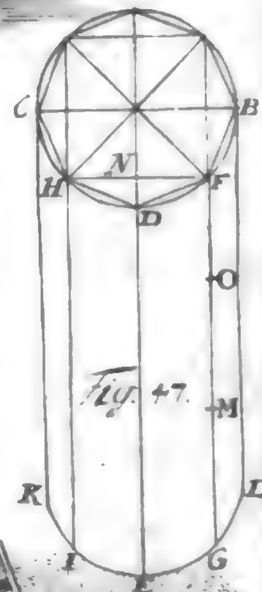


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig:
Hydraul. Tab: III.









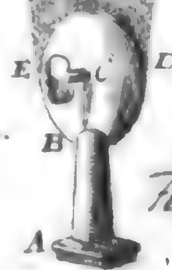


Fig: Hydraul: Tab IV.
lit. C. 2

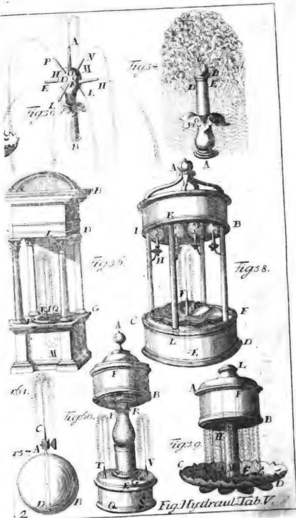


Fig.56.
Fig.58.
Fig.59.
Fig.60.
Fig: Hydraul: Tab. V.

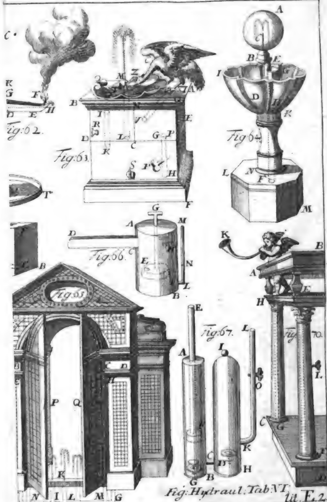


Fig:62.
Fig:63.
Fig:64.
Fig:65.
Fig:66.
Fig:67.
Fig 70.
Fig: Hydraul: Tab.VI.
lit.E.2.

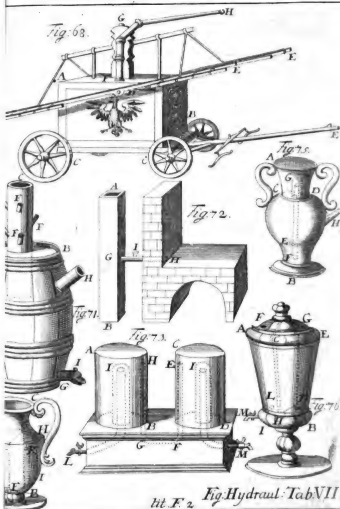
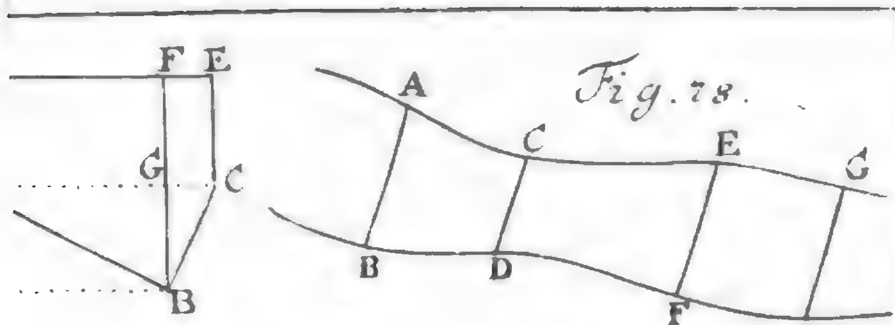
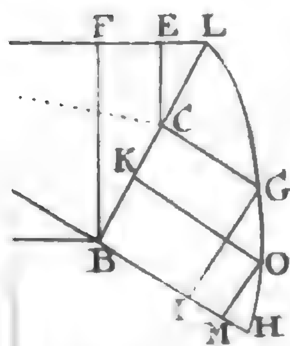
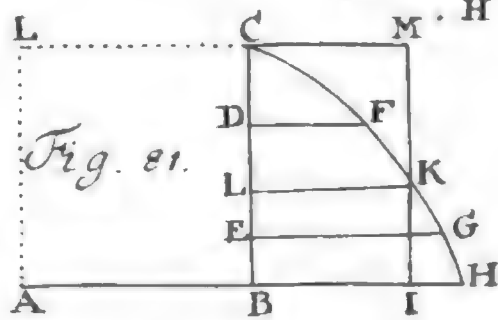
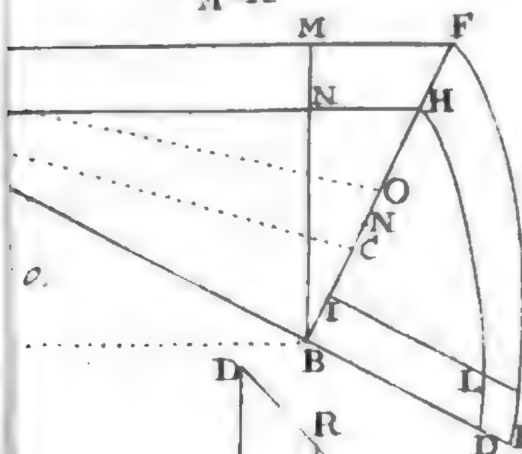


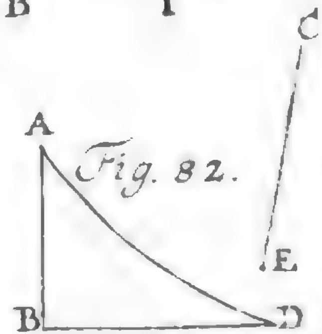
Fig:68.
Fig:72.
Fig:71.
Fig:73.
Fig:75.
Fig:76.
lit. F. 2
Fig: Hydraul: Tab.VII.

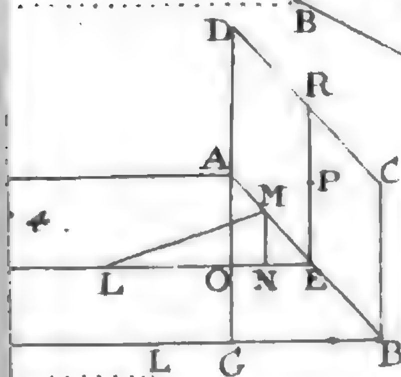


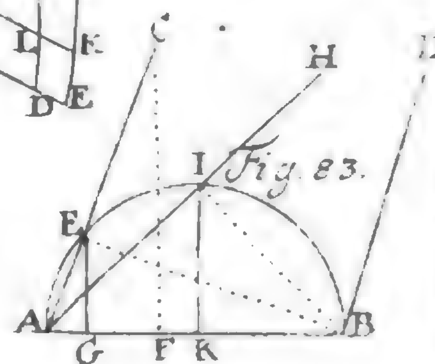












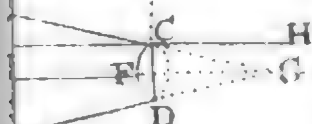
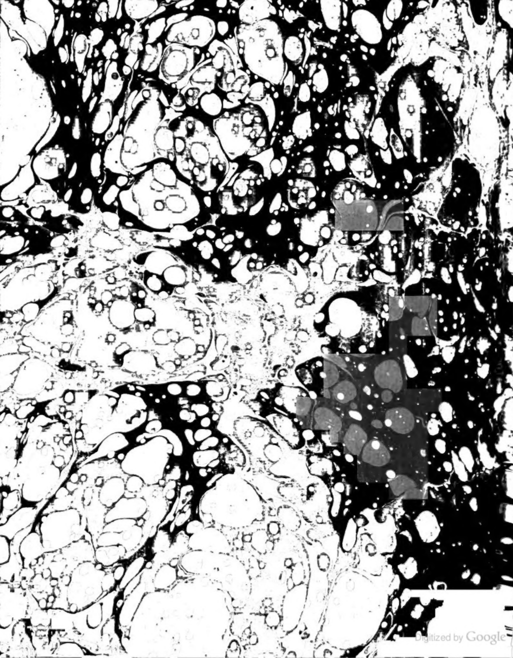


Fig. 85 lit. G. 2.

Fig. Hydraul. Tab. VIII.



Digitized by Google